

Berichte
des
Deutschen Wetterdienstes

Nr. 10

DK 551.501.45

**Neue Methode der Zerlegung von Häufigkeitsverteilungen
in Gauß'sche Normalkurven und ihre Anwendung
in der Meteorologie**

von

Dr. Oskar Essenwanger, Bad Kissingen

Bad Kissingen, 1954

Inhalt

	Seite
Zusammenfassung	3
I. Einführung und Problemstellung	3
II. Theoretische Grundlagen	3
a) Gewinnung einer Normalverteilung aus einer Häufigkeitsverteilung	3
b) Ausgleichsrechnung mit Hilfe einer Parabel	4
c) Ausgleichsrechnung mit einer Gauß'schen Normalkurve	5
III. Methoden der Häufigkeitsanalyse	6
a) Direkte Methode nach Doetsch	6
b) Grenzen der Auflösung für indirekte Methoden	6
c) Graphisches Verfahren nach Daeves-Beckel (Parabelmethode)	6
d) Neues Gauß kurvenverfahren	7
IV. Beispiele	8
a) Analyse der Häufigkeitsverteilung der Verlagerungsgeschwindigkeit der Höhenträge und -rücken	8
b) Analyse der Häufigkeitsverteilung täglicher Luftdruckwerte von Bamberg (69 Jahre)	9
c) Analyse der Häufigkeitsverteilung des Dampfdrucks	10
V. Schlußbetrachtungen	11
Literatur	11

Zusammenfassung

Für die Zerlegung einer Häufigkeitsverteilung in Normalkurven wird ein Versuchsverfahren entwickelt, das auf rechnerischem Wege eine Aufspaltung in Teilkollektive gestattet. Dabei wird von der bisher üblichen graphischen Methode der Annäherung der Häufigkeitsverteilung durch Parabeln abgegangen; jetzt geschieht diese unmittelbar mit Gauß'schen Normalkurven. Die Auflösbarkeit dieser der Periodogrammanalyse vergleichbaren Methode wird diskutiert.

Beispiel 1 bringt eine Gegenüberstellung der beiden Methoden an Hand der Häufigkeitsanalyse der Verteilung der Verlagerungsgeschwindigkeit der Höhenträge und -rücken in 55 Grad N. Die neue Gauß kurvenmethode liefert das meteorologisch sinnvollere Ergebnis.

Im Beispiel 2 wird die Häufigkeitsverteilung des Luftdrucks in 4 Teilkollektive zerlegt.

Im Beispiel 3 wird eine Häufigkeitsverteilung des Dampfdrucks aufgespalten und versucht, die einzelnen Teilkollektive bestimmten Luftkörpern zuzuordnen. Dabei ergibt sich, daß für einzelne Luftkörper der Dampfdruck (Winter) repräsentativ ist, für andere jedoch nicht.

I. Einführung und Problemstellung

In der Meteorologie war es bisher üblich, für Häufigkeitsverteilungen Mittelwert und Streuung zu berechnen und mit Hilfe dieser Parameter die Kurve mit einer Gauß'schen Normalverteilung zu vergleichen, welche dieselbe Anzahl Werte umfaßt. Dies heißt nichts anderes, als daß die ersten Momente einer Häufigkeitskurve berechnet wurden. Diese Parameter dienen einer Beschreibung der Kurve. Liegt eine Gauß'sche Normalverteilung vor, so besitzen Mittelwert und Streuung charakteristische Eigenschaften und Wahrscheinlichkeiten. Die meisten meteorologischen Häufigkeitskurven aber weisen mehr oder weniger Abweichungen von den zugehörigen Normalverteilungen auf (so ist z. B. der Mittelwert nicht der häufigste, die Kurve zeigt unregelmäßige Krümmungen usw.). Dies erweist sich an den Häufigkeitsverteilungen des Luftdrucks (Schmauß (18), Pearson and Lee (14), Pollak (15), Esserwanger (4)) oder der Sichtweite (Guß (9)) und des Niederschlags (Schneider-Carius (16)). Da bei solchen Häufigkeitsverteilungen dem Mittelwert die charakteristischen Eigenschaften fehlen, die er bei einer Gauß'schen Normalverteilung besitzt, fordert die Klimatologie (Knoch (12)) die Auflösung des Mittelwertes.

Man hat zwar, um nähere Aussagen über diese Verteilungen zu machen, zur Charakterisierung noch Schiefe und Exzeß (Moment 3. und 4. Ordnung) eingeführt. Beide Begriffe sind dem Statistiker vertraut, aber bei kartenmäßigen Darstellungen, die z. B. in der Klimatologie für Vergleichszwecke unumgänglich sind, treten erhebliche Schwierigkeiten auf. Linien gleichen Mittelwertes und gleicher Streuung sind noch anschaulich, Linien gleicher Schiefe und Exzeß jedoch kaum. Außerdem können Schiefe und Exzeß nur unter Schwierigkeiten physikalisch interpretiert werden. Zudem braucht man schon 5 Parameter, um nur eine angenäherte Aussage über die Häufigkeitsverteilung zu machen, eine kartenmäßige Darstellung aller wird aber ziemlich unübersichtlich.

Bei einzelnen meteorologischen Elementen gelingt durch Veränderung des Abszissenmaßstabes eine Re-

duktion auf eine Normalverteilung, wie Guß (9) für die Sichtweite und Schneider-Carius (16) für den Niederschlag gezeigt haben, bei anderen jedoch nicht. Dies sind z. B. Luftdruck oder Temperatur, Verteilungen, die man sich aus mehreren Einzelkollektiven zusammengesetzt vorstellen kann.

So taucht der Gedanke auf, eine solche Häufigkeitsverteilung in Gauß'sche Normalkurven aufzuspalten. Bei solchen Teilkollektiven charakterisieren dann Mittelwert und Streuung allein die Häufigkeitsverteilung. Wenn der Mittelwert gleich dem Nullwert der Abszisse ist, so verschwinden bekanntlich alle ungeraden Momente bei einer Gauß'schen Normalverteilung und die geraden lassen sich alle als eindeutige Funktionen der Streuung darstellen. Somit genügt die Angabe von Mittelwert und Streuung. Beiden käme wieder grundsätzliche Bedeutung zu. Daher kann die Zerlegung einer Häufigkeitsverteilung in Normalkurven eine Methode sein, welche die Auflösung des Mittelwertes in die Tat umsetzt. Auch die Wahrscheinlichkeit ist dann wieder genau bestimmt, denn bei einer Aufspaltung in Teilkollektive, die Normalkurven entsprechen, ist die Wahrscheinlichkeit leicht zu berechnen. Somit lassen sich wieder einfache kartenmäßige Darstellungen mit repräsentativen Werten gewinnen.

II. Theoretische Grundlagen

a) Gewinnung einer Normalverteilung aus einer Häufigkeitsverteilung

Ehe auf die Probleme der Häufigkeitsverteilung selbst eingegangen wird, sei zunächst allgemein die Gewinnung einer Normalverteilung erörtert.

Angenommen, eine Verteilungskurve sei gegeben in der Form einer Gauß'schen Normalverteilung mit

$$y = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

(e Basis der nat. Log.).

Dann bestimmen sich die angegebenen Konstanten N , x_m und σ folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} y \, dx && \text{(Anzahl)} \\ x_m &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} y \, x \, dx && \text{(Mittelwert)} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} y \, x^2 \, dx && \text{(Streuung)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für die meisten Häufigkeitsverteilungen liegt nun keine stetige Funktion $y = f(x)$ vor, sondern diskreten x -Werten (Abszisse) werden Häufigkeitswerte y (Ordinate) zugeordnet. Die Häufigkeitsverteilung ist meist so gegeben, daß die stetige Abszisseneinteilung in „Klassen“ aufgeteilt ist, für welche die Häufigkeitszahl y angegeben wird. Man bekommt daher eine Verteilungskurve, die aus diskreten Punkten besteht. Als x -Wert wird einer Klasse meist der mittlere x -Wert derselben zugeschrieben.

Da auch die meteorologischen Häufigkeitsverteilungen in dieser Form gegeben sind, müssen wir unsere Gleichungen (2) umformen*) in

*) Zum Übergang von einer stetigen Abszisse zur Klasseneinteilung sei auf die bestehende Literatur von Dixon (2) oder Fisher (8), auch Mises (13) verwiesen.

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^n y_i \\ x_m &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i x_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wobei n die Anzahl der gegebenen Klassen bedeutet. Dies sind die normalen Gleichungen, welche für die Berechnung der Konstanten bisher verwendet wurden und mit deren Hilfe man gewöhnlich N , x_m und σ bestimmt.

Es gibt aber noch andere Möglichkeiten, die Parameter festzulegen. Wir führen zunächst die Abkürzung $a_0 = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}}$ ein und schreiben (1) in der Form

$$y = a_0 e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

Nun läßt sich durch Logarithmieren die Verteilungskurve in eine Parabel verwandeln, nämlich

$$\ln y = \ln a_0 - \frac{(x-x_m)^2}{2\sigma^2} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Setzen wir } Y &= \ln a_0 - \ln y \quad \text{und} \\ X &= x - x_m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{so erhalten wir } X^2 = 2\sigma^2 Y \quad (7)$$

Dies ist die Gleichung einer nach der positiven Y -Seite geöffneten Parabel ($x^2 = 2py$), d. h. die Parabel ist nach der negativen y -Richtung geöffnet.

In einem Koordinatensystem, dessen Ordinate in logarithmischem Maßstab geteilt ist, kann daher die Gauß'sche Normalverteilung als Parabel dargestellt werden. Es gibt auch bereits solche Diagrammpapiere, die unter dem Namen „Häufigkeitspapiere“ bekannt sind. Auf nähere Einzelheiten sei hier nicht eingegangen; man kann darüber mehr bei Davies und Beckel (1) lesen.

Mit Hilfe des 2. Differentialquotienten $\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{\sigma^2}$ kann die Streuung gewonnen werden. Da Gleichung (5) überhaupt verwendet werden kann, um rasch eine Gauß'sche Normalverteilung zu berechnen, sei kurz noch näher darauf eingegangen. Auch eignet sich das folgende Verfahren gut, um schnell nachzuprüfen, inwieweit eine gegebene Verteilung sich der Gauß'schen Normalverteilung annähert. Zu diesem Zwecke rechnet man die Streuung an mehreren Stellen aus und erhält je nach Übereinstimmung sofort eine Antwort auf die Frage.

Da eine Parabel durch 3 Punkte eindeutig bestimmt ist, sei die Rechnung auf 3 äquidistante y - und x -Werte beschränkt, für die gelten soll

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + 1 \\ x_3 &= x_1 + 2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir schreiten also in Richtung der positiven x -Achse vorwärts. Jedem x_i -Wert sei ein entsprechender y_i -Wert zugeordnet.

Es bestimmen sich die Konstanten a_0 , x_m und σ wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \text{Erster Differenzenquotient } \Delta_1 &= \ln y_1 - \ln y_2 = \frac{x_2^2 - x_1^2 + 2x_m(x_1 - x_2)}{2\sigma^2} \\ \text{oder } \Delta_2 &= \ln y_2 - \ln y_3 = \frac{x_3^2 - x_2^2 + 2x_m(x_2 - x_3)}{2\sigma^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Zweiter Differenzenquotient $D =$

$$\Delta_2 - \Delta_1 = 2 \ln y_2 - (\ln y_1 + \ln y_3) = \frac{x_1^2 + x_3^2 - 2x_2^2 + 2x_m(2x_2 - x_1 - x_3)}{2\sigma^2} \quad (10)$$

Mit Hilfe der Relation (8) erhält man für

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ \text{und } (x_1^2 + x_3^2) - 2x_2^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Somit wird (10) zu } D = \frac{1}{\sigma^2} \quad (11)$$

$$\text{oder auch } \sigma^2 = \frac{1}{D} = \frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} = \frac{1}{2 \ln y_2 - (\ln y_1 + \ln y_3)} \quad (12)$$

Weiter wird aus (8) und (9)

$$\begin{aligned} x_m &= x_1 - \sigma^2 \Delta_1 + \frac{1}{2} = x_1 - \sigma^2 (\ln y_1 - \ln y_2) + \frac{1}{2}, \\ \text{auch } x_1 - x_m &= \sigma^2 (\ln y_1 - \ln y_2) - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

entsprechend auch $x_m = x_2 - \sigma^2 \Delta_2 + \frac{1}{2}$ mit Folgerungen.

Zur Bestimmung von a_0 läßt sich dann Gleichung (5) verwenden. Wir können also alle Konstanten mit Hilfe von 3 äquidistanten aufeinanderfolgenden Punkten leicht gewinnen. Soweit es sich um eine exakte Gauß'sche Verteilung handelt, besteht kein grundsätzlicher Unterschied in der Verwendung des Häufigkeitspapiers (und damit der Parabel) und der Gauß'schen Kurve selbst. Im Gegenteil läßt sich gerade im logarithmischen Maßstab ($\ln y$) aus den Gleichungen (11) bis (13) sehr leicht jede beliebige Gauß'sche Kurve schnell berechnen.

b) Ausgleichsrechnung mit Hilfe einer Parabel

Nun sind aber die meisten Häufigkeitsverteilungen, die aus Beobachtungsdaten bestehen, mit zufälligen Fehlern behaftet; in diesem Falle ergibt sich, da aus je 3 Punkten ein Tripel errechnet werden kann, eine Vielzahl von a_0 , x_m und σ -Werten. Daher wird in der Praxis ein Fehlerausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Diese Ausgleichsrechnung soll kurz erläutert werden. Im Häufigkeitspapier kann man diesen Ausgleich graphisch durchführen, indem man eine Parabel so durch alle Punkte legt, daß sich Abweichungen ausgleichen. Da jedoch die Konstruktion einer Parabel nicht einfach ist, sei hier der rechnerische Weg gezeigt.

Für eine Parabel der allgemeinen Form

$$y = lx^2 + mx + n \quad (14)$$

lassen sich folgende Ausgleichsbedingungen angeben (für äquidistante x -Werte)

$$\left. \begin{aligned} l \sum x_i^4 + m \sum x_i^3 + n \sum x_i^2 &= \sum y_i x_i^2 \\ l \sum x_i^3 + m \sum x_i^2 + n \sum x_i &= \sum y_i x_i \\ l \sum x_i^2 + m \sum x_i + n \sum 1 &= \sum y_i \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(wie man leicht durch Differenzieren von $\sum (Y - y)^2$ nach l , m und n nachprüfen kann, wobei Y die beobachteten Werte und y nach (14) zu nehmen ist.)

Für jede Anzahl Punkte können die Koeffizienten der 3 Variablen l , m und n bestimmt werden und mit Hilfe des Gleichungssystems (15) diese selbst. Daraus ergibt sich dann die Parabel. Der Zusammenhang mit den Größen a_0 , x_m und σ der Gauß'schen Normalverteilung besteht dann folgendermaßen. Zuerst formen wir (14) um in

$$l \left(x + \frac{m}{2l} \right)^2 + n - \frac{m^2}{4l} = y \quad (14')$$

Dazu die logarithmierte Gleichung der Gauß-Kurve nach (5)

$$-\frac{1}{2\sigma^2} (x - x_m)^2 + \ln a_0 = \ln y \quad (5')$$

*) Beim Summenzeichen ist zur einfacheren Schreibweise hier und im folgenden die Summierung über n weggelassen.

III. Methoden der Häufigkeitsanalyse

a) Direkte Methode nach Doetsch

Jetzt kann weiter auf die Häufigkeitsanalyse eingegangen werden. Die Zerlegung in Normalverteilungen ist äußerst schwierig. Es gibt zwar eine direkte Methode nach Doetsch (3), welche exakt ist und die Aufteilung auf die Berechnung der Momente der Häufigkeitsverteilung zurückführt. Jedoch wird hierbei einmal die Kenntnis der Teilkollektive vorausgesetzt und weiter sind für jedes Kollektiv 3 Momente zur Bestimmung notwendig (z. B. für 3 Kollektive 9 Momente usw.). Diese Zahl läßt sich zwar reduzieren, wenn man gleiche Streuungen voraussetzt, eine Annahme, die aber bei meteorologischen Elementen im allgemeinen nicht erfüllt sein wird.

Der zweite Nachteil liegt in der Berechnung der Momente selbst. Bei vielen Häufigkeitsverteilungen fällt schon die Bildung des 4. Moments schwer, bei 3 oder mehr Teilkollektiven dürfte daher eine direkte Lösung an der Berechnung der Momente scheitern. Zudem gehen bei den geraden Momenten die Fehler am Rande der Häufigkeitsverteilung enorm in die Rechnung ein, so daß man praktisch nur diejenigen (ungeraden) verwenden kann, in welchen Differenzen vorkommen, aber damit steigt die Anzahl der zu berechnenden Momente, was auf neue Schwierigkeiten führt. So kann dieses Verfahren in der Praxis kaum verwertet werden.

Man kann den Unterschied dieser direkten Methode und der folgenden Verfahren etwa mit dem einer harmonischen Analyse und einer Periodogrammanalyse bei der Fourierzerlegung (Stumpff (17)) vergleichen.

Die harmonische Analyse ist ein Rechenverfahren, das streng exakt gilt, wie hier die direkte Methode. Da sie aber zur Voraussetzung hat, daß die Wellen harmonische Schwingungen der Grundperiode sind, so ist sie für die Praxis nicht immer brauchbar. Die direkte Methode in der Häufigkeitsanalyse setzt die Kenntnis der Teilkollektive voraus, kann daher in der Praxis schon deshalb nicht angewandt werden.

Die Periodogrammanalyse ist ein Versuchsverfahren und beschränkt sich auf die Analyse der dominanten Wellen. Auch die im folgenden erörterten Methoden sind Versuchsverfahren und sollen die hauptsächlichlichen Kollektive bestimmen. Wie aber bei der Periodogrammanalyse eine Trennung der Wellen nicht mehr erfolgen kann, wenn sie in der Periode zu eng benachbart sind, so kann auch in den folgenden Verfahren nur eine begrenzte Auflösungsfähigkeit erreicht werden. Deshalb sei zunächst darauf eingegangen.

b) Grenzen der Auflösung für indirekte Methoden

Alle indirekten Methoden, die eine Aufspaltung versuchen, müssen voraussetzen, daß am Rande einer Häufigkeitsverteilung nur das Randkollektiv besteht und der Einfluß der anschließenden Kollektive praktisch abgeklungen ist. Diese Annahme ist plausibel und ohne sie gelingt außerhalb der direkten Methode keine Trennung.

Haben wir eine exakte Gauß'sche Normalverteilung vor uns, so läßt sich diese nach Gleichung (10) bis (13) sofort aus der Angabe von 3 aufeinanderfolgenden Werten bestimmen. Wir müssen daher voraussetzen, daß uns mindestens 3 Werte vom Rande aus vorliegen, aus denen wir die Normalverteilung berechnen können. Dies gilt für eine exakte Normalverteilung. Da wir aber in der Praxis nie damit rechnen können, daß exakte Verteilungen vorliegen, so muß eine etwas größere Anzahl vorliegen, so daß noch ein Fehlerausgleich durchgeführt werden kann.

Wie die Beispiele der Tab. 1 lehren, würde hierbei keine Trennung mehr erfolgen können, wenn bei der Kombination der Reihen 1 und 2 die beiden Mittelwerte übereinstimmen (Reihe 3). Es gelingt aber noch eine Trennung, wenn die beiden Mittelwerte um eine Einheit verschieden sind (Abb. 1), da dann am Rande noch 3 Werte zur Berechnung der Konstanten vorhanden sind. Im Beispiel handelt es sich ja um exakte Normalkurven. Wir sehen im Bild die Kombination dieser 2 Gaußkurven, deren Mittelwert um eine Einheit verschoben ist. Der Gipfelwert fällt jetzt nicht mehr mit dem Mittelwert zusammen, auch hat die Kurve Schiefe (-0.24) und Exzeß (0.89). Die Verteilung entspricht etwa der Häufigkeitsverteilung des Luftdrucks (Schmauß (18), Essenswanger (4)). Sie demonstriert, daß bei schiefen Verteilungen eine Mischverteilung aus mehreren Normalkurven vorliegen kann.

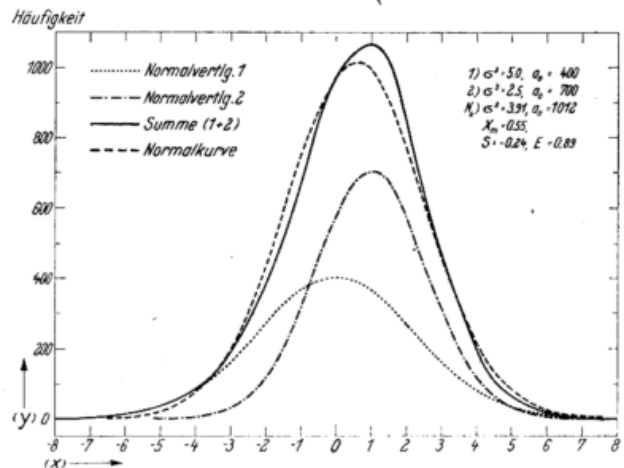


Abb. 1

Schiefe Häufigkeitsverteilung, bestehend aus 2 Normalkurven

c) Graphisches Verfahren nach Daeves-Beckel (Parabelmethode)

Hauptsächlich für die Industrie haben nun Daeves und Beckel (1) eine graphische Methode der Häufigkeitsanalyse entwickelt. Schon 1949 hat Hoffman (10) in einem Referat auf ihre Bedeutung für die Meteorologie aufmerksam gemacht.

Daeves und Beckel versuchen, nachdem die y-Werte in ein Diagrammpapier mit logarithmischer Ordinate eingetragen sind, von den Rändern aus beginnend, Teilkollektive abzuspalten. Diese ergeben sich als Parabel in der graphischen Darstellung. Auf die theoretischen Grundzüge dieser Annäherung wurde bereits im Abschnitt IIb näher eingegangen.

Zur Bestimmung der Teilkollektive kann man auch das Wahrscheinlichkeitspapier zu Hilfe nehmen, in dem die Summenfunktion für eine Gauß'sche Verteilung eine Gerade bildet. (Näheres siehe bei Daeves und Beckel (1)). Man bestimmt das Randkollektiv durch Zusammenfassung der Punkte, für die die Summenfunktion wirklich eine Gerade darstellt.

Durch diese zeichnet man eine Ausgleichsparabel. Bildet sich nämlich ein Knick in der Summenfunktion, so ist dies die Stelle, an der das nächste Kollektiv seinen Einfluß geltend macht. Das gewonnene Randkollektiv zieht man nun von der Häufigkeitsverteilung ab und beginnt von Neuem. Dieser Prozeß wird solange fortgesetzt, bis man alle Teilkollektive bestimmt hat. Ist die Lösung richtig, so bleibt in der Mitte ein etwa symmetrisches Kollektiv übrig. Ist dies nicht der Fall, so muß man erneut eine Aufspaltung der gesamten Häufigkeitsverteilung ver-

suchen, bis sich eine richtige Lösung ergibt. Als Anhaltspunkte können bei der Zerlegung noch Gipfel in der Häufigkeitsverteilung verwendet werden, wenn man annimmt, daß dort der Mittelwert eines Teilkollektivs zu finden sei. Bei äußerlich deutlich erkennbarem Randkollektiv oder mehreren Kollektiven, die sich in der Gesamthäufigkeitsverteilung abzeichnen, ist eine Aufspaltung meist sehr einfach.

Die Schwierigkeit der graphischen Methode liegt bei der Konstruktion der Ausgleichsparabel. Trotzdem läßt sich das Verfahren durchführen. Man kann das Verfahren aber auch mit Hilfe der hier abgeleiteten Gleichungen (15) rechnerisch durchführen, falls man die Konstruktion einer Parabel ersparen will. Man hat damit die Zeichengenauigkeit, die zu Fehlern Anlaß geben kann, verbessert. Wie aber aus dem vorherigen Kapitel zu entnehmen ist, stellt die Annäherung durch eine Parabel nicht dieselbe Lösung dar, die man bei Verwenden einer Gauß'schen Kurve bekommen würde. So stimmen die Kollektive, die man aus den Parabeln gewinnt, nicht mit jenen überein, die man durch Angleichung mit einer Gauß'schen Kurve herauschälen würde. Die „Parabelmethode“ hat allerdings den Vorteil, daß sie ohne größere Hilfsmittel (z. B. Hilfstafeln für Quasimittelwerte und -streuung) ausgeführt werden kann. Sie kann daher für solche Häufigkeitsverteilungen vorgeschlagen werden, deren Aufteilung sofort klar ins Auge fällt, um sie als vorläufige Trennung durchzuführen und mit Hilfe einer Fehlerkorrektur richtige Gauß'sche Kurven zu berechnen.

Auf diese Fehlerkorrektur wird noch eingegangen. Die Parabelmethode ist für die meisten meteorologischen Zwecke aber kaum verwendbar. Im Beispiel 1 wird gezeigt, daß man mit der Parabelmethode zwar zu einer Aufteilung gelangt, die meteorologisch sinnvoller Ergebnisse aber mit Hilfe der „Gauß-kurvenmethode“ gewonnen werden.

d) Neues Gauß kurvenverfahren

Wie schon erwähnt, geht nun das Bestreben dahin, an Stelle der „Parabelmethode“ die Annäherung mit Hilfe einer „Gauß kurvenmethode“ vorzunehmen. Dafür gibt es leider kein graphisches Verfahren, auch das rechnerische erfordert die Aufstellung von Hilfstafeln, wie im Abschnitt IIc bereits näher ausgeführt wurde. Sind aber einmal diese etwas umfangreichen Tabellen erarbeitet, so kann eine Aufteilung sogar schneller als mit Hilfe der „Parabelmethode“ durchgeführt werden.

Für die Aufspaltung einer Häufigkeitsverteilung in Teilkollektive läßt sich daher folgendes Verfahren angeben, wobei die ersten 3 Punkte zu einer Voruntersuchung dienen, während die nächsten Punkte dann die eigentliche Analyse schildern.

1. Man berechne zuerst die zugehörige Normalverteilung. Treten dabei systematische Abweichungen auf, die sich nicht mit Hilfe einer Maßstabänderung der Abszisse beseitigen lassen wie bei Sicht und Niederschlag (Gauß (9), Schneider-Carius (16)) oder durch Annäherung z. B. mit der Poisson'schen, binomischen Reihe usw. und kommt man zu dem Schluß, daß eine Mischverteilung vorliegt, so kann man an eine Aufteilung gehen.
2. Zunächst versucht man, mit Hilfe von drei Y-Werten vom Rande her eine Aufteilung zu beginnen, indem man exakte Gauß'sche Normalverteilungen als Teilkollektive voraussetzt (Beispiel in Abb. 1). Man wird rasch erkennen, ob diese Voraussetzung gegeben ist. Kommt man damit nicht zum Ziel, so besteht die Gesamtverteilung aus Teilkollektiven, die wir durch die Ausgleichsrechnung bestimmen müssen.

3. Man versucht, Anhaltspunkte für Mittelwerte von Teilkollektiven aus der Häufigkeitsverteilung abzulesen und merkt sich diese vor. Man hüte sich aber, zufällige Spitzen als Gipfel zu werten und bei der Aufspaltung strikt zu versuchen, Teilkollektive mit diesen Mittelwerten zu erhalten. Diese ausgewählten Punkte können lediglich Anhaltspunkte sein.
4. Von den Rändern aus beginnt man jetzt, σ und x_m der Randkollektive zu bestimmen, indem man die „Quasistreuung“ und den „Quasimittelwert“ nach Gleichung (18) berechnet und aus der Tabelle dann σ und x_m abliest. In der Praxis hat sich bewährt, mit einer Tabelle für 7 Punkte zu arbeiten. Die Anzahl der Y-Werte, mit deren Hilfe man zuerst Quasistreuung und -mittelwert berechnet, soll aber etwa ein Siebentel der Gesamtklassenzahl nicht überschreiten; andernfalls kann der Ausgleich zu stark werden, und es ergibt sich eventuell nur eine Kurve, nämlich die bereits vorher berechnete Normalkurve für die Gesamthäufigkeitsverteilung. Man notiert die gewonnenen σ - und x_m -Werte für mehrere zusammenhängende Kombinationen und kann damit feststellen, ob noch das Randkollektiv allein vorliegt oder ob bereits das anschließende Kollektiv seinen Einfluß geltend macht. Man faßt zum Schluß alle die Punkte zusammen, die noch unbeeinflusst vom anschließenden Kollektiv sind, und führt damit einen Fehlerausgleich durch, womit man die endgültigen Werte für σ und x_m des Randkollektivs aus dieser Anzahl Punkte bestimmt.

Beispiel: Die ersten 10 Y-Werte einer Häufigkeitsverteilung vom Rande aus sollen folgende Parameter ergeben haben:

zusammengefaßt	σ	x_m
Y-Werte 1 bis 7	4.0	4.0
„ 2 bis 8	4.1	3.2
„ 3 bis 9	4.8	2.5
„ 4 bis 10	6.0	6.0

In diesem Falle wird man die Punkte 1 bis 8 zusammenfassen, man kann vielleicht noch mit 1 bis 9 den Ausgleich durchführen. Mit diesem aus 8 bzw. 9 Werten bezeichneten σ und x_m -Wert bildet man das Randkollektiv und zieht dieses von der Häufigkeitsverteilung ab. Die Restkurve wird dann weiter analysiert. Stellt sich heraus, daß ein als Anhaltspunkt vermutter Mittelwert für ein Teilkollektiv mit dem so errechneten x_m übereinstimmt, so ist es meist leicht, das Teilkollektiv dann zu bestimmen.

Wird die Aufteilung richtig durchgeführt, so bleibt am Ende ein etwa symmetrisches Restkollektiv übrig das letzte Teilkollektiv. Ist dies nicht der Fall, so liegt entweder eine Kurve vor, die sich nicht zerlegen läßt oder es sind Fehler bei der Bestimmung vorgekommen. Dies ist dann nachzuprüfen.

5. Hat man erst einmal die Teilkollektive bestimmt, so muß man noch einen Gesamtfehlerausgleich in der gesamten Häufigkeitsverteilung durchführen. Er soll verhindern, daß Kollektive mit zu geringem Scheitelwert oder falschem Mittelwert bestimmt wurden. Dieser Fehlerausgleich kann auch durchgeführt werden, wenn die Teilkollektive aus Gründen der Einfachheit mit Hilfe der „Parabelmethode“ bestimmt worden sind. Das im Abschnitt 4 beschriebene Verfahren bringt jedoch immer Vorteile, da unter Umständen dieser Fehlerausgleich keine Veränderung der Teilkollektive erbringt und damit schon erledigt ist.

Wir setzen unsere Teilkollektive zu einer Gesamtverteilung zusammen und berechnen für jeden Abszissenpunkt unsere Abweichung von der gegebenen Häufigkeitsverteilung. Diese Abweichungen vertei-

len wir jetzt auf die einzelnen Teilkollektive, und zwar so, daß der Fehler in dem Maße in den einzelnen Teilkollektiven zugeschlagen wird, wie die Ordinatenstücke der Teilkollektive sich zueinander verhalten. Diese Abweichungen treten als Korrektur zu dem errechneten Ordinatenwert des Teilkollektivs auf und wir bekommen dann Häufigkeitsverteilungen für die einzelnen Teilkollektive. Diese werden jetzt wieder durch eine Gauß'sche Normalverteilung angenähert. Teilweise ergeben sich Änderungen gegenüber den bei der Aufspaltung angenommenen Kurven. Diese neu berechneten Gauß'schen Normalkurven setzt man jetzt wieder zu einer Gesamtverteilung zusammen und führt diese Ausgleichs-

rechnung so lange fort, bis keine Änderung der Teilkollektive mehr eintritt oder das mittlere Abweichungsquadrat der errechneten Kurve und der gegebenen keine oder wenig Änderung zeigt. Man erreicht damit, daß die errechneten Teilkollektive wirklich so gebildet sind, daß das Abweichungsquadrat der errechneten zur gegebenen Häufigkeitsverteilung zu einem Minimum wird.

IV. Beispiele

a) Analyse der Häufigkeitsverteilung der Verlagerungsgeschwindigkeit der Höhenträge und -rücken

Tab. 2

Analyse der Häufigkeitsverteilung der Verlagerungsgeschwindigkeit der Höhenträge und -rücken längs 55 Grad N (1950 - 1952)

a) Statistische Maßzahlen *)

	T r o g m. F.			R ü c k e n m. F.		
N	4915			4961		
x_m	5.6	± 0.09	Gad/Tag**)	5.4	± 0.09	(Anzahl)
σ	8.76	± 0.06	"	8.63	± 0.06	(Mittelwert)
S	-0.072	± 0.003	"	-0.072	± 0.003	(Streuung)
E	-0.080	± 0.098	"	-0.084	± 0.098	(Schiefe)
$\bar{z}$	= ± 7.32			= ± 10.22		
				(Exzeß)		

b) Aufteilung mit Parabelmethode (nach Daeves - Beckel)

	x_m	σ	N	x_m	σ	N
A	-12.0 Grad/Tag	3.6 Grad/Tag	5.3%	-10.5 Grad/Tag	3.5 Grad/Tag	8.1%
B	-4.0 "	4.0 "	15.9%	-1.5 "	3.8 "	20.9%
C	4.0 "	4.0 "	42.0%	5.5 "	4.0 "	41.0%
D	11.5 "	3.6 "	25.9%	13.0 "	3.8 "	23.4%
E	19.5 "	4.0 "	10.9%	18.0 "	5.3 "	11.4%
$\bar{z}$	= ± 4.59			= ± 5.10		

c) Aufteilung mit Gaußkurvenmethode (nach Essenwanger)

	x_m	σ	N	x_m	σ	N
A	-11.0 Grad/Tag	4.1 Grad/Tag	6.2%	-9.0 Grad/Tag	4.7 Grad/Tag	9.2%
B	-2.0 "	4.6 "	22.5%	-1.0 "	5.1 "	18.0%
C	4.4 "	3.8 "	32.1%	3.5 "	4.0 "	31.2%
D	11.0 "	3.8 "	25.1%	11.0 "	4.2 "	30.2%
E	18.2 "	4.8 "	14.0%	18.0 "	5.3 "	11.4%
$\bar{z}$	= ± 4.15			= ± 4.95		

*) Statistische Maßzahlen mit Momenten berechnet.
**) 1 Grad/Tag ~ 2.7 km/h.

Im ersten Beispiel (Tab. 2) sind die Analysenergebnisse der Parabelmethode (Daeves - Beckel) und der Gaußkurvenmethode einander gegenübergestellt. Abschnitt a enthält die statistischen Maßzahlen für die Häufigkeitsverteilungen der Verlagerungsgeschwindigkeit von Höhentrog und -rücken längs 55 Grad N für einen dreijährigen Zeitraum (Essenwanger (5)). Sie sind für beide Verteilungen etwa gleich, beide besitzen geringe Schiefe und etwa denselben Exzeß. Aus den statistischen Zahlen könnte man schließen, daß beide Verteilungen nur geringe Abweichungen von einer Normalverteilung besitzen und sich sonst gleichen. Das mittlere Abweichungsquadrat $\bar{z}^2$ der Häufigkeitsverteilungen von der Normalverteilung, also

$$\bar{z}^2 = \frac{\sum (Y_i - y_i)^2}{n}$$

(wobei Y_i Ordinatenwert der Beobachtungsergebnisse und y_i der für die Normalverteilung, n die Anzahl der Klassen) deutet schon an, daß die Häufig-

keitsverteilungen von Trog und Rücken verschieden sind. Dieser Unterschied tritt aber erst richtig bei der Aufteilung in Teilkollektive hervor. (Tab. 2b und c.) Für beide Methoden ergeben sich 5 Teilkollektive. Die meteorologisch sinnvolleren Ergebnisse liefert jedoch Aufspaltung c. Die Teilkollektive A bis E kann man etwa folgendermaßen charakterisieren:

- A = schnell rückläufige Wellen
- B = stationäre Wellen
- E = normal rechtsl. Wellen
- D = schnell rechtsl. Wellen
- C = sehr schnell rechtsl. Wellen

Nach Aufteilung b (Parabelmethode) würden in allen Kollektiven die Rücken stets schneller laufen als die entsprechenden Tröge. Diese Tatsache widerspricht aber den synoptischen Erfahrungen. Zwar liefern die einzelnen Kollektive dafür unterschiedliche Anteile, z. B. überwiegen bei D und E die Tröge, aber trotzdem bliebe noch das Resultat zu erklären,

warum im größten Kollektiv C die Rücken schneller laufen.

In Aufteilung c (G a u ß kurvenmethode) besitzen im Mittelkollektiv C die Tröge eine größere Geschwindigkeit. Hieraus folgert, daß normal laufende Tröge etwas schneller ostwärts wandern als die Rücken. Dies steht durchaus mit der Erfahrung im Einklang. Die Kollektive D und E unterscheiden sich im Mittelwert nicht. Schnell rechtslaufende Wellen ziehen demnach mit gleicher mittlerer Geschwindigkeit. Im Kollektiv B, den stationären Wellen, deutet sich an, daß Tröge eine stärkere Tendenz zur Westbewegung aufweisen als Rücken und in A wandern schnell rückläufige Tröge im Mittel schneller westwärts als Rücken. Auch diese Ergebnisse entsprechen etwa den in der synoptischen Praxis gewonnenen Erfahrungen.

Durch die bessere Angleichung der G a u ß kurvenmethode ergeben sich in diesem Falle Teilkollektive, die mehr den praktischen Erfahrungen entsprechen. So darf man wohl schließen, daß diese Methode deshalb für meteorologische Zwecke besser geeignet ist. Wir kommen aber in beiden Fällen zu 5 Teilkollektiven, so daß man annehmen darf, daß diese wirklich reelle Bestandteile der Häufigkeitsverteilung sind.

Die Aufteilung in Normalverteilungen stellt eine bessere Näherung an die Gesamtverteilung vor, was aus dem Vergleich der $\bar{x}$ -Werte abgelesen werden kann, die für beide Methoden etwa denselben Wert ergeben, wobei der Wert für c) etwas geringer ist.

b) Analyse der Häufigkeitsverteilung täglicher Luftdruckwerte von Bamberg (69 Jahre)

Im zweiten Beispiel wurde die Häufigkeitsverteilung der 69jährigen Bamberger Luftdruckreihe 1879 bis 1947 (Essenwanger (4)) in Teilkollektive zerlegt. Tabelle 3a gibt zunächst einen Überblick über die statistischen Maßzahlen der Gesamtverteilung. Es treten sowohl Schiefe wie auch Exzeß auf. Tab. 3b gibt nun für diese Häufigkeitsverteilung die Teilkollektive an. Danach reihen sich um Kollektiv C symmetrisch zwei etwa gleich große, die als Tiefdruckgebiete (B) und Hochdruckgebiete (D) aufgefaßt werden können. Das Mittelkollektiv (C) würde dann diejenigen Werte umfassen, die etwa dem mittleren Normalwert entsprechen und nicht ausgesprochen Hoch- oder Tiefdruckgebiete sind. Außerdem

tritt noch ein Randkollektiv (A) auf, das extremen Tiefdruckgebieten entsprechen könnte. Dieses Ergebnis steht auch mit der Praxis im Einklang. Der Verlauf einer Luftdruckkurve zeigt, daß die Minima spitz zulaufen, daher extrem tiefe Werte auftreten können, während die Maxima eine weit flachere Wölbung erkennen lassen, so daß hier das entsprechende Kollektiv fehlt. Ohne Kollektiv A würde die Luftdruckhäufigkeitsverteilung symmetrisch verlaufen. Zählt man Kollektiv A und B zusammen, so kommt man zu einem Verhältnis von Tief zu Hoch von rund 4:3. Ein etwa gleiches Verhältnis von Tief zu Hoch hat F a u s t (7) auf völlig anderem Wege gefunden. Diese Analyse der Luftdruckverteilung liefert daher durchaus sinnvolle Ergebnisse.

Tab. 3

Analyse der Häufigkeitsverteilung des Luftdrucks
(Bamberg 1879 - 1947, Frühtermin)
(G a u ß kurvenmethode)

a) Statistische Maßzahlen *)

N	=	25197
x_m	=	737.04 $\pm$ 0.07 mm Hg
σ	=	6.37 $\pm$ 0.05 mm
S	=	-0.34 $\pm$ 0.04
E	=	0.414 $\pm$ 0.113
$\bar{x}$	=	$\pm$ 89.0

b) Aufteilung in Kollektive

A	726 mm	5.1 mm	7.7%
B	733	4.2	28.7%
C	738	3.2	35.8%
D	743	4.2	27.8%
$\bar{x}$	=	$\pm$ 21.2	

*) Statistische Maßzahlen mit Momenten berechnet.

Natürlich verringert sich auch diesmal die mittlere Abweichung $\bar{x}$ zur beobachteten Kurve, diesmal sogar auf etwa ein Viertel des Wertes.

Diese Aufteilung in Teilkollektive könnte zu neuen klimatologischen Betrachtungen führen, wenn sie z. B. an mehreren Stationen durchgeführt wird und die Ergebnisse kartographisch verarbeitet werden. Eine solche Betrachtung erscheint vom physikalischen Standpunkt aus aber sinnvoller als die der höheren Momente (vgl. (14) und (15)).

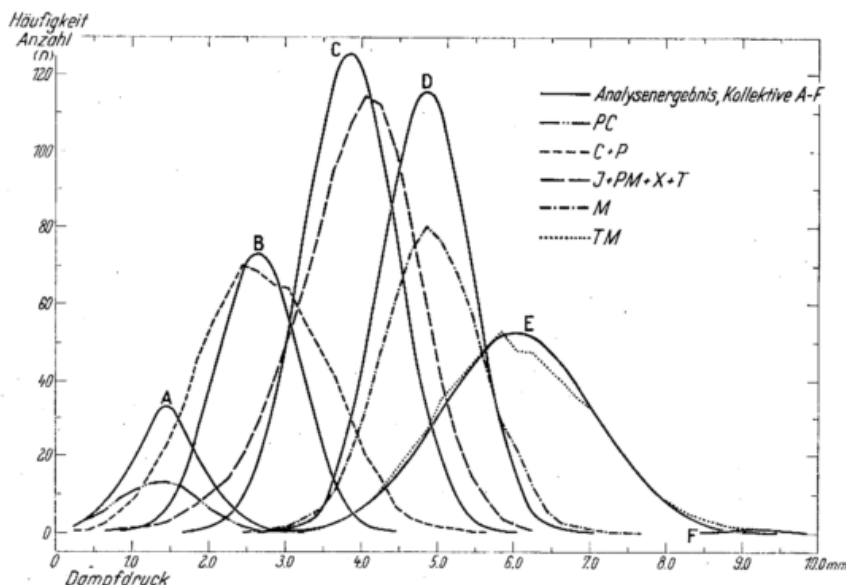


Abb. 2
Dampfdruckhäufigkeit für Karlsruhe 1887-1941 (Winter)

c) Analyse der Häufigkeitsverteilung des Dampfdruckes
 In einem dritten Beispiel wurde eine Dampfdruck-
 häufigkeit in Teilkollektive zerlegt. Schwerdt-
 feger (19) hat in einer Untersuchung über die Häu-
 figkeitsverteilung des Dampfdruckes die Existenz
 der Luftmassen damit begründet, daß systematische
 Abweichungen einer solchen Häufigkeitsverteilung
 von der Normalkurve vorkommen, was bedeutet, daß
 die Dampfdruckverteilung eine Mischverteilung dar-
 stellt. Hier soll nun versucht werden, eine Ent-
 mischung vorzunehmen. Hollerithmäßig wurde eine
 Häufigkeitsverteilung des Dampfdruckes für 55 Jah-

re (1887—1941) für die Wintermonate Januar - Fe-
 bruar für Karlsruhe (Morgentermin) aufgestellt (vgl.
 (11)) und zugleich eine Trennung nach Luftkörpern
 vorgenommen, da für Luftmassen leider keine lang-
 jährigen Aufstellungen möglich sind. Die Gesamt-
 verteilung wurde dann unabhängig davon einer
 Häufigkeitsanalyse unterzogen und in 6 Kollektive
 aufgespalten, von denen das letzte völlig unbedeu-
 tend ist. Für alle Häufigkeitsverteilungen nach Luft-
 körpern wurden die statistischen Maßzahlen berech-
 net (Tab. 4a) und dann eine Zuordnung versucht
 (Tab. 4c, Abb. 2). Das Beispiel demonstriert sehr

Tab. 4
Analyse der Häufigkeitsverteilung des Dampfdruckes
 (Karlsruhe 1887 - 1941, Frühtermin Jan.-Febr.)

a) Statistische Maßzahlen *)										
	I	M	PM	P	PC	C	T	TM	X	Ges.
N	402	659	279	131	92	621	34	660	380	3258
x_m	3.7	4.9	3.9	2.5	1.4	2.7	3.4	6.1	4.1	4.25 mm Hg
$\sigma^{**})$	4.2	3.1	3.3	4.2	2.5	3.8	2.8	5.2	3.8	7.48 "
S	-0.5	0.1	0.4	0.0	0.4	0.1	0.0	0.3	-0.3	0.13
m. F.	± 0.03	± 0.03	± 0.04	± 0.05	± 0.10	± 0.04	± 0.15	± 0.02	± 0.03	± 0.006
E	0.6	0.5	-0.1	-0.0	0.3	0.1	0.4	-0.4	-0.1	-0.08
m. F.	± 0.5	± 0.4	± 0.6	± 0.9	± 1.0	± 0.4	± 0.2	± 0.4	± 0.5	± 0.17
für Gesamtkurve $\bar{x} = \pm 8.95$										
b) Häufigkeitsanalyse:										
	N	$\sigma^{**})$	x_m							
A	7.9%	2.9 mm	1.65 mm Hg.							
B	15.4%	2.7	2.65							
C	29.7%	3.1	3.85							
D	26.5%	3.0	4.85							
E	20.4%	5.0	6.05							
F	0.1%	1.9	9.25							
$\bar{x} = \pm 3.40$										
c) Vergleich mit Häufigkeitsverteilung nach Luftkörpern										
	x_m	$\sigma^{**})$	N	Luftk.	x_m	σ	N			
A	1.65 mm	2.9	259	PC	1.4	2.5	92			
B	2.65	2.7	500	P	2.6	4.2	131			
				C	2.7	3.8	621	752		
C	3.85	3.1	969	I	3.7	4.2	402			
				PM	3.9	3.3	279			
				X	4.1	3.8	380	1095		
				T	4.3	2.8	34			
D	4.85	3.0	863	M	4.9	3.1	659			
E	6.05	5.0	663	TM	6.1	5.2	660			
F	9.25	1.9	4	—	—	—	—			

*) Statistische Maßzahlen mit Momenten berechnet.
 **) In Einheiten von 0.2 mm Dampfdruck.

schön, die Auflösefähigkeit der Häufigkeitsanalyse.
 Kollektiv E, das der TM entspricht, läßt sich sehr
 leicht herauslösen, das Kollektiv der PM wird jedoch
 nicht gut gefaßt, weil die anschließenden Häufigkei-
 ten zu dicht folgen. Trotzdem kann die Aufteilung
 als geglückt angesehen werden, da besonders die
 Mittelwerte gut getroffen sind; denn es besteht kaum
 ein Zweifel daran, daß bei der nie ganz objektiven
 Bestimmung der Luftkörper manchmal an Stelle von
 PC ein P oder C gesetzt worden ist, so daß diese
 eigentlich noch zur PC zugefügt werden müßten.
 Addiert man nämlich die Häufigkeiten für P und C,
 so ergibt sich merkwürdigerweise eine der Spitz-

beraubte Verteilung. So läßt sich dem Kollektiv B
 die Häufigkeitsverteilung für P und C zuordnen.
 Auch für D läßt sich die Häufigkeitsverteilung der M
 noch in Einklang bringen. Das Mittelkollektiv C
 würde dann den Rest, also I, PM, X und T umfassen;
 hierbei ist besonders die Bestimmung von I und X
 stark subjektiv beeinflusst. Unglücklicherweise geht
 die T in diesem Kollektiv völlig unter.

Das Ergebnis der Häufigkeitsanalyse kann so ge-
 deutet werden, daß sich offenbar einzelne Luftkör-
 perhäufigkeiten als natürliche Bestandteile einer
 Dampfdruckhäufigkeit herauslesen lassen. Man kann
 aber umgekehrt auch so formulieren, daß der

Dampfdruck (im Winter) für einzelne Luftkörper wohl repräsentativ ist, für andere jedoch nicht. Nun sind die Luftkörper nicht nach dem Dampfdruck allein definiert, und man kann auch aus dieser kurzen Bearbeitung keine weitergehenden Schlüsse ziehen. Sie sollte lediglich ein Beispiel für die Häufigkeitsanalyse sein und die Aufgaben aufzeigen, die mit Hilfe einer solchen gelöst oder in Angriff genommen werden können.

V. Schlußbetrachtungen

Zusammenfassend darf nochmals betont werden, daß es sich bei der hier entwickelten Methode zur Häufigkeitsanalyse um ein Versuchsverfahren handelt, das auf rechnerischem Wege (durch Verwenden der Gauß'schen Normalverteilung) eine Häufigkeitsverteilung, die aus mehreren Normalverteilungen besteht, eindeutig aufspaltet. Nach den hier gegebenen Rechenvorschriften läßt sich dabei auch — im Gegensatz zu der graphischen Methode — von verschiedenen Bearbeitern dasselbe Resultat erzielen. Die Grenzen der Auflösbarkeit liegen dort, wo sich die Gauß'schen Normalverteilungen nicht mehr voneinander trennen lassen, da sie zu stark überlagert sind (Vergleich mit Periodogrammanalyse). Das hier entwickelte Verfahren liefert aber Ergebnisse, die sich durchaus mit den meteorologischen Erfahrungen decken und ist daher für meteorologische Untersuchungen der Parabelmethode vorzuziehen.

Auf Grund der hier entwickelten Gaußkurvenmethode können in Zukunft eindeutige und vergleichbare Häufigkeitsanalysen an meteorologischen Verteilungen durchgeführt werden. Die sich hieraus ergebenden Anwendungsmöglichkeiten für die Klimatologie sind sehr vielgestaltet. Möglicherweise führt diese Darstellungsweise zu neuartigen Rückschlüssen auf die meteorologischen Zusammenhänge. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Diskussion dieser Möglichkeit liefern. Es darf aber nicht unerwähnt bleiben, daß das hier gegebene Verfahren — ebenso wie die Periodogrammanalyse — nur eine formale Rechenvorschrift liefert, wobei die Frage nach dem physikalischen Sinn der Ergebnisse offen bleibt.

Literatur

- 1) Daeves-Beckel: Großzahl-Forschung und Häufigkeitsanalyse. Weinheim/Bergstr. u. Berlin (1948).
- 2) Dixon, W. I. und Massey, F. J. jr.: Introduction to statistical analysis. New York - Toronto - London.
- 3) Doetsch, G.: Zerlegung einer Funktion in Gauß'sche Fehlerkurven. Z. Phys. 49, 708 (1928).
- 4) Essenwanger, O.: Beiträge zur Statistik mittellanger Luftdruckwellen in Mitteleuropa. Ber. Dt. Wetterd. US-Zone Nr. 20 (1951).
- 5) Essenwanger, O.: Statistische Untersuchungen über die Zirkulation der Westdrift in 55 Grad Breite. Ber. Dt. Wetterd. Nr. 7 (1953).
- 6) Essenwanger, O.: Die Berechnung einer Gauß'schen Normalverteilung als Minimumbedingung. (Manuskript).
- 7) Faust, H.: Warum gibt es mehr Tiefdruckgebiete als Hochdruckgebiete? (Im Druck).
- 8) Fisher, R. A.: Statistical methods for research workers. Edinburgh - London (1950).
- 9) Guß, H.: Zur Struktur von Häufigkeitsverteilungen und Bildung von Mittel- und Schwankungswerten der Sichtweite. Ann. Meteor. 4, 27 (1951).
- 10) Hofmann, A.: Referat über Daeves und Beckel, Großzahl-Forschung und Häufigkeitsanalyse. Meteor. Rdsch. 2, 306 (1949).
- 11) Hofmann, A. und Geiß, A.: Luftkörperkalender für Potsdam, Karlsruhe, Freiburg und Wien 1881-1940. Bad Homburg v. d. H. (o. J.).
- 12) Knoch, K.: Weltklimatologie und Heimatklimakunde. Meteor. Z. 59, 245 (1942).
- 13) Mises, R. v.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theor. Physik. New York (1945).
- 14) Pearson, K. and Lee, A.: On the distribution of frequency (variation and correlation) of the barometric height at divers stations. Phil. Transact. Roy. Soc. London. A, 190 (1898).
- 15) Pollak, L. W.: Charakteristiken der Luftdruckfrequenzkurven und verallgemeinerte Isobaren in Europa. Prager Geophys. Studien 1, 44 (1927).
- 16) Schneider-Carius, K. und Huttary, J.: Darstellung täglicher Niederschlagswahrscheinlichkeiten am Beispiel von Bremen, Berlin, Bamberg, Karlsruhe und München. Ber. Dt. Wetterd. US-Zone Nr. 38 156 (1952).
- 17) Stumpff, K.: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin (1939).
- 18) Schmauß, A.: Scheitelwerte des Luftdruckes. Dt. Meteor. Jb. Bayern 1925, Anh. F.
- 19) Schwerdtfeger, W.: Ein Beitrag zur Frage der Existenz der Hauptluftmassen. Meteor. Rdsch. 1, 2 (1947).

