Berichte

des

Deutschen Wetterdienstes

Nr. 14

(Band 2)

DK 518:551.509.312

Charakteristikenverfahren in der numerischen Wettervorhersage

von

Karl Hinkelmann und Rudolf Schwarzenberger*

(mit 24 Abbildungen im Text)

* Die vorliegende Arbeit wurde unterstützt aus Mitteln des Deutschen Wetterdienstes und des Air Research and Development Command auf Grund eines zwischen dem European Office ARDC und Prof. Dr. H. Flohn abgeschlossenen Kontrakts AF 61 (524)—434.

Bad Kissingen, 1954

Inhalt

Anschriften der Verfasser:

K. Hinkelmann, Frankfurt a. M., Bockenheimer Landstr. 42
R. Schwarzenberger, Würzburg, Rückertstr. 4

Zusammenfassung

Im Teil I wird der Begriff der charakteristischen Mannigfaltigkeiten erklärt und ihre Verwendung für die Lösung von Systemen partieller Differentialgleichungen (Charakteristikenverfahren) auseinandergesetzt. Über die in der Literatur bereits behandelten Verfahren hinaus wird besonders auf höherdimensionale Probleme sowie auf das bei meteorologischen Fragestellungen häufig auftretende charakteristische Anfangswertproblem eingegangen. Im Teil II werden Anwendungen auf spezielle, beim meteorologischen Prognoseproblem auftretende Systeme gegeben.

Einleitung

Da Ausbreitungs- und Ausgleichsvorgänge stets durch hyperbolische bzw. parabolische partielle Differentialgleichungen oder durch Systeme von solchen beschrieben werden, wird man auch beim Problem der numerischen Wettervorhersage auf derartige Gleichungen geführt.

Bei partiellen Differentialgleichungen spielt der Begriff der charakteristischen Mannigfaltigkeiten eine entscheidende Rolle. Mit seiner Hilfe läßt sich in vielen Fällen die Frage nach Abhängigkeits-, Einfluß- und Fortsetzungsgebieten bzw. nach Bestimmtheit und Bestimmung der Lösungen durch Anfangs- und Randwerte beantworten. Die erfolgreiche Verwendung sogenannter Charakteristikenverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen der Hydrodynamik legt auch die Frage nach ihrer Verwendbarkeit für die Differentialgleichungen der Meteorologie nahe.

Man bezeichnet als Charakteristikenverfahren alle auf dem Charakteristikenbegriff beruhenden numerischen oder graphischen Integrationsmethoden. Nachdem eine solche zuerst von Massau[1]) für 2 unabhängige Veränderliche angegeben worden war, wurden in der Folgezeit seit 1929 auf dem Gebiet der Hydrodynamik eine Reihe von Verfahren, die jeweils auf spezielle zweidimensionale Problemstellungen zugeschnitten waren, veröffentlicht und zuletzt in einem zusammenfassenden Bericht von Oswatitsch[2]) dargestellt. Eine noch allgemeinere Darstellung gaben — ebenfalls für 2 unabhängige Veränderliche — Courant und Friedrichs[3]). Den Fall von 3 unabhängigen Veränderlichen behandelte z. B. Sauer[4]), jedoch ist in dem von ihm zuerst vorgeschlagenen Verfahren die Konvergenz gegen die Lösung nicht unbedingt gesichert. Weitergehende Verfahren — also für 4 unabhängige Veränderliche — scheinen bisher nicht vorzuliegen.

Der Vorteil von Charakteristikenverfahren gegenüber den üblichen Differenzenverfahren besteht darin, daß genau das Eindeutigkeits- oder Fortsetzungsgebiet vollständig mit Lösungswerten bedeckt wird und daß sich, abgesehen von Ausnahmefällen, eine natürliche, dem Problem angepaßte Schrittweite von selbst ergibt.

Die bei meteorologischen Prognoseproblemen auftretenden hyperbolischen (bzw. parabolischen) Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssysteme sind in der Regel quasilinear, weshalb im folgenden auf allgemeinere Gleichungen nicht eingegangen werden soll. Die meteorologischen Gleichungen unterscheiden sich jedoch von denen, für die bisher Charakteristikenverfahren ausgearbeitet worden sind, dadurch, daß im allgemeinen 4 unabhängige Variable, nämlich 3 Raumkoordinaten und 1 Zeitkoordinate, und je nach der Reduktionsmöglichkeit 1—5 abhängige Variable auftreten.

Die bekannten Verfahren sollen deshalb im folgenden von verschiedenen Beschränkungen befreit und damit auf meteorologische Probleme anwendbar gemacht werden. Sie liefern dann Näherungslösungen für die Werte der gesuchten Funktionen in Gitterpunkten des Raumzeitkontinuums soweit, als diese durch die gegebenen Anfangs- und Randwerte überhaupt bestimmbar sind, und lassen gleichzeitig die Anzahl der vorzugebenden Anfangs- und Randbedingungen auch im Falle mehrwertiger charakteristischer Mannigfaltigkeiten — charakteristisches Anfangswertproblem — erkennen, welchen man bei meteorologischen Problemstellungen fast ausschließlich begegnet.

Im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher gewinnt man Aussagen, die den Gegenstand mathematisch in voller Strenge auf anderem Wege bewiesener Existenz- und Eindeutigkeitssätze bilden und in voller Übereinstimmung mit diesen sind[5]). Der höherdimensionale Fall wird meist auf eine zweidimensionale Charakteristikenkonstruktion zurückgeführt, auf die deshalb besonders eingegangen wird.

Die in den zitierten Veröffentlichungen behandelten Grundlagen des Charakteristikenverfahrens werden im folgenden theoretischen Teil kurz wiederholt, da der meteorologische Leser im allgemeinen mit der Problemstellung weniger vertraut sein dürfte.

I. Theoretische Grundlagen

Partielle Differentialgleichungen treten überwiegend in 2 Formen auf: Einmal als Einzeldifferentialgleichungen höherer Ordnung — diese ist bestimmt durch die höchsten vorkommenden Ableitungen — für eine gesuchte Funktion (Beispiel: Laplace'sche Potentialgleichung) und zum anderen als Systeme von Gleichungen 1. Ordnung für mehrere gesuchte Funktionen (z. B. Euler'sche Differentialgleichungen der Hydrodynamik). Einzeldifferentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich stets auf ein System 1. Ordnung zurückführen, aber nicht umgekehrt. Für die Theorie ist die Behandlung von Systemen meist bequemer; die Ergebnisse sind dann unmittelbar auf Einzeldifferentialgleichungen höherer Ordnung übertragbar. Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf die Behandlung von Systemen.

Man gewinnt einen natürlichen Zugang zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, wenn man die Frage nach der sogenannten allgemeinen Lösung beiseite stellt und untersucht, wie und inwieweit sich aus den vorgegebenen Anfangs- bzw. Randwerten eine Lösung des gestellten Problems unter Zuhilfenahme der Differentialgleichung schrittweise gewinnen läßt. Zur Erleichterung des Verständnisses beginnen wir mit der bekannten Theorie für 2 unabhängige Veränderliche.

A. Systeme mit 2 unabhängigen Variablen

1. Charakteristikenverfahren für ein System von 3 Gleichungen für 3 unbekannte Funktionen

Die 3 gesuchten Funktionen seien mit u^k ($k = 1,2,3$), die 2 unabhängigen Variablen mit x_i ($i = 1,2$) bezeichnet. (a^i_{jk}) sei die Matrix der Koeffizienten des aus 3 ($j = 1,2,3$) Gleichungen bestehenden, also bestimmten Systems. Da wir nur quasilineare Systeme betrachten, dürfen die a^i_{jk} sowohl von den x_i als auch von den u^k, nicht aber von den Ableitungen der u^k abhängen. Das gleiche gilt für die inhomogenen Terme des Gleichungssystems, die mit g_j bezeichnet werden mögen.

Gegeben sei also das folgende System I. Ordnung:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a^i_{jk}u^k_i = a^1_{j1}u^1_1 + a^2_{j1}u^1_2 + a^1_{j2}u^2_1 + a^2_{j2}u^2_2 + a^1_{j3}u^3_1 + a^2_{j3}u^3_2 = g_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Darin bedeutet wie üblich $u^k_i = \frac{\partial u^k}{\partial x_i}$.

Zur Abkürzung empfiehlt sich die Verwendung der in der Tensorrechnung üblichen Vorschrift, daß über die in Produkten doppelt auftretenden Indices zu summieren ist. Wir schreiben deshalb statt (1), indem wir die Summenzeichen fortlassen, kurz:

$$a^i_{jk}u^k_i = g_j, \quad i = 1,2, \quad k = 1,2,3, \quad j = 1,2,3.$$

Gegeben sei weiter eine Anfangskurve $\mathfrak{B}$ in der Form $\varphi(x_1, x_2) = 0$, auf welcher die Anfangswerte der u^k, etwa als Funktion von x_1 oder eines passend gewählten Parameters, vorgegeben seien.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, neue unabhängige Variable ξ_1, ξ_2; $\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0$, einzuführen mit der Bedingung, daß die Kurve $\xi_2 = 0$ mit der Anfangskurve $\mathfrak{B}$, also mit $\varphi = 0$ zusammenfällt (Fig. 1).

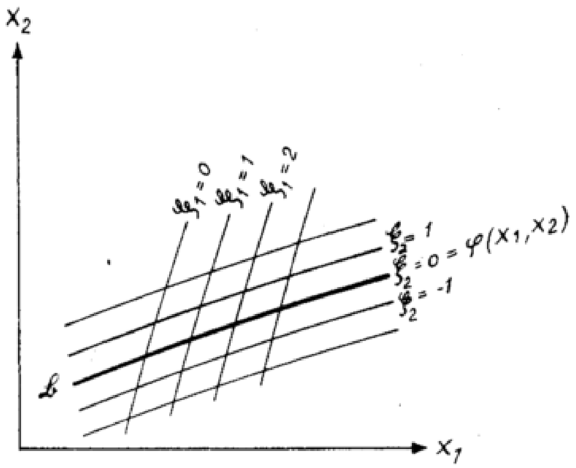

Fig. 1

Mit der Vorgabe der Werteverteilung u^k auf der Kurve $\mathfrak{B}$ sind dann auch die tangentialen Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_1}$ entlang $\varphi = 0$*), die als innere Ableitungen bezeichnet werden, bekannt.

Wir fragen zunächst: Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, um mit Hilfe des Differentialgleichungssystems (1) und unter Verwendung der Kenntnis der Verteilung der u^k auf $\mathfrak{B}$ die Verteilung der u^k auf einer der Kurve $\mathfrak{B}$ unmittelbar benachbarten Kurve zu bestimmen? Die Frage ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Berechnungsmöglichkeit der aus der Kurve herausführenden Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_2}$. Es versteht sich von selbst, daß wir aus der inneren Ableitung und der herausführenden Ableitung $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_2}$ jede herausführende Ableitung von u^k linear zusammensetzen können.

Die Einführung der neuen Parameter $\xi_{1,2}$ ergibt zunächst für

$$u^k_i = \frac{\partial u^k}{\partial x_i} = \frac{\partial u^k}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u^k}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_i}.$$

Eingesetzt in Gleichung (1) erhält man:

$$(2) \quad \left(a^i_{jk}\frac{\partial \xi_2}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u^k}{\partial \xi_2} = g_j - \left(a^i_{jk}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u^k}{\partial \xi_1}.$$

Die aus $\mathfrak{B}$ herausführenden Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_2}$ bzw. $\frac{\partial u^k}{\partial \varphi}$, die in diesem algebraischen System als Unbekannte auftreten, sind dann jedenfalls eindeutig bestimmbar, wenn die Determinante des Gleichungssystems

$$(3) \quad D(\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}) = |a^i_{jk}\varphi_i| = |a^1_{jk}\varphi_{x_1} + a^2_{jk}\varphi_{x_2}| \neq 0.$$

(3) stellt eine Bedingung an die Anfangskurve $\mathfrak{B}$ u n d an die auf ihr vorgegebenen Funktionswerte u^k dar, die ja in den a^i_{jk} vorkommen dürfen. Es ergibt sich also folgende Alternative: entweder ist $D \neq 0$, dann sind die aus $\mathfrak{B}$ herausführenden Ableitungen eindeutig bestimmbar, oder es ist $D = 0$, dann nennt man die Anfangskurve bezüglich der auf ihr vorgegebenen Anfangswerte u^k charakteristisch oder charakteristische Grundkurve*), und dann ist die Bestimmung der herausführenden Ableitungen nur — aber nicht mehr eindeutig — möglich, wenn auch die rechten Seiten des Systems (2) sogenannten Verträglichkeitsbedingungen genügen. Diese ergeben sich daraus, daß sich der Rang der Koeffizientenmatrix durch Hinzunahme der aus den rechten Seiten von (2) gebildeten Spalte nicht erhöhen darf; ihre Anzahl ist gleich der Erniedrigung des Ranges der Koeffizientenmatrix beim Einsetzen charakteristischer φ_i, ihr Ausdruck das Verschwinden gewisser Linearkombinationen der rechten Seiten**). Im Falle der Erniedrigung des Ranges um 1 ergibt sich die Verträglichkeitsbedingung dadurch, daß in (3) eine der 3 Spalten resp. durch $g_j - a^i_{jk}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}\frac{\partial u^k}{\partial \xi_1}$ ersetzt wird. Wegen des Bestehens von $D = 0$ führen die 3 möglichen Determinanten dann, sofern die stehengebliebenen Spalten linear unabhängig sind, auf die gleiche Verträglichkeitsbedingung. Im Falle, daß $\mathfrak{B}$ eine charakteristische Grundkurve ist, liefert das Differentialgleichungssystem (1) in Form der Verträglichkeitsbedingungen lediglich Bedingungsgleichungen für die auf $\mathfrak{B}$ vorgegebenen u^k-Werte, die erfüllt sein müssen, wenn überhaupt eine Lösung existieren soll, jedoch nicht die herausführenden Ableitungen der u^k.

---

*) Ist $\xi_1 \equiv x_1$, so schreiben wir im Anschluß an S a u e r für die innere Ableitung auch $\frac{\delta u_k}{\delta x_1}$

*) Die Bedingung (3) kann also auf zweierlei Weise benutzt werden: a) zur Kontrolle, ob die Anfangsmannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ in der Form $\varphi(x_1, x_2) = 0$ charakteristisch ist oder nicht, indem man die φ_i berechnet, in (3) einführt und feststellt, ob D verschwindet oder nicht. b) zur Bestimmung der charakteristischen Grundmannigfaltigkeiten, indem man die Bedingung (3) in der Form

$$D(\xi_{2x_1}, \xi_{2x_2}) = |a^i_{jk}\xi_{2i}| = 0$$

benutzt, um die charakteristischen Grundkurven $\xi_2(x_1, x_2) = \text{const}$, die diese Bedingungen erfüllen, zu berechnen. Im allgemeinen genügt es, deren Tangentenrichtungen zu bestimmen, also das Verhältnis

$$\xi_{2x_1} : \xi_{2x_2} = \frac{dx_2}{dx_1}.$$

Im vorliegenden Falle führt dies auf die Auflösung cubischer Gleichungen. Man nennt diese einem festen Punkt x_{10}, x_{20} zugeordneten Richtungen charakteristische Richtungen.

**) s. C. Verträglichkeitsbedingungen.

Die Charakteristikentheorie liefert allgemein: jedem System oder jeder partiellen Differentialgleichung kann man eine der Bedingung (3) entsprechende, für eine feste Stelle der x_i gültige homogene Form $D(x'_1,x'_2)$ zuordnen (x'_1,x'_2 laufende Variable der Form), die für die betreffende Stelle x_i Auskunft gibt über den Typ der Differentialgleichung oder des Systems und über die Orientierung der charakteristischen Mannigfaltigkeiten, die ihrerseits wieder das Eindeutigkeits- oder Fortsetzungsgebiet, das Einflußgebiet und das Abhängigkeitsgebiet festlegen*).

Die Form D ist dem Differentialgleichungssystem in einer gegen Koordinatentransformationen invarianten Weise zugeordnet.

a) **Das nichtcharakteristische Anfangswertproblem**

Ist $D \neq 0$, so lassen sich die u^k und damit alle aus $\mathfrak{B}$ herausführenden Ableitungen eindeutig bestimmen. Man ist also im Besitz der linearen Glieder der T a y l o r - Entwicklung der Funktionen u^k. Ebenso lassen sich bei $D \neq 0$ auch höhere herausführende Ableitungen — je nach den Differenzierbarkeitseigenschaften der Anfangswerte — berechnen.

Man könnte mit diesen etwa Näherungswerte der gesuchten Funktionen u^k auf den Nachbarkurven von $\mathfrak{B}$ vermittels

$$(4) \qquad u^k(\xi_2=\varepsilon,\xi_1) = u^k(0,\xi_1) + \frac{\partial u^k}{\partial \xi_2}(0,\xi_1)\,\varepsilon + \frac{\partial^2 u^k}{\partial \xi_2^2}(0,\xi_1)\,\varepsilon^2 + \dots$$

bestimmen und so von Kurve zu Kurve fortschreitend die gesamte Ebene (x_1, x_2) mit Funktionswerten u^k belegen. A priori läßt sich hierbei über die Schrittweite ε keine Aussage machen. Es ist selbstverständlich, daß ε nicht beliebig groß gewählt werden darf, andererseits wird bei unnötig klein angenommenem ε ein vermeidbarer Rechenaufwand erforderlich.

Im allgemeinen werden die Anfangswerte nur in diskreten Punkten der Anfangsmannigfaltigkeit bekannt und die Lösungen u^k nur in diskreten Punkten gesucht sein. Man wird deshalb das vorgelegte System von Differentialgleichungen durch entsprechende Differenzengleichungen ersetzen. Das hierbei benutzte Verhältnis der Maschenweiten ist nicht willkürlich, da theoretische Überlegungen zeigen, daß gewisse Vorsichtsmaßregeln (Stabilitätsbedingungen) eingehalten werden müssen, wenn die auf diese Weise gewonnenen Funktionswerte u^k überhaupt noch als Näherungswerte der tatsächlichen Lösung des Problems angesehen werden sollen.

Wie C o u r a n t, F r i e d r i c h s und L e w y[7]) nachgewiesen haben, ist zur Konvergenz des **Differenzen**verfahrens erforderlich, daß ε eine gewisse Ungleichung zu erfüllen hat, die darin besteht, daß das aus der Anfangsmannigfaltigkeit herausführende Inkrement nicht über das entsprechende Fortsetzungsgebiet der Differentialgleichung herausragt, eine Vorschrift, die bei dem nachfolgend beschriebenen Charakteristikenverfahren automatisch erfüllt wird.

Wir wollen jetzt das Charakteristikenverfahren vorerst für nur 2 abhängige Variable u^k ($k = 1,2$) erläutern:

Die nunmehr quadratische homogene Form $D \equiv |a^i_{jk}\,\xi_{2i}|$; $i,j,k = 1,2$, die, gleich Null gesetzt, die Charakteristikenbedingung ergibt, legt für jeden Punkt der Kurve $\mathfrak{B}$ 2 charakteristische Richtungen fest, die wir mit $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bezeichnen wollen: Sind diese Richtungen reell und verschieden, so heißt das System hyperbolisch; fallen sie zusammen, bzw. sind sie komplex, so heißt das System parabolisch bzw. elliptisch. Der Definitheits- bzw. Indefinitheitscharakter der Form D ist dabei ein eindeutiges Kriterium für den Typ der Differentialgleichungen in der Weise, daß definite Formen elliptischen, indefinite hyperbolischen und ausgeartete Formen parabolischen Differentialgleichungen zugeordnet sind.

Das Verfahren erweist sich hier nur im hyperbolischen Fall als durchführbar. Zur Berechnung der Funktionswerte u^k in unmittelbarer Umgebung der Kurve $\mathfrak{B}$ tragen wir (Fig. 2) auf dieser eine Anzahl von Gitterpunkten A_1, A_2, A_3 ... auf, deren gegenseitiger Abstand so klein gehalten werde, daß eine lineare Interpolation der u^k-Werte zwischen den Punkten zulässig ist; der Abstand wird also wesentlich von der vorgegebenen Verteilung der u^k, speziell von den 2. inneren Ableitungen, abhängen.

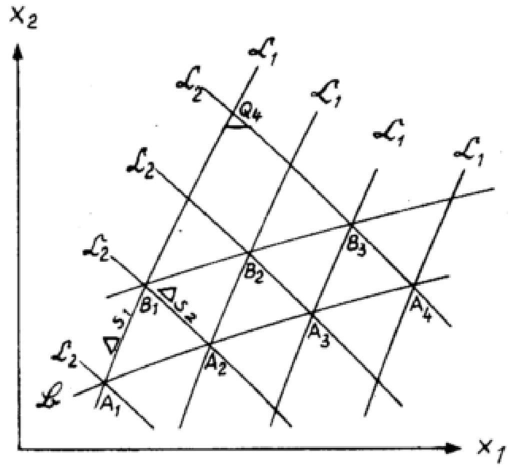

Fig. 2

Durch jeden Punkt denken wir uns die beiden Tangenten an die charakteristischen Richtungen gezogen. Im hyperbolischen Falle schneiden sich die von $\mathfrak{B}$ ausgehenden beiden Scharen. Die leicht berechenbaren Schnittpunkte seien mit B_1, B_2, B_3 .... bezeichnet. Nun identifizieren wir in erster Näherung die Tangenten in der Umgebung von $\mathfrak{B}$ mit den charakteristischen Grundkurven.

Längs der Charakteristiken, z. B. längs A_1B_1 und längs A_2B_1, muß die Verträglichkeitsbedingung erfüllt sein, die eine lineare Beziehung vermittelt zwischen den Ableitungen der u^k längs der Charakteristiken, also zwischen den $\frac{\partial u^k}{\partial s_1}$ bzw. den $\frac{\partial u^k}{\partial s_2}$, und den Funktionswerten auf der Charakteristik, wobei $\frac{\partial u^k}{\partial s}$ die Änderung der Variablen u^k mit der Bogenlänge auf einer Charakteristik kennzeichnet.

Wegen der Voraussetzung über den hinreichend kleinen Abstand der Punkte A_1, A_2 .... auf $\mathfrak{B}$ können wir weiterhin annehmen, daß auch die herausführenden Differentialquotienten in den Punkten A_1, A_2 .... durch Differenzenquotienten ersetzt werden können, so daß in A_1 bzw. A_2

$$\frac{\partial u^k}{\partial s_1} \text{ durch } \frac{u^k(B_1) - u^k(A_1)}{\triangle s_1} \text{ und } \frac{\partial u^k}{\partial s_2} \text{ durch } \frac{u^k(B_1) - u^k(A_2)}{\triangle s_2}$$

angenähert werden kann. Wir haben also genau 2 lineare Gleichungen zur Verfügung, die die beiden unbekannten Funktionswerte u^k (u^1 und u^2) im Punkte B_1 zu berechnen gestatten. Analoges gilt für die Punkte B_2, B_3 ...., so daß durch dieses Verfahren die u^k-Werte in den Punkten B_i auf einer zu $\mathfrak{B}$ benachbarten Kurve erhalten werden.

Aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen[8]) ist andererseits bekannt, daß das zu A_1A_2

*) siehe [6]) und vorliegende Arbeit S. 6/7.

gehörige Fortsetzungsgebiet, das ist das Gebiet, in dem auf Grund der vorgegebenen Verteilung der u^k in dem begrenzten Stück A_1A_2 der Kurve $\mathfrak{B}$ überhaupt eine eindeutige Lösung existiert, festgelegt ist durch das Dreieck, das durch A_1A_2 sowie die beiden durch A_1, A_2 gehenden „inneren" Charakteristiken (Fig. 3) begrenzt wird.

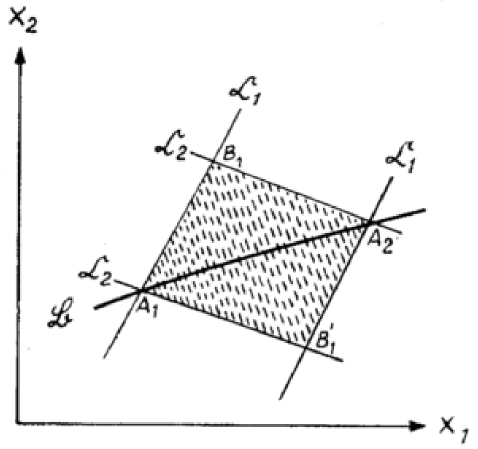

Fig. 3

Im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Differenzenverfahren bietet die Charakteristikenmethode also die Gewähr, daß die Funktionswerte nur innerhalb des Bestimmtheitsbereiches erhalten werden, dieser aber auch vollständig mit Funktionswerten bedeckt wird.

Typisch für Charakteristikenverfahren ist, daß diese zwar mit der Frage nach der Berechenbarkeit der aus der Anfangsmannigfaltigkeit herausführenden Ableitungen beginnen, diese Berechnung aber tatsächlich nicht durchführen, sondern sie durch eine direkte Berechnung der Funktionswerte u^k an neuen benachbarten Gitterpunkten (= Schnittpunkte von Charakteristiken) vermöge der mit dieser Frage gewonnenen Verträglichkeitsbedingungen ersetzen.

Bei einem bestimmten System mit 3 abhängigen Variablen ist die homogene Form $D\,(x_1', x_2')$ — vergl. (3) — von III. Ordnung, so daß für jeden Punkt der x_1, x_2-Ebene 3 Charakteristikenrichtungen angegeben werden können, von denen wir vorerst annehmen wollen, daß sie reell und verschieden sind.

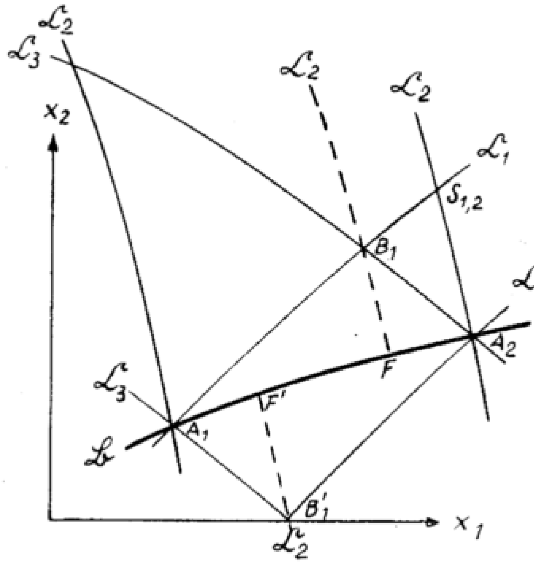

Fig. 4

Fallen mehrere Charakteristikenrichtungen zusammen, so sprechen wir von einer mehrfach charakteristischen Richtung und entsprechend von einer mehrfach charakteristischen Kurve.

Die oben als verschieden vorausgesetzten charakteristischen Richtungen mögen resp. den Scharen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ der Grundkurven angehören. Demzufolge lassen sich auch 3 längs $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ geltende Verträglichkeitsbedingungen angeben:

Man betrachte in Fig. 4 etwa die beiden Punkte A_1 und A_2 mit den 3 zugehörigen Charakteristiken. Die Verträglichkeitsbedingungen liefern, immer unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ nicht charakteristisch ist, jeweils nur 2 lineare Gleichungen zur Bestimmung der 3 unbekannten Funktionswerte u^k in den Schnittpunkten $S_{1,2}$, $S_{2,3}$ (letzterer in der Figur links oben) und B_1. Man gelangt jedoch im Punkte B_1 zu einer 3. Gleichung, wenn man einen Zwischenpunkt F auf A_1A_2 derart bestimmt, daß seine charakteristische Richtung durch B_1 hindurchgeht — gestrichelte Linie —. Den Fußpunkt F findet man in 1. Näherung dadurch, daß man zwischen den Charakteristiken $\mathfrak{C}_2$ im Punkte A_1 und $\mathfrak{C}_2$ im Punkte A_2 interpoliert. Durch Iteration kann man nach Vorliegen einer 1. Lösung für die Funktionswerte in B_1 den Fußpunkt F und die Charakteristikenrichtung beliebig genau ermitteln. Durch bloße Abzählung kann man zeigen, daß B_1 tatsächlich der einzige Punkt der Konfiguration ist, für den man eine ausreichende Anzahl von Gleichungen beschaffen und damit die abhängigen Veränderlichen u^k berechnen kann.

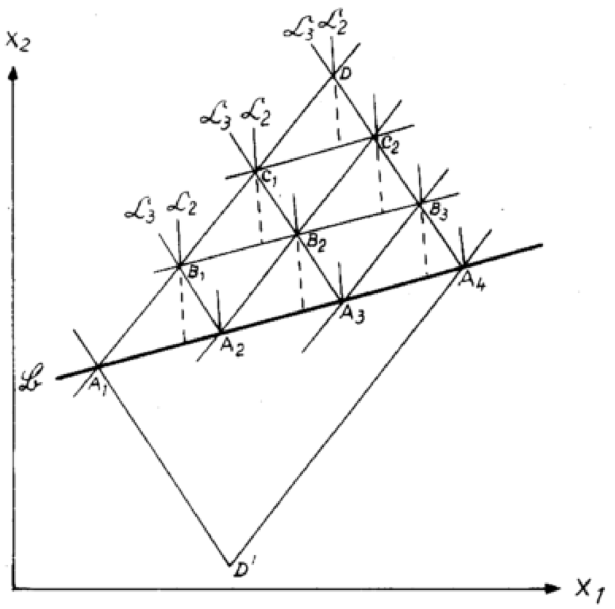

Fig. 5

Die analoge Wiederholung der Konstruktion in den Punkten B_2, B_3 .... (Fig. 5) ergibt: Das Fortsetzungsgebiet der Lösung ist gegeben durch das kleinste Dreieck, dessen Seiten gebildet werden von den Charakteristiken, die durch die Endpunkte des Anfangskurvenstücks $\mathfrak{B}$ gehen. In Fig. 5 ist das zu A_1A_4 gehörige Fortsetzungsgebiet das Dreieck A_1A_4D bzw. A_1A_4D'.

Umgekehrt ist das Kurvenstück A_1A_4 das zu den Punkten D und D' gehörige Abhängigkeitsgebiet auf $\mathfrak{B}$ (Fig. 6).

Den Bereich, der durch die äußeren, durch die Punkte A_1, A_4 hindurchgehenden Charakteristiken aus der x_1, x_2-Ebene herausgeschnitten wird, nennt man das Einflußgebiet, da alle innerhalb dieses Be-

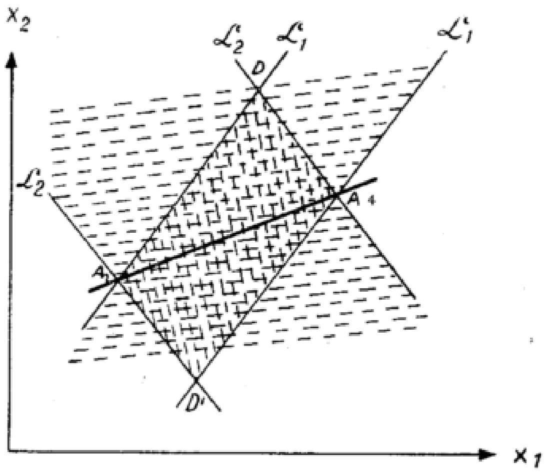

Fig. 6

reiches liegenden u^k-Werte durch die Werteverteilung auf $\mathfrak{B}$ innerhalb A_1A_4 beeinflußt werden.

b) **Das charakteristische Anfangswertproblem**

Ist die Anfangskurve $\mathfrak{B}$ charakteristisch, dann sind wir weder in der Lage, die abhängigen Variablen u^k $(k = 1,2,3)$ auf dieser willkürlich vorzugeben, da die Differentialgleichungen das Bestehen einer Verträglichkeitsbedingung zwischen den u^k und deren Ableitungen in $\mathfrak{B}$ vorschreiben, noch sind wir in der Lage, die Verteilung der u^k auf den Nachbarkurven eindeutig zu berechnen, solange nicht zusätzliche Angaben hinzutreten.

Wir wollen im folgenden die Annahme machen, daß die u^k auf der als einfach charakteristisch angenommenen Anfangskurve $\mathfrak{B}$ bekannt sind und die entsprechende Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist (Fig. 7).

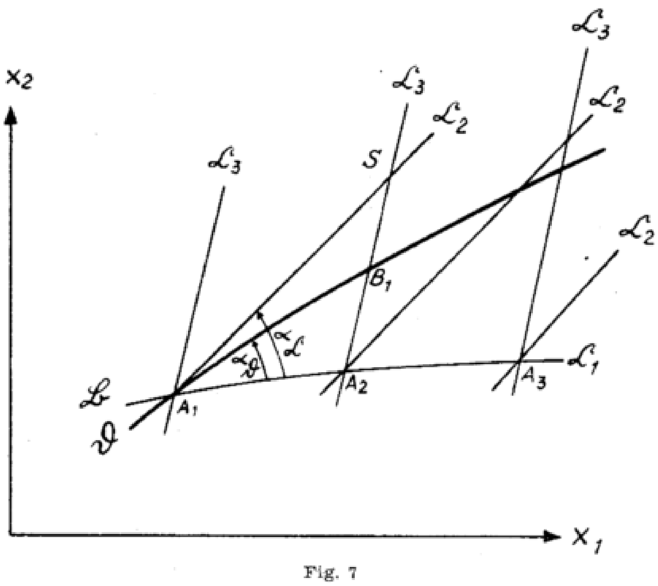

Fig. 7

Die Verträglichkeitsbedingungen längs A_1S und A_2S liefern 2 Gleichungen für die 3 Unbekannten u^k im Schnittpunkt S. Bei dem so gestellten Problem ist die 3. noch erforderliche Beziehung für die u^k auf keine Weise zu beschaffen. Man erhält deshalb eine einparametrige Schar von Lösungen, worin sich die Eigenschaft der Charakterstiken — $\mathfrak{B}$ ist voraussetzungsgemäß charakteristisch — Verzweigungslinien der Lösungen zu sein, zeigt.

Das Problem wird jedoch sofort eindeutig, wenn man z. B. das Bestehen einer Relation in den u^k längs einer Kurve $\mathfrak{D}$ vorgibt, die durch A_1 hindurchgehen möge und an jeder Stelle die Bedingung erfüllt, daß

$$\alpha_{\mathfrak{D}} \leqq \alpha_{\mathfrak{C}} .$$

$\alpha_{\mathfrak{D}}$ ist der Neigungswinkel der Kurve $\mathfrak{D}$ und $\alpha_{\mathfrak{C}}$ der Neigungswinkel der auf $\mathfrak{B}$ folgenden Charakteristik — hier $\mathfrak{C}_2$ — gegenüber der Anfangskurve. Für das konstruktive Vorgehen zur Ermittlung einer Lösung lassen sich mehrere Vorschläge angeben; zweckmäßig erscheint der folgende:

Man berechnet in den Punkten A_1, A_2 . . . . die charakteristischen Richtungen. S sei die Spitze des über A_1A_2 entstehenden Charakteristikendreiecks, B_1 der Schnittpunkt von A_2S mit $\mathfrak{D}$ (Fig. 7). Man interpoliert die in B_1 anzubringende charakteristische Richtung vorläufig aus den Richtungen in A_1 und A_2, verlängert sie und bringt sie mit der Kurve $\mathfrak{B}$ in F zum Schnitt (Fig. 8). Die Lage des Punktes F kann wieder durch Iteration so verbessert werden, daß die in F eindeutig berechenbare charakteristische Richtung exakt durch B_1 hindurchgeht.

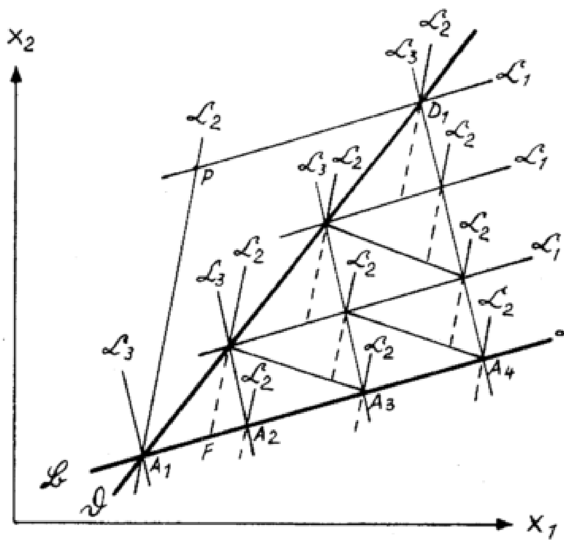

Fig. 8

Zur Berechnung der Funktionswerte u^k in B_1 hat man nun wiederum 3 Gleichungen zur Verfügung: die vorgegebene Relation längs $\mathfrak{D}$, 2 Verträglichkeitsbedingungen, nämlich je eine längs FB_1 und längs A_2B_1. Die in den Verträglichkeitsbedingungen auftretenden Funktionswerte u^k sowie Koeffizienten und inhomogene Terme müssen gegebenenfalls aus den Werten in A_1, A_2 interpoliert werden, falls die Anfangswerte nur in den diskreten Punkten A_1, A_2 . . . . bekannt sind. Am bequemsten ist die Rechnung natürlich, wenn die längs $\mathfrak{D}$ vorgegebene Relation in den u^k ebenfalls linear ist, was bei meteorologischen Problemstellungen im allgemeinen zutrifft. Die Verbindungslinie B_1A_3 ist nun nichtcharakteristisch. Von ihr ausgehend gewinnt man nach dem in a) beschriebenen Verfahren die Funktionswerte in B_2, von B_2A_4 ausgehend die in B_3 und so fort, also schließlich die Funktionswerte in B_1, B_2 . . . . auf der durch B_1 gehenden Nachbarcharakteristik zu $\mathfrak{B}$. Auf die gleiche Weise folgt die Berechnung der u^k auf der nächsten durch C_1 gehenden parallelen Charakteristik. Die Konstruktion zeigt, daß bei Vorgabe einer Relation auf $\mathfrak{D}$ und der Anfangswerte u^k auf $\mathfrak{B}$ etwa auf dem Kurvenstück A_1A_4 die Lösung im Bereich $A_1A_4D_1$ eindeutig bestimmt ist und darüber hinaus auch gemäß a) in A_1D_1P, da A_1D_1 nicht charakteristisch ist. Ein entsprechendes Verfahren läßt sich anwenden, wenn längs $\mathfrak{D}$ eine (echte) quasilineare Differentialrelation in den u_i^k vorgeschrieben ist, die in gleicher Weise wie eine Verträglichkeitsbedingung auf innere Ableitungen $\frac{\delta u^k}{\delta x_i}$ umgeschrieben werden kann. Wie man leicht einsieht, wird dadurch lediglich der 1. Schritt des Verfahrens modifiziert und erschwert. Das Verfahren ist auch anwendbar, falls $\mathfrak{D}$ mit der auf $\mathfrak{B}$ folgenden Charakteristik zusammenfällt, also $\alpha_{\mathfrak{D}} = \alpha_{\mathfrak{C}}$ ist.

c) **Zweiwertiges charakteristisches Anfangswertproblem**

Ist die Anfangskurve zweifach charakteristisch, so sind zwei weitere Relationen auf Randkurven vorzugeben. Im Falle, daß die beiden Relationen auf der gleichen Randkurve gegeben sind, vollzieht sich die Lösungskonstruktion völlig analog dem unter b) beschriebenen Charakteristikenverfahren. Gegeben seien u^k ($k = 1,2,3$) auf der zweifachen Anfangscharakteristik, z. B. zwischen A_0 und A_4, die Verträglichkeitsbedingungen seien erfüllt (Fig. 9). Weiterhin seien zwei Relationen bzw. Differentialrelationen in den u^k auf einer die Kurve $\mathfrak{B}$ schneidenden Kurve zwischen A_0 und D vorgegeben. Zur Berechnung der u^k-Werte im Punkte B_1 stehen die Verträglichkeitsbedingung zwischen A_1, B_1 sowie die beiden Relationen auf $\mathfrak{D}$ zwischen A_0, B_1 zur Verfügung.

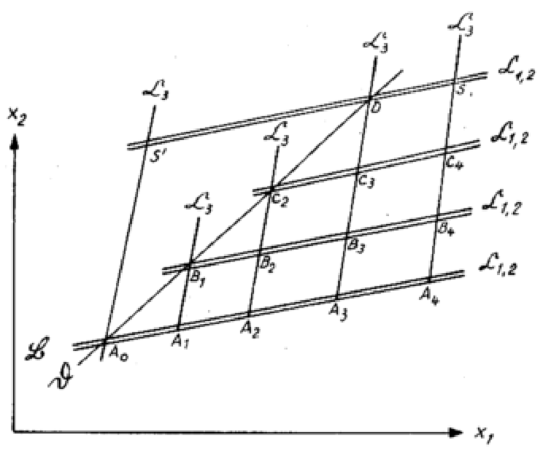

Fig. 9

Von den Werten auf $A_2\,B_1$ ausgehend gewinnt man die Werte u^k in B_2 vermittels der beiden Verträglichkeitsbedingungen*) auf B_1B_2 und der Verträglichkeitsbedingung auf A_2B_2 usw. Man erkennt unmittelbar, daß sich auf Grund der Vorgaben die Funktionswerte im Gebiet $A_0\,A_4\,S\,D\,S'\,A_0$ berechnen lassen, das gleichzeitig das Eindeutigkeitsgebiet darstellt, welches wiederum durch Charakteristiken begrenzt ist.

Erheblich komplizierter gestaltet sich das Rechenverfahren, wenn die zusätzlichen beiden Randrelationen auf nichtzusammenfallenden Kurvenstücken vorgegeben werden (Fig. 10).

Auf der zweifach charakteristischen Kurve $\mathfrak{B}$ seien die u^k, die die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen mögen, zwischen A_0 und A_{n+1} vorgegeben. Weiter sei je eine Relation auf den nichtcharakteristischen Kurvenstücken $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ vorgegeben.

*) Für den Fall, daß es längst der Charakteristiken $\mathfrak{C}_{1,2}$ nur eine Verträglichkeitsbedingung gibt — denn es kann vorkommen, daß der Rang der Matrix trotz Auftretens von Doppelwurzeln sich nur um 1 erniedrigt— ist das Problem nicht lösbar.

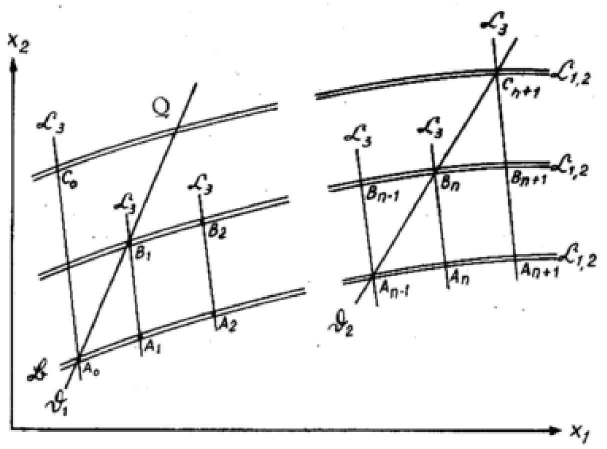

Fig. 10

Jetzt lassen sich die Werte u^k im Punkte B_1 nicht mehr eindeutig aus den Werten auf A_0A_1 berechnen, da lediglich 2 Gleichungen — nämlich die Relation auf $\mathfrak{D}_1$ und die Verträglichkeitsbedingung längs A_1B_1 — zur Verfügung stehen. Vielmehr sind zur eindeutigen Festlegung die Funktionswerte u^k entlang der Anfangskurve bis in die Nachbarschaft des Schnittpunktes mit der weiteren Kurve $\mathfrak{D}_2$ erforderlich.

Gesucht seien zunächst die Wertetripel u^k in den Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Das sind 3n Unbekannte; zu deren Berechnung stehen zur Verfügung in jedem Punkte B_i, $1 \leq i < n$, 3 Beziehungen, nämlich je 2 Verträglichkeitsbedingungen zwischen B_i und B_{i+1} sowie die Verträglichkeitsbedingung zwischen B_i und A_i. Das sind 3 (n—1) Gleichungen. Die noch fehlenden 3 Beziehungen ergeben sich in Form der beiden Randrelationen auf A_0B_1 und $A_{n-1}\,B_n$ sowie der Verträglichkeitsbedingung auf A_nB_n.

Man benötigt also die Vorgabe von Funktionswerten auf $\mathfrak{B}$ über den Schnitt mit der Kurve $\mathfrak{D}_2$ hinaus.

Die Existenz von Lösungen dieses im allgemeinen nichtlinearen und — auch bei quasilinearen Differentialgleichungen — sehr allgemeinen Gleichungssystems ist nicht von vornherein gesichert. Es hängt vom Einzelfall ab, auf welchem Wege man die Lösung versuchen wird. Es ist nicht ausgeschlossen, daß das Relaxationsverfahren auch bei Nichtlinearität des Problems mit Erfolg angewandt werden kann.

Hat das Gleichungssystem jeweils eine eindeutige Lösung, so macht man sich leicht klar, daß auf Grund der Vorgaben die u^k eindeutig bestimmt sind in dem durch Charakteristiken begrenzten Gebiet $A_0\,A_{n+1}C_{n+1}C_0\,A_0$, vorausgesetzt, daß die Relationen auf $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ bis zu den Punkten Q und C_{n+1} wirklich bekannt sind.

2. **Charakteristikenverfahren für bestimmte Systeme mit mehr als 3 abhängigen Variablen**

a) **Das nichtcharakteristische Anfangswertproblem**

$\mathfrak{B}$ sei eine nichtcharakteristische Anfangskurve, auf welcher sämtliche u^k-Werte ($k = 1, \ldots . l$) vorgegeben seien. Die Charakteristiken seien alle reell und zunächst verschieden vorausgesetzt: Von jedem Punkt der Kurve $\mathfrak{B}$ gehen ebensoviele, nämlich l Charakteristiken aus, als abhängige Variable im System auftreten. S sei die Spitze des kleinsten über A_1A_2 errichtbaren Dreiecks, dessen Seiten von Charakteristiken gebildet werden.

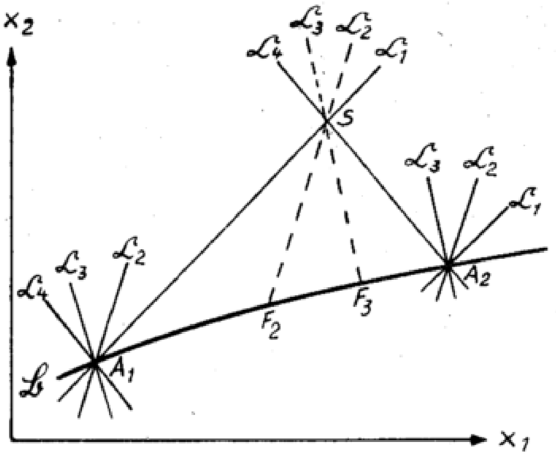

Fig. 11

In der Fig. 11 ist $l = 4$ angenommen. Das Charakteristikenverfahren kann hier in völlig analoger Weise, wie in 1 a) beschrieben, angewandt werden. S ist der einzige Punkt der Konfiguration, für den sich genügend Verträglichkeitsbedingungen, nämlich zwischen A_1S, F_2S, F_3S, A_2S zur Bestimmung der 4 abhängigen Variablen in S gewinnen lassen. Die möglichst genaue Festlegung der Fußpunkte F_2 und F_3 sowie der durch diese Punkte gehenden Charakteristikenrichtungen kann wieder iterativ erfolgen. Das zu A_1A_2 gehörige Fortsetzungsgebiet, in dem eine eindeutige Lösung durch die auf A_1A_2 vorgegebenen u^k-Werte garantiert wird, ist wiederum durch das kleinste charakteristische Dreieck A_1A_2S gegeben. Ist eine der Charakteristiken p-fach zu werten, so existieren im allgemeinen auch längs der p-fach zählenden charakteristischen Kurve p voneinander linear unabhängige Verträglichkeitsbedingungen.

b) **Das charakteristische Anfangswertproblem**

Die Charakteristikenkonstruktion bei charakteristischen Anfangsmannigfaltigkeiten erfährt gegenüber dem in Abschnitt 1 b) beschriebenen Verfahren lediglich die Modifikation, daß noch weitere Scharen von Charakteristiken auftreten (Fig. 12). S sei die Spitze des kleinsten über A_1A_2 errichtbaren charakteristischen Dreiecks, B_1 der Schnittpunkt zwischen A_2S und der Kurve $\mathfrak{D}$, auf welcher eine Relation bzw. Differentialrelation in den u^k vorgegeben sei, die das Problem eindeutig bestimmt macht.

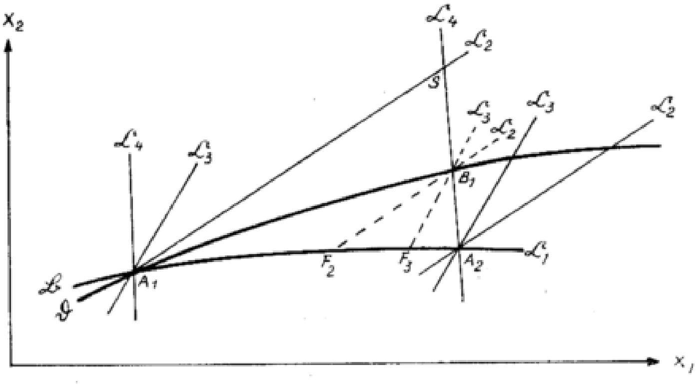

Fig. 12

Man interpoliert zunächst die durch B_1 gehenden Charakteristikenrichtungen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ und erhält 3 Verträglichkeitsbedingungen zwischen B_1F_2, B_1F_3 und B_1A_2. Diese sowie die auf $\mathfrak{D}$ vorgegebene Relation bilden 4 Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der 4 u^k-Werte in B_1. Die Fortsetzung dieses Verfahrens geschieht analog zu dem in 1 b) angegebenen Verfahren. Die Kurve $\mathfrak{D}$ muß dabei wieder, grob gesprochen, innerhalb des Winkelraumes zwischen $\mathfrak{B}$ und der Charakteristik mit dem kleinsten Neigungswinkel gegen $\mathfrak{B}$ liegen. Sie kann auch mit dieser angrenzenden Charakteristik zusammenfallen.

Besonderer Erwähnung bedarf der Fall, daß die Ausgangskurve $\mathfrak{B}$ mehrfach (p-fach) charakteristisch ist. Das Gleichungssystem (2) mit $k,j = 1,2 \dots n$, auf das man dann stößt, hat meist den Rang $n - p$*) und erfordert zur eindeutigen Lösung p weitere Bedingungsgleichungen, die z. B. aus Relationen in den u^k bzw. in quasilinearen Differentialrelationen längs der Kurve $\mathfrak{D}$ oder auch längs nicht zusammenfallender Kurven bestehen dürfen.

Die Fortsetzung einer Lösung über den Bestimmtheitsbereich hinaus, der stets durch Charakteristiken begrenzt wird, ist allgemein möglich, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, die bei charakteristischen Anfangsproblemen zu stellen sind. Diese Fortsetzung ist nichts anderes als die Behandlung eines charakteristischen Anfangswertproblems.

B. Systeme mit n (n = 3,4) unabhängigen Variablen

Wir betrachten in diesem Abschnitt n-dimensionale Probleme mit den unabhängigen Variablen $x_1, x_2 \dots x_n$, wobei später bei meteorologischen Problemstellungen x_n als Zeitkoordinate interpretiert werden wird.

Vorgelegt sei ein System von l quasilinearen Gleichungen mit den l unbekannten Funktionen $u^1, u^2 \dots u^k \dots u^l$ der n unabhängigen Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ der Form

$$(5) \qquad a^i_{jk} u^k_i = g_j \qquad \begin{aligned} k, j &= 1,2 \dots l \\ i &= 1,2 \dots n \\ u^k_i &= \frac{\partial u^k}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Weiterhin sei wiederum eine Anfangsmannigfaltigkeit in impliciter Form

$$(6) \qquad \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) = 0$$

vorgegeben, auf der — evtl. nur in einem beschränkten Gebiete — die Funktionswerte u^k und damit auch deren innere Ableitungen (Ableitungen auf dieser Mannigfaltigkeit) bekannt seien.

Das vorläufige Ziel bildet die Bestimmung der aus der Anfangsmannigfaltigkeit herausführenden Ableitungen. Wir führen dazu neue unabhängige Variable $\xi_1 \dots \xi_i \dots \xi_n$ als Funktionen der alten Variablen $x_1, x_2 \dots x_n$ ein und wählen ξ_n so, daß die Fläche $\xi_n = 0$ mit der Anfangsmannigfaltigkeit $\varphi = 0$ zusammenfällt**). Die Frage lautet dann: unter welchen Bedingungen lassen sich die $\frac{\partial u^k}{\partial \varphi}$ aus dem vorgelegten Gleichungssystem und aus den auf $\varphi = 0$ vorgegebenen Funktionswerten u^k (also auch aus deren inneren Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_m}$, $m = 1,2 \dots n-1$) bestimmen?

Die Transformation liefert für

$$u^k_i \equiv \frac{\partial u^k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \qquad ; m = 1,2 \dots n.$$

*) Nämlich immer, wenn die Matrix von (2) bei Einführung z. B. von $\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} : \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}$ als Variablen einfache Elementarteiler besitzt.

**) Zweckmäßigerweise wird man $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots \xi_n = \varphi$ wählen, vorausgesetzt, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \neq 0$. Wir schreiben dann für die inneren Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_i}$, $i = 1,2 \dots n\text{-}1$, auch $\frac{\delta u^k}{\delta x_i}$, $i = 1,2 \dots n\text{-}1$.

Damit wird (5)

$$a^i_{jk} u^k_i = a^i_{jk} \frac{\partial u^k}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i}$$

oder, wenn man die interessierenden Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_n} = \frac{\partial u^k}{\partial \varphi}$ besonders heraushebt

$$(7) \quad a^i_{jk} \frac{\partial u^k}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = g_j - a^i_{jk} \frac{\partial u^k}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} = b_j \ , \ m = 1,2 \ldots n\text{-}1$$

1. **Charakteristikenbedingung**

Die 1 Ableitungen u^k_φ sind demnach nur dann eindeutig bestimmbar, wenn

$$\left| a^i_{jk} \varphi_i \right| \neq 0.$$

Ist die Charakteristikenbedingung

$$(8) \qquad \left| a^i_{jk} \varphi_i \right| = 0$$

für die Fläche $\varphi = 0$ erfüllt, so existiert eine — wenn jetzt auch nicht mehr eindeutige — Lösung für die u^k_φ nur dann, wenn auch die rechten Seiten b_j von (7) sogenannten Verträglichkeitsbedingungen genügen, die zum Ausdruck bringen, daß der Rang der Matrix $(a^i_{jk} \varphi_i)$ durch Hinzunahme der Spalte der b_j nicht erhöht werden darf*).

Die Charakteristikenbedingung läßt sich folgendermaßen geometrisch deuten:

Die φ_i sind nichts anderes als Komponenten eines Normalenvektors der Fläche $\varphi = 0$ an einer bestimmten Stelle $(x_1 \ldots x_n)$. (8) bringt dann zum Ausdruck, daß nur Flächenelemente φ, deren Normalenvektoren $[\varphi_i]$ dieser Bedingung genügen, charakteristisch sein können. Deutet man die φ_i als Koordinaten x'_i eines $(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)$-Raumes, dessen Ursprung mit der betrachteten Stelle des x_i-Raumes zusammenfällt, so ist $\left| a^i_{jk} x'_i \right| = 0$ die Gleichung eines n-dimensionalen Kegels 1-ter Ordnung C^N (des Normalenkegels), dessen Scheitel im Ursprung des Koordinatensystems x'_i liegt und dessen Mantellinien die möglichen Normalenrichtungen angeben. Die Gesamtheit der auf den Mantellinien senkrechten (also charakteristischen) Flächenelemente umhüllt wieder einen n-dimensionalen Kegel (l-ter Klasse) C^S, der Strahlenkegel heißt. Die Gestalt des Normalen- und Strahlenkegels hängt im allgemeinen sowohl von der Stelle $[x_i]$ als auch von den ins Auge gefaßten Lösungen $[u^k]$ ab und ist lediglich bei linearen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten unabhängig davon im gesamten Raume dieselbe. Ist die Koordinate x_n als Zeitkoordinate ausgezeichnet, so heißt die Schnittmannigfaltigkeit von C^N bzw. C^S mit $x'_n = -1$ Normalen- bzw. Strahlenfläche.

Der Definitheitscharakter der homogenen Form $C \equiv \left| a^i_{jk} x'_i \right|$ — sie heißt charakteristische Form des Differentialgleichungssystems — dient nun zur Typenunterscheidung: Das System heißt an einer bestimmten Stelle des Raumes hyperbolisch, wenn die Form C indefinit ist (d. h. Werte beiderlei Vorzeichens annehmen kann), es heißt elliptisch, wenn C definit ist (d. h. Werte nur eines Vorzeichens annimmt) und es heißt parabolisch, wenn C ausgeartet ist (d. h. sich durch eine homogene lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinate auf weniger als n Veränderliche transformieren läßt).

Ganz entsprechend findet man bei Einzeldifferentialgleichungen höherer Ordnung für eine unbekannte Funktion u die charakteristische Form der Differentialgleichung. Ist zum Beispiel

$$a_{ikl}\, u_{ikl} = g \quad ; i, k, l = 1 \ldots n$$

eine quasilineare Differentialgleichung 3. Ordnung, so ist ihre charakteristische Form

$$C = a_{ikl}\, x'_i\, x'_k\, x'_l\,.$$

Deren Definitheitscharakter dient wieder der Typenunterscheidung.

Die Charakteristikenbedingung ist für eine Fläche $\varphi\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ erfüllt, wenn gilt

$$a_{ikl}\, \varphi_i\, \varphi_k\, \varphi_l = 0\,.$$

Vom Standpunkt der Theorie ist der total hyperbolische Fall besonders ausgezeichnet. Bei diesem bestehen Normalen- und Strahlenkegel aus k/2 einander umschließenden reellen Mänteln. Es gelten dann folgende allgemeine Aussagen, die Erweiterungen entsprechender Aussagen bei 2 unabhängigen Veränderlichen darstellen:

(1). Unstetigkeiten der Lösungen breiten sich entlang der charakteristischen Mannigfaltigkeiten aus.

(2). Das Abhängigkeitsgebiet eines Punktes P ergibt sich näherungsweise durch den Schnitt der konvexen Hülle des in P angebrachten Strahlenkegels mit der Ausgangsmannigfaltigkeit (Genauer: des in P angebrachten Strahlenkonoids oder charakteristischen Konoids).

Diese Aussagen sind bislang nur für den Fall linearer Gleichungen streng bewiesen, jedoch ohne Zweifel auch für nichtlineare wenigstens qualitativ richtig[9]).

2. **Charakteristikenverfahren für mehr als 2 Dimensionen**

Ebenso wie im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher kann man auch bei mehreren Variablen die charakteristischen Mannigfaltigkeiten vermöge der in ihnen geltenden Verträglichkeitsbedingungen zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichungen benutzen.

Zur Erklärung des Prinzips [10]) nehmen wir an, die Differentialgleichungen seien linear und total hyperbolisch; die Gestalt des charakteristischen Kegels hängt also nur von der Stelle $[x_i]$, nicht mehr aber von den $[u^k]$ ab. x_n bedeute die Zeitkoordinate, die Anfangsmannigfaltigkeit sei $x_n = 0$ und nicht charakteristisch. Die Projektion des charakteristischen Kegels im Punkte P $(0,0, \ldots, \triangle t)$ in die x_1, x_n-Ebene habe die in Fig. 13 skizzierte Gestalt.

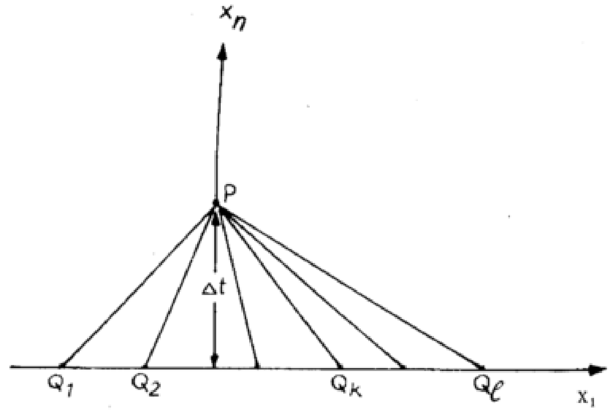

Fig. 13

Wir wollen zur Integration alle diejenigen in P tangierenden Hyperebenen benutzen, deren Normalen-

*) Siehe Abschnitt C: „Verträglichkeitsbedingungen"

vektoren keine Komponente in der $x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$-Richtung aufweisen, für die also $\varphi_2 = \varphi_3 \ldots . = \varphi_{n-1} = 0$ ist. Diese Ebenen berühren den charakteristischen Kegel tatsächlich längs der eingezeichneten Mantellinien $PQ_1, PQ_2, \ldots PQ_l$.

Die für die Punkte Q_k, $k = 1,2 \ldots l$, in den einzelnen charakteristischen Hyperebenen angeschriebenenen Verträglichkeitsbedingungen, in denen die auftretenden Differentialquotienten wieder durch Differenzenquotienten ersetzt werden, liefern dann die benötigten l Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Funktionswerte $u^k(P)$.

Die in den Verträglichkeitsbedingungen vorkommenden inneren Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \xi_m}$, $m = 1,2 \ldots n-1$, schreiben wir im folgenden wegen der getroffenen Wahl $\xi_m = x_m$ — s. Fußnote Seite 9 — $\frac{\delta u^k}{\delta x_m}$.

Für deren Approximation durch Differenzenquotienten ist jedoch zu beachten, daß die dabei benutzte Schrittweite mindestens so groß gewählt werden muß, daß das sich dadurch ergebende Abhängigkeitsgebiet von P nicht kleiner ist als der durch die konvexe Hülle des Strahlenkonoids in P aus $x_n = 0$ ausgeschnittene Bereich. Denn nur dann ist bei proportionaler Verkleinerung der Maschenweiten eine Konvergenz der Näherungslösungen gegen die exakte Lösung zu erwarten[11]).

Auf dieselbe Weise findet man die Funktionswerte u^k in allen Punkten $P(x_1, \ldots x_{n-1}, \triangle t)$, soweit sie durch die Anfangswerte in $t = x_n = 0$ noch bestimmt sind. Aus den Werten im Niveau $\triangle t$ folgen die Werte im Niveau $2 \triangle t$ usw. Da man darauf Wert legen muß, daß der maximale Durchmesser Q_1Q_l des Strahlenkegels von der Größenordnung der verwendeten Mascheneinteilung des Raumes ist (die Anfangswerte der Funktionen u^k sind im allgemeinen nur in Gitterpunkten eines Raumgitters gegeben), folgt daraus zwangsläufig eine Beschränkung des Zeitschritts $\triangle t$.

Im allgemeinen, nichtlinearen Fall kann man als charakteristischen Kegel in $P(\triangle t)$, der jetzt ja von den erst zu bestimmenden Funktionswerten u^k abhängt, näherungsweise den dem Punkte $P(0)$ zugeordneten Kegel verwenden und nötigenfalls nach Berechnung der Funktionswerte durch Iteration verbessern.

Auf eine Diskussion des charakteristischen Anfangswertproblems und der zahlreichen, bei nicht mehr hyperbolischen Gleichungen und ausgearteten Formen des charakteristischen Kegels sich ergebenden Sonderfälle sei hier verzichtet und auf die Behandlung der meteorologischen Beispiele im Teil II verwiesen. Sie läßt sich nach denselben Prinzipien wie auch bei 2 unabhängigen Veränderlichen durchführen.

Statt dessen wollen wir das eben allgemein skizzierte Charakteristikenverfahren an einem der Anschauung zugänglichen Beispiel im einzelnen vorführen und wählen dazu ein System mit konstanten Koeffizienten für 2 gesuchte Funktionen von 3 unabhängigen Veränderlichen, deren Werte für $x_3 = 0$ vorgegeben seien.

3. Beispiel eines dreidimensionalen Charakteristikenverfahrens

Zwei Funktionen u^1 und u^2 von 3 unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 sollen so bestimmt werden, daß sie für $x_3 = 0$ vorgegebene Anfangswerte annehmen und den beiden Differentialgleichungen

$$4\frac{\partial u^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u^1}{\partial x_3} + \frac{\partial u^2}{\partial x_2} = 0$$
$$-\frac{\partial u^1}{\partial x_2} + 4\frac{\partial u^2}{\partial x_1} - \frac{\partial u^2}{\partial x_3} = 0$$

genügen*).

Als Differentialgleichung der charakteristischen Mannigfaltigkeiten erhält man nach (8)

$$\left|\overset{i}{a}_{jk}\varphi_i\right| \equiv \begin{vmatrix} 4\varphi_1 + \varphi_3 & \varphi_2 \\ -\varphi_2 & 4\varphi_1 - \varphi_3 \end{vmatrix} = 16\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 = 0.$$

Der Normalenkegel wird demnach durch die Gleichung beschrieben

$$16x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0.$$

Die Form

$$C = 16x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2$$

ist von 2. Ordnung, indefinit und nicht ausgeartet, das System also hyperbolisch (hier sogar total hyperbolisch). Entsprechend ist der Normalenkegel ein reeller, nicht ausgearteter Kegel 2. Ordnung. Seine Gestalt ist, da das vorgegebene System konstante Koeffizienten hat, unabhängig von den $[u^k]$ und den betrachteten $[x_i]$ des Raumes. Als zugehörigen Strahlenkegel findet man**)

$$\frac{x_1'^2}{16} + x_2'^2 - x_3'^2 = 0 \quad \text{(Fig. 14).}$$

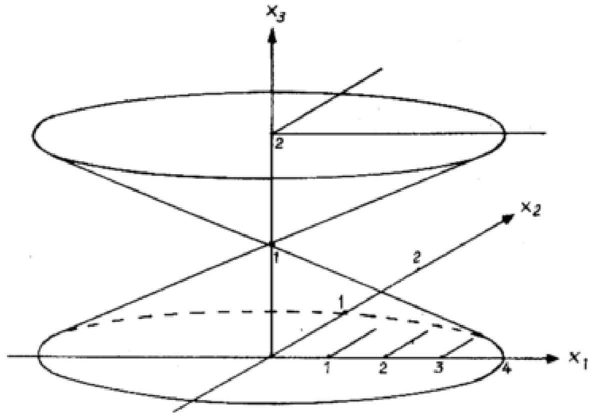

Fig. 14

Die Normalen- bzw. Strahlenfläche besteht aus dem Inneren der Ellipsen

$$16x_1'^2 + x_2'^2 = 1 \text{ bzw. } \frac{x_1'^2}{16} + x_2'^2 = 1.$$

Letztere stellt nach der allgemeinen Theorie das Abhängigkeitsgebiet des Punktes P (0,0,0) in der Ebene $x_3' = -1$ dar.

*) Man stellt leicht fest, daß dann u^1 und u^2 für sich der Differentialgleichung II. Ordnung

$$16\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0,$$

also einer Differentialgleichung vom Typus der Wellengleichung, genügen.

**) In der analytischen Geometrie wird gezeigt: Ist $\sum_1^n a_{ik}x_i'x_k' = 0$ die Gleichung eines n-dimensionalen, nichtausgearteten ($|a_{ik}| \neq 0$) Kegels 2. Ordnung und bedeutet (A_{ik}) die Inverse der Matrix (a_{ik}), so stehen die Flächenelemente des Kegels $\sum_1^n A_{ik}x_i'x_k' = 0$ senkrecht auf den Seitenlinien des gegebenen Kegels und umgekehrt. Das ist aber die zwischen Strahlen- und Normalenkegel verlangte Beziehung. S. z. B. auch Courant, R. Hilbert, D.[12]).

Entsprechend unserem Vorschlag auf Seite 10 wollen wir bei der näherungsweisen Integration in der (x_1, x_3)-Ebene arbeiten und erhalten als Gleichung des Strahlenkegels im Punkte P (0, 0, h) bezogen auf den (x_1, x_2, x_3)-Raum

$$\frac{x_1^2}{16} + x_2^2 - (x_3-h)^2 = 0,$$

dessen Projektion auf die (x_1, x_3)-Ebene gegeben ist durch

$$\frac{x_1^2}{16} - (x_3-h)^2 = 0.$$

Dies ist das Geradenpaar (Fig. 15) $\frac{x_1}{4} = \pm (x_3 - h)$, das die x_1-Achse in den Punkten $\pm$ 4 h schneidet.

$$\text{a)}\ \frac{1}{h}\left(u^1_{001} - u^1_{-100}\right) + \frac{1}{2k}\left(u^2_{-110} - u^2_{-1-10}\right) = 0$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{2k}\left(u^1_{110} - u^1_{1-10}\right) - \frac{1}{h}\left(u^2_{100} - u^2_{001}\right) = 0.$$

Deren Auflösung lautet:

$$u^1_{001} = u^1_{-100} - \frac{1}{2}\frac{h}{k}\left(u^2_{-110} - u^2_{-1-10}\right)$$

$$u^2_{001} = u^2_{100} - \frac{1}{2}\frac{h}{k}\left(u^1_{110} - u^1_{1-10}\right).$$

Die allgemeine Vorschrift, daß die Maschenlänge k so zu wählen ist, daß der Abhängigkeitsbereich des Näherungsverfahrens — hier unseres als Differenzenverfahren erscheinenden Charakteristikenverfahrens — nicht kleiner wird als der entsprechende der Differentialgleichungen, liefert als kleinstmögliche Maschenweite k = h.

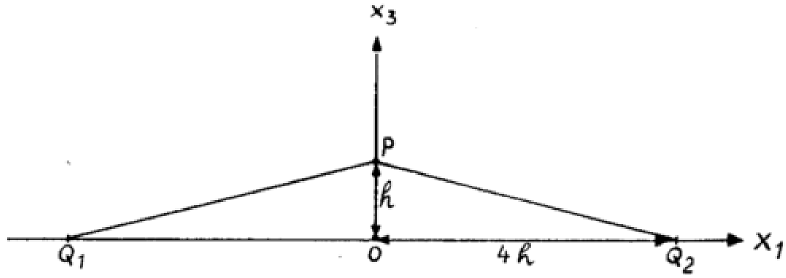

Fig. 15

Die Gleichungen der den Kegel längs der Mantellinien PQ_1, PQ_2 berührenden charakteristischen Ebenen lauten also

$$\varphi \equiv \frac{x_1}{4} \pm (x_3-h) = 0.$$

Die zugehörigen Normalenvektoren haben die Komponenten (1/4), 0, ± 1), so daß bei der gemäß (1) bis (3) durchzuführenden Transformation die Gleichungssysteme werden

a) für $\varphi \equiv \frac{1}{4}x_1 - (x_3-h)$

$$0 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} = 4\frac{\delta u^1}{\delta x_1} + \frac{\delta u^2}{\delta x_2}$$

$$0 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + 2 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} = -\frac{\delta u^1}{\delta x_2} + 4\frac{\delta u^2}{\delta x_1}$$

b) für $\varphi \equiv \frac{1}{4}x_1 + (x_3-h)$

$$2 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} = -4\frac{\delta u^1}{\delta x_1} - \frac{\delta u^2}{\delta x_2}$$

$$0 \cdot \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} = \frac{\delta u^1}{\delta x_2} - 4\frac{\delta u^2}{\delta x_1}.$$

Ersichtlich lassen sich in beiden Fällen die herausführenden Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \varphi}$ nicht bestimmen, da beidesmal die Koeffizientendeterminante verschwindet.

Als Verträglichkeitsbedingungen erhält man nach Vorschrift*)

$$\text{a)}\ 4\frac{\delta u^1}{\delta x_1} + \frac{\delta u^2}{\delta x_2} = 0 \qquad \text{bzw. b)}\ \frac{\delta u^1}{\delta x_2} - 4\frac{\delta u^2}{\delta x_1} = 0.$$

Der Ersatz der Differentialquotienten durch Differenzenquotienten — in der (x_1, x_2)-Ebene wird ein rechtwinkliges Netz der Maschenweiten $\triangle x_1 = 4h$, $\triangle x_2 = k$, wobei k vorläufig offen bleibt, zugrundegelegt — liefert mit der üblichen Bezeichnung der Funktionswerte an bestimmten Gitterpunkten durch angehängte Indizes:

*) s. C: Verträglichkeitsbedingungen

Die Aufstellung des sog. ε-Schemas [13]) zu obigen Formeln zeigt, daß das Verfahren für k = h noch stabil ist und daß die Wahl k größer als h die Stabilität verbessern würde.

Es scheint nämlich eine allgemeine Eigenschaft von Charakteristikenverfahren zu sein, daß bei richtiger Wahl des Ausgangsgitters die sich ergebenden Differenzenformeln sowohl den Abhängigkeitsbereich eines Punktes richtig wiedergeben als auch gleichzeitig stabil sind.

C. **Explizite Formulierung der Verträglichkeitsbedingungen**

Jedes Charakteristikenverfahren zur Integration partieller Differentialgleichungen stützt sich in entscheidender Weise auf den Schluß, daß im Falle einer charakteristischen Anfangsmannigfaltigkeit $\xi_n \equiv \varphi\ (x_1, x_2 \ldots x_n) = 0$ das Verschwinden der Determinante

$$\left|a^i_{jk}\varphi_i\right| \qquad j,k = 1,2 \ldots l$$

des linearen Gleichungssystems (3) für die herausführenden Ableitungen $\frac{\partial u^k}{\partial \varphi}$

$$a^i_{jk}\varphi_i \frac{\partial u^k}{\partial \varphi} = g_j - a^i_{jk}\frac{\partial u^k}{\partial \xi_m}\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i},$$

abgekürzt

$$a^i_{jk}\varphi_i \frac{\partial u^k}{\partial \varphi} = b_j.$$

unter Voraussetzung der Existenz einer Lösung $[u^k]$ zur Folge hat, daß die rechten Seiten b_j gewissen Verträglichkeitsbedingungen genügen müssen.

Denn für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

$$c_{jk}x_k = d_j, \qquad j,k = 1,2 \ldots l,$$

besteht die grundlegende Alternative: Entweder ist die Determinante $|c_{jk}|$ der Koeffizientenmatrix (c_{jk}) $\neq 0$, dann ist das System ohne Einschränkung für beliebige rechte Seiten d_j eindeutig lösbar, oder es ist $|c_{jk}| = 0$, dann ist das System dann und nur dann —

aber nicht mehr eindeutig — lösbar, wenn durch die Hinzunahme des aus den rechten Seiten gebildeten Spaltenvektors

$$\mathfrak{D} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_l \end{Bmatrix}$$

zu den Spaltenvektoren $\mathfrak{C}_k = \begin{Bmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{lk} \end{Bmatrix}$

der Rang des von diesen aufgespannten Vektorgebildes nicht erhöht wird.

Wenn es also eine Lösung u^k des Differentialgleichungsproblems gibt, so müssen die rechten Seiten von (3) diese Forderung erfüllen.

Die eben vektoralgebraisch formulierte Bedingung läßt sich in der Form von linearen Gleichungen ausdrücken, denen die rechten Seiten genügen müssen und deren Anzahl ϱ sich direkt aus dem Rang $l-\varrho$ der Matrix (c_{jk}) ergibt. Die Gewinnung einer Vorschrift zur Aufstellung solcher Gleichungen ist das Ziel der folgenden Betrachtungen.

Diese Gleichungen stellen für unser Charakteristikenverfahren die gesuchten Verträglichkeitsbedingungen — Beziehungen zwischen den inneren Ableitungen der gesuchten Funktionen $[u^k]$ in $\varphi = 0$ — dar, die sich zur näherungsweisen Bestimmung der Lösungen $[u^k]$ verwenden lassen.

Seien also $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_l$ die Spaltenvektoren der vorgelegten Matrix (c_{jk}) vom Rang $l-\varrho$. Nach Voraussetzung gibt es unter diesen $l-\varrho$ linear unabhängige. Wir denken uns die Matrix unter eventueller Vertauschung von Spalten, d. h. Umnumerierung von Unbekannten, so angeschrieben, daß speziell die ersten $l-\varrho$ Spalten linear unabhängig sind. Man betrachtet dann

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,l-\varrho} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,l-\varrho} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{l-\varrho,1} & c_{l-\varrho,2} & \cdots & c_{l-\varrho,l-\varrho} & d_{l-\varrho} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{l,l-\varrho} & d_l \end{array}\right)$$

worin d_j die rechte Seite der j-ten Gleichung bedeutet. Wir können nun weiter annehmen, daß die Reihenfolge der Gleichungen bereits derart war, daß die links oben stehende $l-\varrho$-reihige Unterdeterminante nicht verschwindet.

Der Rang des obigen Vektorgebildes, das jetzt aufgefaßt wird als aus Zeilenvektoren bestehend, ändert sich nun bei sogenannten elementaren Umformungen — Linearkombinationen von Zeilen oder Spalten — nicht. Man kann durch eine Linearkombination von Zeilen stets erreichen, daß die Matrix übergeht in

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,l-\varrho} & d_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{l-\varrho,1} & c_{l-\varrho,2} & \cdots & c_{l-\varrho,l-\varrho} & d_{l-\varrho} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_1^{l-\varrho} \lambda_{1j} d_j + d_{l-\varrho+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum\limits_1^{l-\varrho} \lambda_{\varrho j} d_j + d_l \end{pmatrix}$$

Die hierin auftretenden λ_{ij}, $1 \leqq i \leqq \varrho$, $1 \leqq j \leqq l-\varrho$ sind eindeutig bestimmt.

Die Forderung, daß das aus den Spaltenvektoren der obigen Matrix gebildete Vektorgebilde den Rang $l-\varrho$ haben soll, ist äquivalent damit, daß alle $l-\varrho+1$-reihigen Unterdeterminanten verschwinden.

Man findet unmittelbar die linear unabhängigen Verträglichkeitsbedingungen für die rechten Seiten d_j

$$\sum_{j=1}^{l-\varrho} \lambda_{ij} d_j + d_{l-\varrho+i} = 0, \quad i = 1, 2 \ldots \varrho.$$

Besonders einfach ist der Fall $\varrho = 1$. Hier gibt es in

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,l-1} & d_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{l,l-1} & d_l \end{pmatrix}$$

überhaupt nur eine $l-\varrho+1 = l$-reihige Unterdeterminante. Die Verträglichkeitsbedingung besteht einfach in dem Verschwinden der Determinante der angeschriebenen Matrix. Man zeigt leicht, daß man stets — bis auf einen Faktor — dieselbe Verträglichkeitsbedingung erhält, gleichgültig welche $l-1$ linear unabhängigen Spaltenvektoren der Matrix (c_{jk}) man herausgreift.

Beispiel:

Die Transformation des im Teil II, A auftretenden Gleichungssystems (1')-(5') auf das dreifach charakteristische Flächenelement $\varphi \equiv \sigma_1 (x_1 - v^1 t) + \sigma_2 (x_2 - v^2 t) + \sigma_3 (x_3 - v^3 t) = 0$ (es ist dies, bei willkürlichen σ_i, das Ebenenbüschel durch die dort auftretende Gerade G) führt für die aus dem Flächenelement hinausführenden Ableitungen auf ein System der Form

$$\begin{aligned}
0 \cdot \frac{\partial v^1}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial v^3}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= b_1 \\
0 \cdot \frac{\partial v^1}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial v^3}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_2}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= b_2 \\
0 \cdot \frac{\partial v^1}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{d v^3}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_3}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= b_3 \\
\varrho\sigma_1 \frac{\partial v^1}{\partial \varphi} + \varrho\sigma_2 \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + \varrho\sigma_3 \frac{\partial v^3}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= b_4 \\
0 \cdot \frac{\partial v^1}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial v^3}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} + 0 \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= b_5
\end{aligned}$$

(abhängige Variable v^i, ϱ, p).

Die rechten Seiten sind zur Abkürzung mit $b_1 \ldots b_5$ bezeichnet. Die Matrix dieses Systems

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_1}{\varrho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_2}{\varrho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{\varrho} \\ \varrho\sigma_1 & \varrho\sigma_2 & \varrho\sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 2, da alle 3reihigen Unterdeterminanten verschwinden und z. B. der erste und letzte Spaltenvektor linear unabhängig sind.

Waren b_j die rechten Seiten des zugehörigen Gleichungssystems, so betrachtet man jetzt die Matrix

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sigma_1}{\varrho} & b_1 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\varrho} & b_2 \\ 0 & \frac{\sigma_3}{\varrho} & b_3 \\ \varrho\sigma_1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & b_5 \end{vmatrix}$$

oder nach Umformung so, daß die links obenstehende 2reihige Unterdeterminante von Null verschieden ist.

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sigma_3}{\varrho} & b_3 \\ \varrho\sigma_1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & b_5 \\ 0 & \frac{\sigma_1}{\varrho} & b_1 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{\varrho} & b_2 \end{vmatrix}$$

Die oben auseinandergesetzte lineare Umformung ergibt dann:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sigma_3}{\varrho} & b_3 \\ \varrho\sigma_1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_1}{\sigma_3} b_3 + b_1 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_2}{\sigma_3} b_3 + b_2 \end{vmatrix}$$

und daraus folgen die 3 linear unabhängigen Verträglichkeitsbedingungen:

$$b_5 = 0$$
$$\sigma_3\, b_2 = \sigma_2\, b_3$$
$$\sigma_3\, b_1 = \sigma_1\, b_3 .$$

II. Zur Charakteristikentheorie bei meteorologischen Problemstellungen

Die Aufgabe, einen Zustand der Atmosphäre für einen späteren Zeitpunkt mit den Mitteln der theoretischen Physik vorauszusagen, führt auf folgende Problemstellung:

Gegeben sei die Anfangsmannigfaltigkeit φ (x, y, z, t) $= 0$ — im allgemeinen wird man von der Anfangsmannigfaltigkeit $t = \text{const}$ ausgehen —, auf welcher die meteorologischen Variablen, die den Zustand der Atmosphäre beschreiben, vorgegeben sind. Das Ziel ist, eine Verteilung dieser Zustandsvariablen mit Hilfe von aero- und thermodynamischen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der speziell in der Atmosphäre gültigen Bedingungen für einen späteren Zeitpunkt zu gewinnen.

Wir fragen zunächst nach der Verteilung der meteorologischen Zustandsgrößen auf einer Fläche, die der Anfangsmannigfaltigkeit $\varphi = 0$ unmittelbar benachbart ist, also auf der in unserem Falle dreidimensionalen Hyperfläche $\varphi = \pm\varepsilon$, wobei ε so klein vorausgesetzt werde, daß zwischen den Funktionswerten auf $\varphi = 0$ und $\varphi = \pm\varepsilon$ lineare Beziehungen in ε angenommen werden können. Ist es möglich, auf der Fläche $\varphi = \pm\varepsilon$ eine Lösung zu konstruieren, so kann durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens prinzipiell auch auf einer beliebig weit von der Fläche $\varphi = 0$ entfernten Mannigfaltigkeit eine Lösung erzielt werden, sofern diese überhaupt durch die Anfangswerte soweit bestimmt ist.

Die Frage nach der Lösbarkeit in unmittelbarer Umgebung der Anfangsmannigfaltigkeit ist identisch mit der Frage nach der Bestimmungsmöglichkeit der aus der Anfangsfläche herausführenden Ableitungen $\frac{\partial u_k}{\partial \varphi}$ wenn mit u^k die Zustandsvariablen bezeichnet werden.

A. Nichtspezialisierte ursprüngliche Grundgleichungen

Zur Lösung stehen die folgenden aerodynamischen und thermodynamischen Differentialgleichungen zur Verfügung:

Die 3 Bewegungsgleichungen mit den in der meteorologischen Dynamik üblichen Vernachlässigungen

$$(1-3) \qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} + \frac{1}{\varrho}\, \nabla_3\, p = -\, \mathfrak{f}\mathfrak{k} \times \mathfrak{v} - g\mathfrak{k} + \mathfrak{R},$$

die Kontinuitätsgleichung

$$(4) \qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \nabla_3 \cdot \mathfrak{v} = 0$$

und der 1. Hauptsatz

$$(5) \qquad \frac{dp}{dt} + c^2 \frac{d\varrho}{dt} = \varkappa p\, \frac{d\ln\vartheta}{dt} = \varkappa p j.$$

Hierin bedeuten: $\mathfrak{v}$ Windvektor mit den Komponenten v^i ($i = 1, 2, 3$), ϱ Luftdichte, p Luftdruck, $f = 2\omega\sin\varphi$ = Coriolisparameter, $c^2 = \frac{\varkappa p}{\varrho}$ Quadrat der adiabatischen Schallgeschwindigkeit, $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$, g = Erdbeschleunigung, ϑ potentielle Temperatur, $\mathfrak{R}$ mit den Komponenten R^i Reibungsbeschleunigung, j Wärmefunktion, die ein Maß für alle nichtadiabatischen Vorgänge darstellt. Das System enthält 9 abhängige Variable: 3 Windkomponenten v^i, ϱ, p, 3 Beschleunigungskomponenten R^i, j. Da Ansätze für die Reibungsbeschleunigung R^i und die Wärmefunktion j - das sind Differentialbeziehungen dieser Größen mit den weiteren abhängigen Funktionen sowie mit den unabhängigen Variablen - nur in bisher unbefriedigender Form vorliegen, wird im folgenden angenommen, daß sowohl R^i als auch j vernachlässigbar sind oder zumindest als inhomogene Bestandteile des Systems betrachtet werden können.

Mit dieser Annahme werden die Gleichungen (1-5) zu einem bestimmten System. In Komponentendarstellung erhält man anstelle (1-5) die Gleichungen**):

$$\left.\begin{aligned}
&(1') \quad v^1_t + v^i v^1_i + \frac{1}{\varrho} p_1 &&= f v^2 + R^1 \\
&(2') \quad v^2_t + v^i v^2_i + \frac{1}{\varrho} p_2 &&= -f v^1 + R^2 \\
&(3') \quad v^3_t + v^i v^3_i + \frac{1}{\varrho} p_3 &&= -g + R^3 \\
&(4') \quad \varrho_t + v^i \varrho_i + v^i_i \varrho &&= 0 \\
&(5') \quad p_t + v^i p_i - c^2(\varrho_t + v^i \varrho_i) &&= \varkappa p j
\end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{unabhängige} \\ \text{Variable: } x_i \\ (i = 1, 2, 3),\ t,\end{array}$$

*) Besser geeignet wäre eine Darstellung in Kugelkoordinaten, für das weitere ergäbe diese aber lediglich eine Modifikation der Koeffizienten.

**) Indices an den abhängigen Variablen drücken stets eine partielle Differentiation nach den unabhängigen Variablen aus.

worin über Terme mit doppelt auftretenden Indices zu summieren ist.

1. Das charakteristische Gebilde des Systems (1′) — (5′)

Einen entscheidenden Einblick in den Charakter der Lösungen des Systems (1′) — (5′) und damit ein Urteil über die in Frage kommenden Lösungsverfahren gewährt die Untersuchung der dem System zugeordneten charakteristischen Form. Nach den Ausführungen auf Seite 10 findet man diese rein formal, wenn die linken Seiten des Systems in Form einer Determinante geschrieben werden, wobei Terme mit Ableitungen der v^i, ϱ, p respektive je in einer Spalte zu stehen kommen und wobei die Ableitungen der abhängigen Variablen nach x_i bzw. t durch x_i' bzw. t' zu ersetzen sind.

Ist dann $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = x_i'$ bzw. $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = t'$, so sind im Falle des Verschwindens dieser Form die Flächenelemente $\varphi(x_i, t) = \text{const}$ an der betrachteten Stelle des (x , t)-Raumes für die ins Auge gefaßte Lösung charakteristisch.

Man erhält:

$$C(x_i', t') \equiv \begin{vmatrix} t'+v^i x_i' & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varrho}\, x_1' \\ 0 & t'+v^i x_i' & 0 & 0 & \frac{1}{\varrho}\, x_2' \\ 0 & 0 & t'+v^i x_i' & 0 & \frac{1}{\varrho}\, x_3' \\ \varrho x_1' & \varrho x_2' & \varrho x_3' & t'+v^i x_i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2(t'+v^i x_i') & t'+v^i x_i' \end{vmatrix} .$$

Kürzt man den Ausdruck $t' + v^i x_i'$ durch L ab, so ist

$$(6)\quad C(x_1', x_2', x_3', t') \equiv L^3 \left(L^2 - c^2 (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)\right)$$

und C = 0 für eine bestimmte Lösung (v^i, ϱ, p) die Gleichung des Normalenkegels an einer bestimmten Stelle x_{i0}, t_0. Seine Seitenlinien stehen senkrecht auf den Tangentialebenen des Monge'schen- oder Strahlenkegels.

Der Normalenkegel zerfällt hier in die dreifach zu zählende Ebene L = 0 und den Kegel II. Ordnung $L^2 - c^2 (x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2) = 0$. Dieser ist reell und nicht ausgeartet, wie man mit Hilfe der Hesse'schen Determinante nachweist.*)

Die Form (6) entscheidet nun nach den auf Seite 10 angegebenen Kriterien über den Typ des vorgelegten Systems. Da sie als Form ungerader Ordnung indefinit und bereits einer ihrer Bestandteile nicht ausgeartet ist, ist das vorgelegte System also unabhängig von den betrachteten Lösungen (v^i, ϱ, p) an jeder Stelle des Raumes hyperbolisch.

Den beiden Teilen des Normalenkegels entsprechen folgende Teile des Strahlenkegels:

1) die dreifach zählende Gerade

$$G \equiv \left\{ x_1' = \lambda v^1,\ x_2' = \lambda v^2,\ x_3' = \lambda v^3,\ t' = \lambda \right\}$$

als Normale der Ebene L = 0 (λ Parameter),

2) der nicht entartete Kegel II. Ordnung**)

$$K \equiv c^2 t'^2 - \sum_1^3 (x_i' - v^i t')^2 = 0.$$

Die Geraden nach 1) würden bei konstanten v^i die Bahn des die Stelle x_i zur Zeit t passierenden Teilchens im vierdimensionalen Raum-Zeitkontinuum, also eine Weltlinie darstellen, bei veränderlichen v^i liefern sie nur die Bahnrichtung an der betrachteten Stelle. Entsprechend sind die Projektionen dieser Geraden in den (x_1, x_2, x_3)-Raum Tangenten an die Stromlinien.

Der Kegel unter 2) entsteht durch Projektion der Kugel (Fig. 16) $\sum_{i=1}^{3} (x_i' - v^i)^2 = c^2$ in der Ebene $t' = 1$ vom Nullpunkt aus. Diese stellt als Strahlenfläche mit $t' = 1$ gleichzeitig das Einflußgebiet einer zur Zeit t = 0 im Nullpunkt angebrachten Störung dar. Es ist nicht überraschend, daß dieses sowohl von der Wind- als auch von der Schallgeschwindigkeit abhängt und sich einfach dadurch ergibt, daß man eine Kugel vom Radius c um den Windvektor vom Ursprung aus verschiebt.

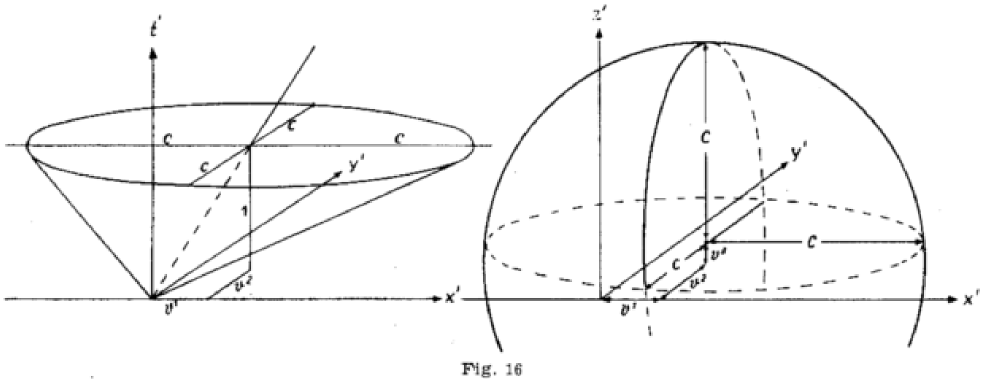

Fig. 16

In der Figur findet sich auch noch der Schnitt des Strahlenkegels mit der Hyperebene $x_2' = 0$ dargestellt. Man beachte, daß in der Atmosphäre magn v^i = 10 m sec^{-1}, dagegen $c \approx 300$ m sec^{-1}.

2. Möglichkeit eines Charakteristikenverfahrens

Aus der Form (6) liest man ab, daß die Flächen $\varphi \equiv t = \text{const}$ **nichtcharakteristisch** sind. Da für jedes die Gerade G berührende und deshalb dreifach charakteristische Flächenelement φ*) der Rang der Matrix (a^i_{jk}) sich um 3 erniedrigt, hat man zusammen mit den in 2 verschiedenen Tangentialebenen von K geltenden Beziehungen genau 5 Verträglichkeitsbedingungen zur Verfügung, die die Durchfüh-

*) Im Abschnitt C, Verträglichkeitsbedingungen ist dieses Beispiel näher ausgeführt.

*) Ist C eine Form in $x_1, x_2 \ldots x_n$, so stellt die Gleichung

$$H \equiv \left| \frac{\partial^2 C}{\partial x_i \partial x_l} \right| = 0$$

eine notwendige Bedingung dafür dar, daß C sich durch eine homogene lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante auf eine Form von weniger als n Veränderlichen transformieren läßt. Hinreichend ist die Bedingung nur in den Fällen $n \leq 4$ und allgemein bei quadratischen Formen.

**) s. Fußnote S. 11.

rung des auf den Seiten 10, 11 vorgeschlagenen Charakteristikenverfahrens prinzipiell ermöglichen. Abgesehen davon, daß die Beschaffung aller Ausgangswerte v^i, ϱ, p kaum in befriedigender Weise möglich sein wird, ergibt sich auch wegen der Größe der Schallgeschwindigkeit c zwangsläufig ein außerordentlich kleiner Zeitschritt der Größenordnung

Min $\frac{\triangle x_i}{c}$ ($\triangle x_i$ Maschenlängen des Raumgitters).

Für das reine Anfangswertproblem, für das also auf keinem der Ränder des Prognoseraums der zeitliche Verlauf einer hinreichenden Anzahl der gesuchten Funktionen v^i, ϱ, p vorgegeben ist, ergibt sich sogar —ebenfalls wegen der Größe der Schallgeschwindigkeit c — eine einschneidende Beschränkung des Prognosenzeitraums.

Es liegt deshalb auch von diesem Standpunkt aus nahe, die meteorologisch - dynamischen Gleichungen so zu modifizieren, daß der Einfluß der Schallgeschwindigkeit verschwindet.

B. **Einführung von Gleichgewichtsbedingungen in Form der hydrostatischen Grundgleichung und der geostrophischen Windrelation**

In der dynamischen Meteorologie wird weitgehend Gebrauch gemacht von Gleichgewichtsbeziehungen, die dadurch entstehen, daß die Beschleunigungsterme in den Bewegungsgleichungen gegenüber den einzelnen Kräften, die an der Masseneinheit angreifen, als vernachlässigbar betrachtet werden, also nahezu Kräftegleichgewicht vorausgesetzt wird.

Streicht man in der Bewegungsgleichung die Vertikalbeschleunigung, so entsteht die sog. hydrostatische Grundgleichung. Streicht man die horizontale Beschleunigung, so entsteht die geostrophische Windbeziehung.

Größenordnungsabschätzungen ergeben, daß die Vertikalbeschleunigung von höherer Ordnung klein gegenüber den vertikalen Kräften ist als die Horizontalbeschleunigung gegenüber den Horizontalkräften, so daß die Annahme der Gültigkeit der statischen Grundgleichung

$$(7) \qquad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -g\varrho$$

eher gerechtfertigt ist als die des geostrophischen Windgesetzes*)

$$(8) \qquad v^1 = -\frac{1}{\varrho f}\frac{\partial p}{\partial x_2}, \qquad (9) \qquad v^2 = \frac{1}{\varrho f}\frac{\partial p}{\partial x_1}.$$

Wir wollen deshalb beide Fälle getrennt behandeln, die Herleitung der entsprechenden charakteristischen Kegel jedoch allgemein durchführen und zur Unterscheidung die einzelnen Beschleunigungsglieder durch Koeffizienten ε_1, ε_2, ε_3 markieren. Durch Verfügen über diese kann dann die Unterscheidung leicht durchgeführt werden:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 0$: Vertikalbeschleunigung verschwindet.

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$: Gesamtbeschleunigung verschwindet.

Die Charakteristikenbedingung lautet dann allgemein:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 L & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varrho}\varphi_{x_1} \\ 0 & \varepsilon_2 L & 0 & 0 & \frac{1}{\varrho}\varphi_{x_2} \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 L & 0 & \frac{1}{\varrho}\varphi_{x_3} \\ \varrho\varphi_{x_1} & \varrho\varphi_{x_2} & \varrho\varphi_{x_3} & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 L & L \end{vmatrix} = 0.$$

Dementsprechend erhält man für die homogene Form C^N bzw. den Normalenkegel

$$C^N \equiv L^3 \{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 L^2 - c^2(\varepsilon_2\varepsilon_3 x_1'^2 + \varepsilon_3\varepsilon_1 x_2'^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 x_3'^2)\} = 0,$$
$$L \equiv t' + v^i x_i', \; x_i' = \varphi_{x_i}.$$

Der Normalenkegel zerfällt also wieder: einmal in die dreifach zu wertende Ebene $C_I^N \equiv L = 0$, die zum gleichen ausgearteten Strahlenkegel führt wie unter A 1, zum anderen in den Kegel II. Ordnung

$$C_{II}^N \equiv \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 L^2 - c^2(\varepsilon_2\varepsilon_3 x_1'^2 + \varepsilon_3\varepsilon_1 x_2'^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 x_3'^2) = 0.$$

Der zu diesem gehörige Strahlenkegel ist für ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \neq 0$ gegeben durch

$$C_{II}^S \equiv c^2 t'^2 - \varepsilon_i (v^i t' - x_i')^2, \; i = 1, 2, 3.$$

1. **Streichen der Vertikalbeschleunigung**

Mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 0$ geht C_{II}^N über in $x_3'^2 = 0$, also in die doppelt zählende Ebene $x_3' = 0$. Als zugehöriger Strahlenkegel ergibt sich deshalb die doppelt zählende x_3' - Achse: Jedes die x_3' - Achse enthaltende Flächenelement wird doppelt charakteristisch.

Die charakteristische Form ist in diesem Falle parabolisch ausgeartet; die lineare Transformation mit nicht verschwindender Determinante

$$\xi_1 = x_1', \; \xi_2 = x_2', \; \xi_3 = x_3', \; \xi_4 = L$$

führt nämlich $C^N(x')$ in die Form

$$C^N(\xi) \equiv -c^2 \xi_4^3 \xi_3^2$$

mit nur 2 unabhängigen Variablen über.

Durch einen Grenzübergang, der sich auf die Verhältnisse bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten stützt, für dessen Zuläs-

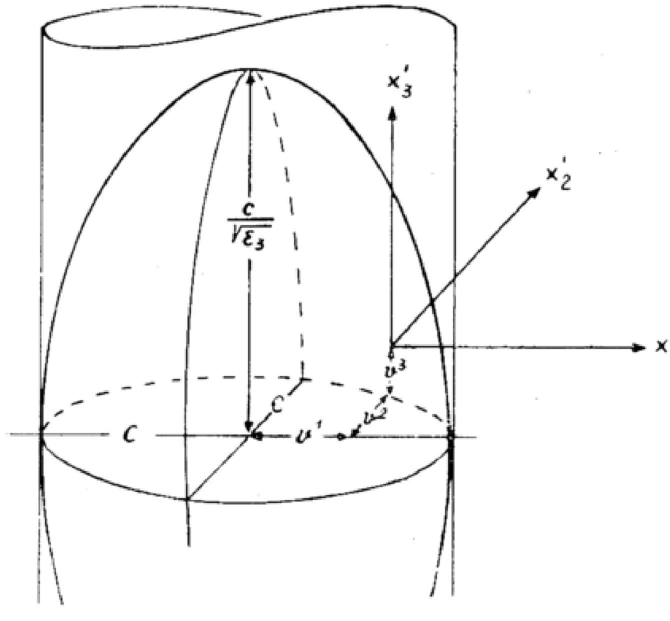

Fig. 17

*) Es sei betont, daß in der meteorologischen Dynamik von den gleichzeitig ja bestehenden Gleichungen

$$\frac{dv^3}{dt} = 0 \text{ bzw. } \frac{dv^1}{dt} = \frac{dv^2}{dt} = 0$$

kein Gebrauch gemacht wird, so daß die Annahme des Kräftegleichgewichts lediglich zur Definition approximativ gültiger Relationen für die (fiktive) statische Dichte und für den (fiktiven) geostrophischen Wind benutzt wird. Die resultierenden Lösungen können deshalb auch als verträglich angesehen werden mit von Null verschiedenen Beschleunigungen, solange diese nur relativ klein sind.

sigkeit jedoch ein strenger Beweis aussteht, finden wir das zu erwartende Abhängigkeitsgebiet:

Für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 \neq 0$ wird die Gleichung der Strahlenfläche

$$(v^1 + x_1')^2 + (v^2 + x_2')^2 + \varepsilon_3 (v^3 + x_3')^2 = c^2.$$

Das ist ein Rotationsellipsoid (Fig. 17), dessen Mittelpunkt in $(-v^1, -v^2, -v^3)$ liegt und dessen halbe Achsenlängen c, c, $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_3}}$ sind.

Für $\varepsilon_3 \to 0$ entsteht als Grenzfläche der auf der Ebene $x'_3 = 0$ senkrechte Kreiszylinder vom Radius c

$$(x'_1 + v^1)^2 + (x'_2 + v_2)^2 = c^2,$$

dessen Achse durch den Punkt $(-v^1, -v^2, o)$ geht. Dieser stellt für $x'_1 \equiv x_1$, $x'_2 \equiv x_2$ den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt (o,o,o) zur Zeit $t = 0$ von den Werten zur Zeit $t = -1$ dar.

Das Streichen der Vertikalbeschleunigung in den Ausgangsgleichungen bewirkt also, daß sich Störungen in der Vertikalen jetzt mit unendlich großer Geschwindigkeit, dagegen in der Horizontalen noch immer mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die aus der Windgeschwindigkeit und der adiabatischen Schallgeschwindigkeit resultiert.

Da sich für das die x_3 - Achse enthaltende und deshalb doppelt charakteristische Flächenelement $t =$ const der Rang der Matrix nur um 1 erniedrigt, erhält man in ihm nur eine Verträglichkeitsbedingung. Da die Flächenelemente durch G 3 Verträglichkeitsbedingungen liefern, hat man also (man benötigt wegen der 5 gesuchten Funktionen 5 Bedingungen) eine zu wenig und ein Charakteristikenverfahren ausgehend von Werten zur Zeit $t =$ const ist deshalb nicht möglich*).

2. Streichen der Gesamtbeschleunigung

Mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ergibt sich $C^N \equiv 0$.
Würde es sich um ein lineares System mit konstanten Koeffizienten handeln, so könnte aus dem identischen Verschwinden von C^N der Schluß gezogen werden, daß jede der gesuchten Funktionen einer Einzeldifferentialgleichung niedrigerer Ordnung als 5 genügt.

Im Anschluß an eine Arbeit von Rellich (14) ist hier zu vermuten, daß statt eines charakteristischen Kegels 5. Ordnung ein Kegel niedrigerer Ordnung dessen Rolle übernimmt. Für 2 unabhängige Veränderliche ist diese Aussage allgemein, für mehr als 2 unabhängige Veränderliche für halblineare Systeme von Rellich bewiesen.

Wie Hinkelmann (15) an anderer Stelle gezeigt hat, genügt in unserem Falle z. B. p bereits einer Differentialgleichung 3. Ordnung, so daß auch der charakteristische Kegel von 3. Ordnung wird. Da der Fall des Verschwindens der Gesamtbeschleunigung vom meteorologischen Standpunkt aus uninteressant ist, soll auf diesen nicht weiter eingegangen werden.

3. Transformation auf p-System

Die Annahme der Gültigkeit der hydrostatischen Gleichung $\frac{\partial p}{\partial z} = -g\varrho$, (wir schreiben künftig an Stelle von x_1, x_2, x_3 auch x, y, z) läßt eine bemerkenswerte Transformation des Gleichungssystems (1) zu, die im allgemeinen zu einer einfacheren Formulierung der Gesetzmäßigkeiten führt und deshalb künftig benutzt werden möge.

Sie besteht darin, daß die Variablen z und p ihre Rollen als unabhängige und abhängige Variable vertauschen und ist im einzelnen von Eliassen (16) durchgeführt worden.

An Stelle von (1 — 5) erhält man jetzt mit einer unwesentlichen Vernachlässigung

$$\frac{du}{dt} + g\frac{\partial z}{\partial x} = fv$$
$$\frac{dv}{dt} + g\frac{\partial z}{\partial y} = -fu \qquad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}$$
$$g\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\varrho} \qquad j = o$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = o$$
$$\omega - c^2\frac{d\varrho}{dt} = o.$$

Als unabhängige Koordinaten werden nun betrachtet x, y, p, t, als abhängige Variable

$$u = \frac{dx}{dt},\ v = \frac{dy}{dt},\ \omega = \frac{dp}{dt},\ \varrho,\ z.$$

Nach Festlegung einer Anfangsmannigfaltigkeit $\varphi = o$ und Einführung neuer Koordinaten x, y, p, $\varphi = \varphi$ (x, y, p, t) erhält man

$$\begin{aligned}
Lu_\varphi + \varphi_x g z_\varphi &= fv - \mathfrak{v}\cdot\nabla_\varphi u - g\frac{\delta z}{\delta x} = b_1\\
Lv_\varphi + \varphi_y g z_\varphi &= -fu - \mathfrak{v}\cdot\nabla_\varphi v - g\frac{\delta z}{\delta y} = b_2\\
\varphi_p g z_\varphi &= -\frac{1}{\varrho} \qquad - g\frac{\delta z}{\delta p} = b_3\\
\varphi_x u_\varphi + \varphi_y v_\varphi + \varphi_p \omega_\varphi &= -\left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta p}\right) = b_4\\
-c^2 L\varrho_\varphi &= -\omega + c^2\mathfrak{v}\cdot\nabla_\varphi \varrho = b_5
\end{aligned}$$

mit:

$$\mathfrak{v}\cdot\nabla_\varphi \equiv u\frac{\delta}{\delta x} + v\frac{\delta}{\delta y} + \omega\frac{\delta}{\delta p}$$
$$L \equiv u\varphi_x + v\varphi_y + \omega\varphi_p + \varphi_t$$

und die Gleichung des charakteristischen Kegels wird:

$$C^N \equiv \begin{vmatrix} L & o & o & o & gx' \\ o & L & o & o & gy' \\ o & o & o & o & gp' \\ x' & y' & p' & o & o \\ o & o & o & -c^2L & o \end{vmatrix} = c^2 g L^3 p'^2 = o$$

mit $L \equiv t' + ux' + vy' + \omega p'$. Die Form ist also wieder parabolisch ausgeartet. Der zu diesem System gehörige Normalenkegel zerfällt

*) Beim Übergang zu einem System mit p als unabhängiger Variable, wie er in B 3 vorgenommen wird, erniedrigt sich der Rang der entsprechenden Matrix für $t =$ const um 2 und man erhält 2 Verträglichheitsbedingungen. Wir lassen es dahingestellt, ob die auf anderem Wege — z. B. A. Eliassen: The quasistatic equations of motion with pressure as independent variable, Geofys. Publ. 17, 3. Abschn. I, 3. — gewinnbare sogenannte Richardson'sche Gleichung, die gleichfalls nur Ableitungen in $t =$ const enthält, die fehlende Verträglichkeitsbedingung hier ersetzen kann.

Die Richardson'sche Gleichung lautet im Falle verschwindender Wärmezufuhr:

$$\frac{\partial v^3}{\partial x_3} = -v^i\frac{\partial}{\partial x_i}\ln\vartheta - \frac{1}{\varrho}(\varrho v^i)_{x_i} + \frac{g}{\varkappa p}\int_{x_3}^{\infty}(\varrho v^i)_{x_i}dx_3, \quad \vartheta = \text{Const}\ p^{\frac{1}{\varkappa}-1}\cdot\varrho$$

a) in die dreifach zählende Ebene $L = 0$,

b) in die zweifach zählende Ebene $p' = 0$.
Entsprechend artet der Strahlenkegel aus in

a) die dreifach zählende Gerade G: ($x' = \lambda u$, $y' = \lambda v$, $p' = \lambda\omega$, $t' = \lambda$)
und

b) die doppelt zählende p′-Achse.
Infolge dieser Ausartung des Strahlenkegels sind keine sich auf eine allgemeine Theorie stützende Aussagen über Abhängigkeitsgebiete usw. mehr möglich. Auch ein Grenzübergang wie unter 1) ist hier nicht durchführbar.

Prinzipiell gibt es für dieses System ein Charakteristikenverfahren, wie folgende Überlegungen zeigen:

a) Man betrachte ein beliebiges Flächenelement durch G ($x = \lambda u$, $y = \lambda v$, $p = \lambda\omega$, $t = \lambda$) (σ_1, σ_2, σ_3 beliebig, jedoch $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \neq 0$)

$$\varphi \equiv \sigma_1 (x - ut) + \sigma_2 (y - vt) + \sigma_3 (p - \omega t) = 0.$$

Die charakteristische Matrix wird für dieses

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g\sigma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g\sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g\sigma_3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat also auf jeden Fall den Rang 2, da mindestens ein $\sigma_i \neq 0$. Man erhält deshalb für jedes solche Flächenelement 3 Verträglichkeitsbedingungen.

b) Man betrachte ein beliebiges Flächenelement durch die p-Achse (σ_1, σ_2, σ_4 beliebig, jedoch $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_4^2 \neq 0$)

$$\varphi \equiv \sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_4 t = 0; \; L = \sigma_1 u + \sigma_2 v + \sigma_4.$$

Die charakteristische Matrix wird für dieses

$$\begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 & g\sigma_1 \\ 0 & L & 0 & 0 & g\sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2L & 0 \end{pmatrix}$$

und hat, wie man durch Streichen der 3. Zeile und Spalte erkennt, im allgemeinen den Rang 4. Lediglich für $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_4 \neq 0$ wird der Rang 3 und man erhält demzufolge 2 Verträglichkeitsbedingungen, nämlich $b_3 = 0$ und $b_4 = 0$.

Letzterer Fall ist aber gerade der in der Meteorologie interessierende. $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_4 \neq 0$ bedeutet $\varphi \equiv t = \text{const}$ als Anfangsmannigfaltigkeit, während sich mit $b_3 = 0$ und $b_4 = 0$ hydrostatische Grundgleichung und Kontinuitätsgleichung als Verträglichkeitsbedingungen einstellen.

Zusammen mit den 3 Verträglichkeitsbedingungen unter a) reichen diese dann zur Bestimmung der 5 unbekannten Funktionswerte in einem neuen Punkt aus. Wegen der oben schon erwähnten Ausartung des Strahlenkegels müssen die dem Charakteristikenverfahren zu Grunde zu legenden Maschenverhältnisse (s. Teil I) jedoch auf eine andere Weise beschafft werden. Für die Anfangsmannigfaltigkeit $\varphi \equiv t = \text{const}$ liegt natürlich ein charakteristisches Anfangswertproblem vor.

C. Quasigeostrophische Betrachtungsweise

Bekanntlich darf die Kontinuitätsgleichung nicht als verträglich mit der geostrophischen Windrelation betrachtet werden, wenn man vernünftige Resultate erhalten will. Das liegt daran, daß der horizontale Divergenzterm $\nabla \cdot \mathfrak{v}$ geostrophisch nicht approximiert wird. Wir wollen deshalb von einem modifizierten Gleichungssystem ausgehen, das dadurch entsteht, daß an Stelle der Kontinuitätsgleichung der sog. E r t e l sche Wirbelsatz (17) eingeführt wird, der durch eine Kombination der Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung entsteht, und der den Divergenzterm nicht mehr explicit enthält: Er schreibt sich — mit einer nur unwesentlichen Vernachlässigung — im p-System:

$$\text{(10)} \quad \frac{d}{dt}\left[\eta\frac{\partial}{\partial p} + (\mathfrak{k}\times\mathfrak{V}_p)\cdot\nabla\right]\psi = \left[\eta\frac{\partial}{\partial p} + (\mathfrak{k}\times\mathfrak{V}_p)\cdot\nabla\right]\frac{d}{dt}\psi - \mathfrak{k}\cdot\left(\nabla\psi\times\nabla\frac{1}{\varrho}\right)$$

Hierin bedeutet ψ eine beliebige skalare Größe,

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p \mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p \mathfrak{j},$$

$$\eta \equiv \mathfrak{k}\cdot(\nabla \times \mathfrak{V}) + f,$$

$\mathfrak{V}\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ horizontaler Windvektor.

Die skalare Gleichung (10) wird in ausreichender Näherung als verträglich betrachtet mit der geostrophischen Windbeziehung

$$\text{(7, 8)} \quad \mathfrak{V} = \mathfrak{k}\times\frac{1}{f}\nabla gz$$

und der statischen Grundgleichung

$$\text{(9)} \quad gz_p = -\frac{1}{\varrho}.$$

Als 5. Gleichung tritt die Adiabatenbeziehung hinzu:

$$\text{(11)} \quad \frac{dp}{dt} \equiv \omega = c^2\frac{d\varrho}{dt},$$

oder, wenn $\vartheta = \text{const}\; p^{\frac{1}{\varkappa}}\varrho^{-1}$ eingeführt wird,

$$\frac{d\ln\vartheta}{dt} = 0.$$

Wird über ψ als Funktion der abhängigen Variablen verfügt, so entsteht ein bestimmtes Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Funktionen u, v, ω, ϱ, z in Abhängigkeit von x, y, p, t.

1. Barotroper Fall

a) Ableitung der Gleichung des Problems

Wir betrachten vorerst durch Elimination der Koordinate p ein dreidimensionales Problem, auf das man geführt wird durch die Annahme, daß sich die Atmosphäre barotrop verhält, daß also ϱ eine eindeutige Funktion von p ist.

Dann gilt $\nabla\varrho = \nabla p = 0$.

Weiterhin setzen wir $\psi \equiv p$ und erhalten mit $\frac{dp}{dt} = \omega$ aus (10)

$$\text{(10')} \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta\omega_p + (\mathfrak{k}\times\mathfrak{V}_p)\cdot\nabla\omega.$$

Wegen (7, 8, 9) und der Barotropieannahme ist

$$\mathfrak{V}_p = 0.$$

Damit vereinfacht sich obige Gleichung und wir erhalten

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta\omega_p.$$

Mit $\mathfrak{V}_p = 0$ ist auch $\eta_p = \frac{\partial}{\partial p}\frac{d\eta}{dt} = 0$. Wir wollen jetzt durch Integration der obigen Gleichung über die Koordinate p zwischen den Grenzen $p = 0$ und $p = p^*$ (Luftdruckwert am Erdboden) diese eliminieren. Mit der Grenzbedingung $\omega\,(p = 0) = 0$ — kinematische Grenzbedingung für die Obergrenze der Atmosphäre — ergibt sich

$$p^*\frac{d\eta}{dt} = \eta\omega^*.$$

Betrachten wir die Erdoberfläche nahezu als eben, so verschwindet an der Fläche p^* die Vertikalgeschwindigkeit $\frac{dz}{dt}$ d. h.

$$(z_t + \mathfrak{V}\cdot\nabla z + \omega z_p)^{\cdot} = 0.$$

Da $\mathfrak{V}$ senkrecht auf ∇z steht, ergibt dies

$$\omega^{\cdot} = -\dot{\left(\frac{z_t}{z_p}\right)} = g\varrho^{\cdot} z_t^{\cdot}$$

und man erhält mit der Abkürzung $H \equiv \frac{p}{g\varrho^{\cdot}}$

$$\frac{d\eta}{dt} - \frac{\eta}{H} z_t^{\cdot} = 0, \quad \eta \approx \frac{g}{f}\nabla^2 z + f.$$

Führt man den rechts stehenden Ausdruck für η in $\frac{d\eta}{dt}$ ein, so entsteht eine Differentialgleichung für die abhängige Variable z:

$$\nabla^2 z_t + \mathfrak{V}\cdot\nabla\nabla^2 z + \mathfrak{V}\cdot\nabla f - \frac{f\eta}{gH}(z_t)^{\cdot} = 0.$$

Im allgemeinen ist der letzte Term vernachlässigbar; wir wollen deshalb dafür näherungsweise setzen:

$$a^2\frac{f\eta}{gH} z_t, \quad a^2 = \frac{z_t^{\cdot}}{z_t},$$

und erhalten schließlich mit $\frac{a^2 f\eta}{gH} \equiv \mu^2 \approx \text{const}$

$$\nabla^2 z_t + \mathfrak{V}\cdot\nabla\nabla^2 z + \mathfrak{V}\cdot\nabla f - \mu^2 z_t = 0, \tag{12}$$

worin man sich noch den Vektor $\mathfrak{V}\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}$ durch

$$u = -\frac{g}{f}z_y, \quad v = \frac{g}{f}z_x$$

eliminiert denke.

Die Gleichung (12) wird in dieser Form häufig für numerische Wetterprognosen benutzt. Linearisierung mit der Grundströmung $\mathfrak{V} = Ui$, $U = \text{const}$, führt auf die lineare Gleichung 3. Ordnung in z

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2 z + \beta\frac{\partial z}{\partial x} - \mu^2\frac{\partial z}{\partial t} = 0, \quad \beta = \frac{df}{dy} \approx \text{const.} \tag{12'}$$

Der nur höchste (hier dritte) Ableitungen der abhängigen Variablen enthaltende Hauptteil der Differentialgleichung (12) bestimmt Typ und charakteristische Mannigfaltigkeiten der Gleichung und schreibt sich

$$z_{xxt} + z_{yyt} + u z_{xxx} + v z_{xxy} + u z_{xyy} + v z_{yyy}.$$

Die zugehörige homogene Form bzw. die Gleichung des Normalenkegels lautet:

$$C^N \equiv (x'^2 + y'^2)(t' + ux' + vy') = 0.$$

Da C^N von 3. Ordnung und nicht parabolisch ausgeartet ist, ist die Differentialgleichung (12) von hyperbolischem Typ.

Der Normalenkegel zerfällt wiederum in

$$C_I^N \equiv L \equiv t' + ux' + vy' = 0,$$

das ist eine einfach zählende Ebene, deren Normale den zugehörigen ausgearteten Strahlenkegel

$$C_I^S: \frac{x'}{t'} = u, \quad \frac{y'}{t'} = v \quad \text{definiert}$$

und in

$$C_{II}^N \equiv x'^2 + y'^2 = 0.$$

C_{II}^N ist also identisch mit der zweifach zu wertenden t'-Achse.

Der zugehörige Strahlenkegel ist in die zweifach zu wertende Ebene $t' = 0$ entartet.

b) Zweidimensionales Charakteristikenverfahren bei Annahme der Unabhängigkeit von y

Zur Vorbereitung der dreidimensionalen Behandlung untersuchen wir die Lösung der Gleichung (12') bei Annahme der Unabhängigkeit von y.

Die Differentialgleichung (12') vereinfacht sich dann zu

$$z_{xxt} + u z_{xxx} + \beta z_x - \mu^2 z_t = 0,$$

die sich mit Hilfe der die Funktionen u^0, u^1, u^{11} definierenden Relationen

$$u^0 \equiv z$$
$$u^1 \equiv z_x$$
$$u^{11} \equiv z_{xx}$$

in das System von 3 Gleichungen für die 3 Funktionen u^0, u^1, u^{11}

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u^0 &= u^1\\
\frac{\partial u^1}{\partial x} &= u^{11}\\
-\mu^2\frac{\partial}{\partial t}u^0 + \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u^{11} &= -\beta u^1
\end{aligned}$$

überführen läßt.

Dabei verwenden wir hochgestellte Indizes, um später die Argumentstellen durch angehängte untere Indizes bezeichnen zu können.

Für das charakteristische Gebilde obigen Systems findet man

$$C^N \equiv \begin{vmatrix} x_1' & 0 & 0 \\ 0 & x_1' & 0 \\ -\mu^2 x_2' & 0 & x_2' + ux_1' \end{vmatrix} = x_1'^2(x_2' + ux_1') = 0.$$

Der Normalenkegel besteht also

a) aus der doppelt zählenden x'_2-Achse

b) aus der Geraden $x'_2 + ux'_1 = 0$.

Der Strahlenkegel besteht aus

a) der doppelt zählenden x'_1-Achse

b) aus der Geraden $x'_1 - ux'_2 = 0$.

Wählen wir im Falle a) $\varphi \equiv t = \text{const}$ als Ausgangsmannigfaltigkeit, so werden charakteristische Matrix und die rechten Seiten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\delta u^0}{\delta x} + u^1 \\ -\frac{\delta u^1}{\delta x} + u^{11} \\ -u\frac{\delta u^{11}}{\delta x} - \beta u^1 \end{pmatrix}.$$

Da der Rang der Matrix 1 ist, hat man 2 Verträglichkeitsbedingungen, nämlich

$$\text{a)} \begin{cases} \frac{\delta u^0}{\delta x} = u^1 \\ \frac{\delta u^1}{\delta x} = u^{11} \end{cases}.$$

Wählen wir im Falle b) $\varphi \equiv x - ut = \text{const}$ als Ausgangsmannigfaltigkeit und betrachten $\frac{\partial}{\partial x}$ als herausführende Ableitung, so werden charakteristische Matrix und die rechten Seiten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u\mu^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^{11} \\ -\beta u^1 + \mu^2\frac{\delta u^0}{\delta t} - \frac{\delta u^{11}}{\delta t} \end{pmatrix}.$$

Die in Teil I C vorgeführten Überlegungen liefern — der Rang der Matrix hat sich um 1 erniedrigt — als Verträglichkeitsbedingung

$$\text{b)} \ \beta u^1 - \mu^2\frac{\delta u^0}{\delta t} + \frac{\delta u^{11}}{\delta t} + \mu^2 u u^1 = 0.$$

Wir nehmen an $u = \text{const}$ und können dann zur näherungsweisen Integration ein Gitter aus kongruenten Parallelogrammen zugrunde legen (Fig. 18).

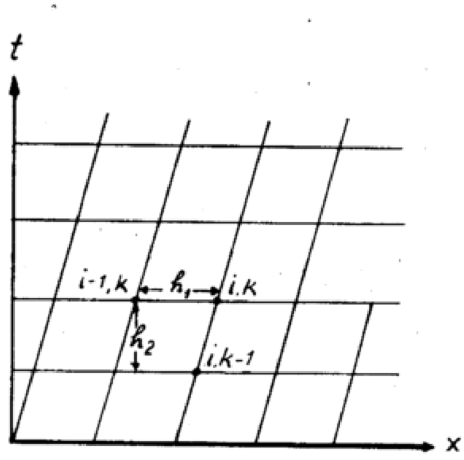

Fig. 18

Die Gitterpunkte bezeichnen wir durch Doppelindizes (i, k), h_1 und h_2 haben die aus der Zeichnung ersichtliche Bedeutung.

Die als Differenzengleichungen geschriebenen Verträglichkeitsbedingungen werden damit

$$u^0_{ik} = u^0_{i-1,k} + h_1 u^1_{i-1,k}$$

$$u^1_{ik} = u^1_{i-1,k} + h_1 u^{11}_{i-1,k}$$

$$u^{11}_{ik} = u^{11}_{i,k-1} + \mu^2 (u^0_{i-1,k} - u^0_{i,k-1}) + h_1 \mu^2 u^1_{i-1,k} - h_2 (\beta + \mu^2 u)\, u^1_{i,k-1}\,.$$

Die Schrittweiten h_1, h_2 sind so zu wählen, daß das zu obigen Formeln gehörige ε-Schema stabil ausfällt. h_1 und h_2 hängen demnach von der Größe von μ^2 und $\beta + \mu^2 u$ ab.

c) **Mögliche Problemstellungen**

Nach den Ergebnissen von Teil I ist bei charakteristischen Anfangswertproblemen die Vorgabe weiterer Beziehungen für die gesuchten Funktionen auf einer transversalen Mannigfaltigkeit notwendig.

(1) Es sei etwa auf der doppelt charakteristischen Anfangsmannigfaltigkeit $t = 0$ u^0 und damit auch u^1, u^{11}, auf der dazu transversalen Mannigfaltigkeit g u^0 und u^1 vorgegeben (Fig. 19).

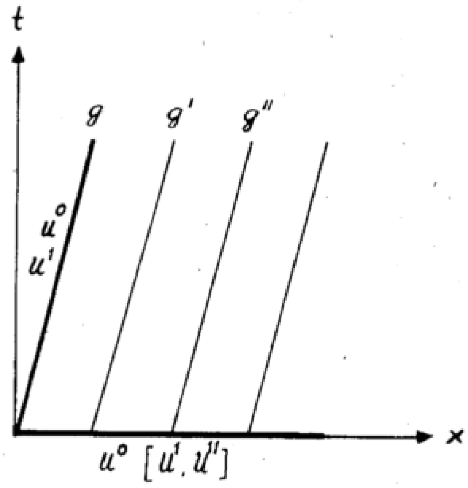

Fig. 19

Dann genügt u^{11} vermöge

$$\frac{\delta}{\delta t} u^{11} = -(\mu^2 u + \beta)\, u^1 + \mu^2 \frac{\delta}{\delta t} u^0$$

längs g einer Differentialgleichung 1. Ordnung, liegt also durch Vorgabe eines Anfangswertes ebenfalls fest.

Näherungsweise Integration der letzten Gleichung ergibt

$$u^{11}_{ik} = u^{11}_{i,k-1} + \mu^2 (u^0_{ik} - u^0_{i,k-1}) - h_2 (\mu^2 u + \beta)\, u^1_{i,k-1}\,,$$

und daraufhin folgen die Werte von u^0 und u^1 längs g' vermöge der Beziehungen

$$u^0_{ik} = u^0_{i-1,k} + h_1\, u^1_{i-1,k}$$

$$u^1_{ik} = u^1_{i-1,k} + h_1\, u^{11}_{i-1,k}\,.$$

Damit ist die Ausgangssituation wieder hergestellt und man gelangt nun auf dieselbe Weise zu den Funktionswerten auf g'' usw.

(2) Eine Vorgabe wie unter (1) ist jedoch für unser meteorologisches Beispiel wenig sinnvoll; angepaßter wäre die Vorgabe des zeitlichen Verlaufs der gesuchten Funktionen z. B. an der Stelle $x = 0$, die nach den allgemeinen Ergebnissen von Teil I das Problem auch zu einem bestimmten macht.

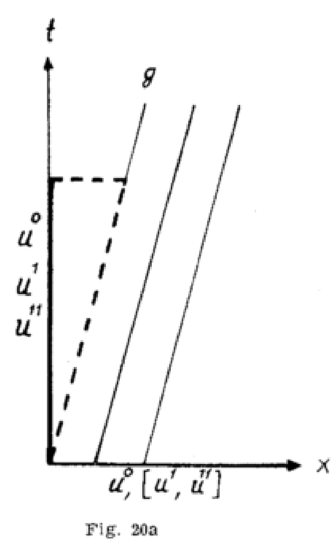

Fig. 20a

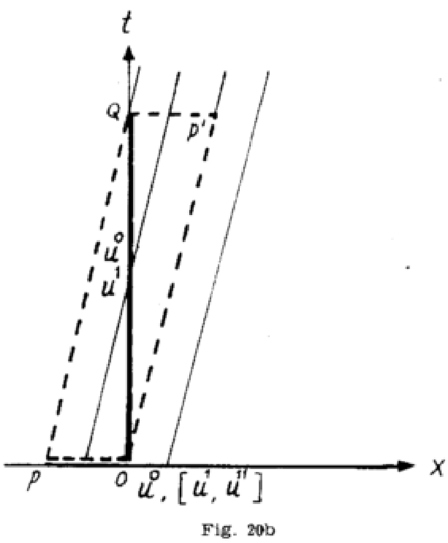

Fig. 20b

Denn zunächst folgen aus den Funktionswerten auf $x = 0$ die Werte im gestrichelt eingezeichneten Dreieck (nichtcharakteristisches Anfangswertproblem) (Fig. 20a). Da damit die Werte auf g bekannt sind, ist dieser Fall hiermit auf (1) zurückgeführt.

Die Vorgabe von u^{11} auf $x = 0$ läßt sich vermeiden, wenn statt dessen eine Vorgabe von u^0 auf der rückwärtigen Verlängerung der x-Achse erfolgt (Fig. 20b). Diese bestimmt zusammen mit den auf $x = 0$ gegebenen Werten u^0 und u^1 die Funktionswerte im Dreieck POQ und darüber hinaus im Parallelogramm POP'Q, womit das Problem wieder auf den Fall (1) zurückgeführt ist.

(3) Jedoch ist auch noch die Vorgabe des zeitlichen Verlaufs von u^1 für $x = 0$ eine einschneidende Forderung. Es zeigt sich, daß man diese ersetzen kann durch die Vorgabe des zeitlichen Verlaufs von u^0 an einer Stelle $x = a$. Dies führt auf eine ausgesprochene Anfangs-Randwertaufgabe, wie sie im Teil I bereits behandelt wurde.

Man teile etwa das Intervall (o, a) (Fig. 21) in n gleiche Teile, wozu (zusammen mit 0 und a) $n + 1$ Teilpunkte notwendig sind.

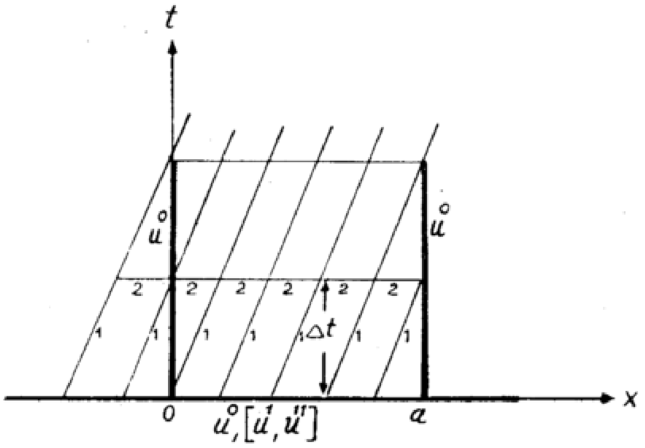

Fig. 21

Da $u^0(x = 0)$ und $u^0(x = a)$ als bekannt vorausgesetzt werden, sind im Niveau $\triangle t$ insgesamt $3\,(n + 1) - 2$ Funktionswerte zu bestimmen.

Wollte man mit Funktionswerten des Intervalls $0 \leq x \leq a$ allein auskommen, so ständen zur Berechnung zur Verfügung

n Verträglichkeitsbedingungen auf den Schrägstrecken

2n Verträglichkeitsbedingungen auf den Horizontalstrecken,

zusammen also nur 3 n Gleichungen für $3\,n + 1$ Unbekannte.

Ist jedoch u^0 auch links vom Punkte 0 bekannt, so wird eine weitere Verträglichkeitsbedingung auf einer Schrägstrecke benutzbar, ohne daß sich die Zahl der Unbekannten erhöht, das Problem wird also bestimmt. Zur Berechnung der Funktionswerte im Niveau $2\triangle t$ muß ein weiterer Funktionswert auf der Geraden $t = 0$ vorgegeben werden usw. (Fig. 21). Ist u nicht konstant, so läßt sich zwar noch $h_2 = \triangle t$, aber nicht mehr $h_1 = \triangle x$ konstant halten. Man erhält dann ein Netz von im allgemeinen inkongruenten Trapezen. Im Prinzip bleibt das Integrationsverfahren jedoch unverändert.

Das zweidimensionale Charakteristikenverfahren zeigt, daß für die Bestimmung der gesuchten Funktion z in einem Intervall $0 \leq x \leq a$ zu einem Zeitpunkt t_0 die Vorgabe der Anfangswerte z (x, 0) für $0 \leq x \leq a$ und der Randwerte z (o, t) und z (a, t) für $0 \leq t \leq t_0$ nicht ausreicht, sondern daß die Anfangswerte z (x, 0) auf einem größeren Intervall $x_0 \leq x \leq x_1$ vorgegeben werden müssen, dessen genaue Abgrenzung von u abhängt.

Entsprechendes ist auch bei der dreidimensionalen Aufgabe zu erwarten.

d) Dreidimensionales Charakteristikenverfahren zur Integration von (12)

Die bei Vorgabe geeigneter Anfangs- und Randwerte zu integrierende Differentialgleichung lautet:

$$(12') \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 z + \beta\frac{\partial z}{\partial x} - \mu^2\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

Um das Verfahren bequemer auseinandersetzen zu können, sei vorerst wieder $u =$ const angenommen. (12') läßt sich in ein System aufspalten von 5 Differentialgleichungen 1. Ordnung für die 5 unbekannten Funktionen

$$u^0 \equiv z, \; u^1 \equiv z_x, \; u^{11} \equiv z_{xx}, \; u^{12} \equiv z_{xy}, \; u^{22} \equiv z_{yy}.$$

Das System wird

$$\frac{\partial u^0}{\partial x} - u^1 = 0, \quad \frac{\partial u^{11}}{\partial y} - \frac{\partial u^{12}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial x} - u^{11} = 0, \quad \frac{\partial u^{12}}{\partial y} - \frac{\partial u^{22}}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)(u^{11} + u^{22}) + \beta u^1 - \mu^2\frac{\partial u^0}{\partial t} = 0.$$

Die dem System zugeordnete charakteristische Form wird mit $L \equiv x'_3 + ux'_1$

$$C^N \equiv \begin{vmatrix} x'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x'_2 & -x'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x'_2 & -x'_1 \\ -\mu^2 x'_3 & 0 & L & 0 & L \end{vmatrix} = x_1'^2\, L(x_1'^2 + x_2'^2).$$

Der Normalenkegel C^N des Systems zerfällt also

in die doppelt zählende Ebene $x'_1 = 0$,

in die einfach zählende Ebene $x'_3 + ux'_1 = 0$,

in die doppelt zählende x'_3-Achse.

Dementsprechend zerfällt auch der Strahlenkegel C^S in 3 ausgeartete Teile, nämlich

in die doppelt zählende x'_1-Achse,

die einfach zählende Gerade G: $x'_1 = \lambda u$,

$x'_2 = 0$, $x'_3 = \lambda$ und

die doppelt zählende Ebene $x'_3 = 0$.

Infolge dieser Ausartung können für die Abgrenzung von Bestimmtheitsbereichen usw keine allgemeinen Sätze herangezogen werden, sondern es ist erforderlich, die nötigen Aussagen aus den aufzustellenden Differenzengleichungen selbst abzulesen. Um ein Charakteristikenverfahren zur Anwendung zu bringen, überdecken wir den (x, y, t)-Raum mit 2 Scharen charakteristischer Ebenen, nämlich

den Ebenen $\varphi \equiv t =$ const,

den Ebenen $\psi \equiv x\text{-}ut =$ const.

In den Ebenen $t =$ const als Anfangsmannigfaltigkeit wird die charakteristische Matrix und die rechten Seiten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu^2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\delta u^0}{\delta x} + u^1 \\ -\frac{\delta u^1}{\delta x} + u^{11} \\ -\frac{\delta u^{11}}{\delta y} + \frac{\delta u^{12}}{\delta x} \\ -\frac{\delta u^{12}}{\delta y} + \frac{\delta u^{22}}{\delta x} \\ -\beta u^1 - u\frac{\delta u^{11}}{\delta x} - u\frac{\delta u^{22}}{\delta x} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix erhält in diesem Falle also den Rang 1 und die Verträglichkeitsbedingungen werden begrifflich identisch mit den ersten 4 Gleichungen des gegebenen Systems:

$$\frac{\delta u^0}{\delta x} - u^1 = 0, \quad \frac{\delta u^{11}}{\delta y} - \frac{\delta u^{12}}{\delta x} = 0,$$

$$\frac{\delta u^1}{\delta x} - u^{11} = 0, \quad \frac{\delta u^{12}}{\delta y} - \frac{\delta u^{22}}{\delta x} = 0.$$

In den Ebenen $x - ut = \text{const}$ als Ausgangsmannigfaltigkeit wird die charakteristische Matrix und die rechten Seiten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \mu^2 u & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^{11} \\ -\frac{\delta u^{11}}{\delta y} \\ -\frac{\delta u^{12}}{\delta y} \\ -\frac{\delta}{\delta t}(u^{11}+u^{22}) - \beta u^1 + \mu^2\frac{\delta u^0}{\delta t} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix hat den Rang 4 und man erhält als Verträglichkeitsbedingung nach Teil I C:

$$-\frac{\delta}{\delta t}(u^{11} + u^{22}) - \beta u^1 + \mu^2\frac{\delta u^0}{\delta t} - \mu^2 u u^1 = 0.$$

Integriert ergeben die Verträglichkeitsbedingungen

$$(V_1) \qquad u^0_{ijk} = u^0_{i-1,jk} + h_1 u^1_{i-1,jk},$$

$$(V_2) \qquad u^1_{ijk} = u^1_{i-1,jk} + h_1 u^{11}_{i-1,jk},$$

$$(V_3) \qquad u^{12}_{ijk} = u^{12}_{i-1,jk} + \frac{1}{2}\frac{h_1}{h_2}(u^{11}_{i-1,j+1,k} - u^{11}_{i-1,j-1,k}) \text{ bzw.}$$

$$u^{12}_{ijk} = u^{12}_{i-1,jk} + \frac{h_1}{h_2}(u^{11}_{i-1,j+1,k} - u^{11}_{i-1,j,k})$$

am vorderen Rand des Integrationsbereichs, wenn die Bildung des zentralen Differenzenquotienten unmöglich ist,

$$(V_4) \qquad u^{22}_{ijk} = u^{22}_{i-1,jk} + \frac{1}{2}\frac{h_1}{h_2}(u^{12}_{i-1,j+1,k} - u^{12}_{i-1,j-1,k}) \text{ bzw.}$$

$$u^{22}_{ijk} = u^{22}_{i-1,jk} + \frac{h_1}{h_2}(u^{12}_{i-1,j+1,k} - u^{12}_{i-1,j-1,k}) \quad \text{und}$$

$$(V_5) \qquad u^{11}_{ijk} = u^{11}_{i,j,k-1} - (u^{22}_{ijk} - u^{22}_{i,j,k-1}) \cdot h_3(\mu^2 u + \beta)u^1_{i,j,k-1}$$

$$+ \mu^2(u^0_{ijk} - u^0_{i,j,k-1}).$$

Dabei kennzeichnen (i, j, k) den Gitterpunkt des (x, y, t)-Raumes, an dem der Funktionswert zu bilden ist. Die Maschenlängen h_1, h_2, h_3 haben die aus der nachfolgenden Figur 22 zu entnehmende Bedeutung.

Die zur Integration benutzten Maschenlängen h_1, h_2, h_3 sind wiederum so zu wählen, daß das zu obigen Formeln gehörige ε-Schema stabil ausfällt.

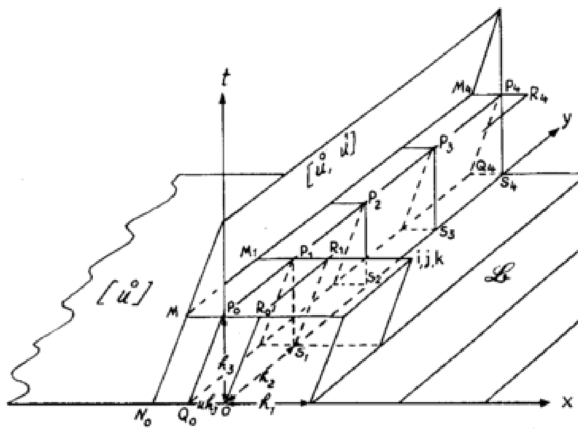

Fig. 22

Wir betrachten folgende, zur Problemstellung (2) auf Seite 20 analoge Aufgabe:

Über einem Bereich $\mathfrak{B}(x, y)$ — er ist hier quadratisch bzw. rechteckig angenommen — den zeitlichen Verlauf der Funktion z zu finden, wenn gegeben sind
 $z\,(x, y, 0)$ über $\mathfrak{B}$ hinaus
 $z\,(0, y, t)$ und $z_x\,(0, y, t)$.*)

Auf unser System übersetzt sind also gegeben
 u^0 für $t = 0$
 u^0 und u^1 für $x = 0$.

Lösung:

Auf Grund der Vorgaben sind für $t = 0$, also auch im Punkt Q_0 bekannt u^0, $(u^1, u^2, u^{11}, u^{12}, u^{22})$.

In $x = 0$, also auch im Punkt P_0 sind bekannt u^0, u^1, (u^2, u^{12}, u^{22}).

(Das hier formal hinzugenommene $u^2 = \frac{\partial u^0}{\partial y}$ wird nirgends benützt).

Mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingung V_5 folgt daraus der Wert von u^{11} im Punkt P_0 und entsprechend in jedem Punkt P_i. Sodann liefern die Verträglichkeitsbedingungen $V_1 - V_4$ für $h_1 = uh_3$ die Werte von u^0, u^1, u^{12}, u^{22} in den Punkten R_0, R_1 . . .

Der Wert von u^{11} in diesen Punkten folgt wieder durch Anschreiben von V_5 für die Verbindungslinien S_iR_i

Damit ist die dem vorgeschlagenen Charakteristikenverfahren zugrunde liegende Ausgangskonfiguration hergestellt. (Die Funktionen sind auf 2 charakteristischen Mannigfaltigkeiten, nämlich $t = 0$ und $x\text{-}ut = 0$ gegeben) und die Beziehungen V_1-V_5

*) Der Fehler der im folgenden geschilderten numerischen Integration wird sich im allgemeinen verkleinern, wenn u^0 auch noch am vorderen ($y = 0$) bzw. hinteren ($y = b$) Rand vorgegeben wird. Dafür ist dann ein Teil der für vorderen bzw. hinteren Rand angeschriebenen (und im folgenden benutzten) Verträglichkeitsbedingungen entbehrlich.

liefern jetzt unmittelbar die Funktionswerte in der Schicht $t = h_3$ über $\mathfrak{B}$.

Um die Funktionswerte in der nächsthöheren Schicht $t = 2h_3$ zu erhalten, muß man sich zunächst die Werte auf der Reihe $M_0, M_1 \ldots$ verschaffen. Das gelingt für u^0, u^1, u^{12}, u^{22} dadurch, daß man in V_1-V_4 i mit i-1 vertauscht und $h_1 < 0$ nimmt, während man u^{11} mittels der Nachbarreihe N_i von Q_i ebenso wie in den Punkten P_i erhält. Es folgen schließlich ebenso wie beim Schritt von $t = 0$ auf $t = h_3$ die Werte in der Schicht $t = 2h_3$ usw.

Man sieht, daß für die Bestimmung der Funktionswerte über $\mathfrak{B}$ zu einem Zeitpunkt t_0 die Anfangswerte in einem vergrößerten Bereich $\mathfrak{B}'$ bekannt sein müssen. Die Vergrößerung hängt ab von t_0 und u.

Analog zu der Aufgabenstellung (3) auf Seite 21 läßt sich auch hier die Vorgabe von u^1 auf der Ebene $x = 0$ ersetzen durch die Vorgabe von u^0 z. B. auf der Ebene $x = a$. Weiter wollen wir, im Anschluß an die Bemerkung in der Fußnote zur vorhergehenden Problemstellung, u^0 auch auf $y = 0$ und $y = b$ vorgeben.

Gegeben sei also u^0 in den Ebenen $t = 0$, $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$,

und es sei der zeitliche Verlauf von z zu bestimmen über

$$\mathfrak{B}\ (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b).$$

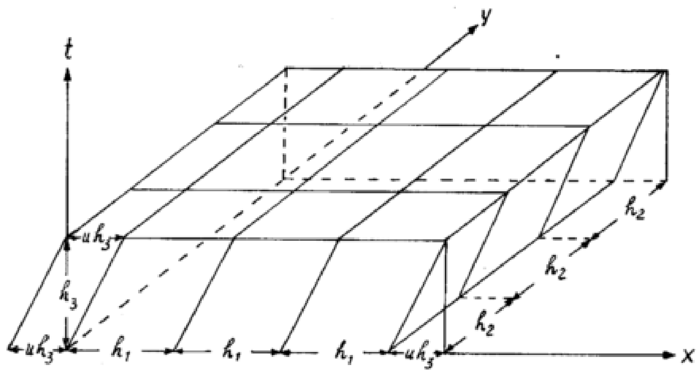

Fig. 23

Dazu sei, wie die Figur 23 näher zeigt, $0 \leq x \leq a$ in n, $0 \leq y \leq b$ in m Intervalle eingeteilt (in der Figur ist $n = 4$, $m = 3$). Das Niveau $t = h_3$ enthält dann $(n + 1) \cdot (m + 1)$ Punkte, in deren jedem 5 Funktionswerte zu bestimmen sind. Infolge der Vorgaben sind an $2(n + m)$ Randpunkten u^0, an $2(n + 1)$ Randpunkten u^1 und u^{11} sowie an $2(m + 1)$ Randpunkten u^{22}, insgesamt also $2(2m + 3n + 3)$ Funktionswerte bekannt.

Wir zeigen durch eine Abzählung, daß das durch die Figur beschriebene Vorgehen auf ebensoviel Gleichungen führt, als Funktionswerte gesucht werden. Man verwendet an Verträglichkeitsbedingungen

je eine längs jeder nicht auf y = o oder y = b verlaufenden Schräglinie, (V_5)

Zusammen $(n + 1)(m-1)$

je 2 längs jeder inneren Masche $\triangle x$ (V_1, V_2) „ $2n(m-1)$

je 2 für jede Masche der Gestalt $\frac{h_2}{h_2}\Big|\overline{h_1}$ (V_3, V_4) „ $2n(m-1)$

je 2 für die vorderen und hinteren Randmaschen der Gestalt $h_2\underline{|\ \ }_{h_1}$ und $h_2\overline{|\ \ }^{h_1}$ „ $2n \cdot 2$

Dazu bekannte Funktionswerte „ $2(2m + 3n + 3)$

Das gibt zusammen $5(n + 1)(m + 1)$ Bedingungen, also ebensoviel Bestimmungsgleichungen wie Unbekannte.

Damit ist gezeigt, daß auch beim dreidimensionalen Problem für die Bestimmung der Lösungen über einem Bereich $\mathfrak{B}$ neben der Kenntnis des zeitlichen Verlaufs auf Rändern von $\mathfrak{B}$ die Kenntnis der Anfangswerte auf einem $\mathfrak{B}$ umfassenden Bereich $\mathfrak{B}'$ notwendig ist. $\mathfrak{B}'$ ist abhängig von u und t_0 (dem Zeitpunkt, zu dem die Lösungen gesucht werden) und geht im Falle eines konstanten u einfach aus $\mathfrak{B}$ hervor, indem man den dem Wind zugewandten Rand von $\mathfrak{B}$ um ut_0 entgegen der Windrichtung verschiebt.

e) **Behandlung der nichtlinearisierten Gleichung (12)**

Auch für die Gleichung

$$(12)\qquad \nabla^2 z_t + \mathfrak{V}\cdot\nabla\nabla^2 z + \mathfrak{V}\cdot\nabla f - \mu^2 z_t = 0$$

oder ausgeschrieben

$$z_{xxt} + z_{yyt} + u(z_{xxx} + z_{xyy}) + v(z_{xxy} + z_{yyy}) + uf_x + vf_y - \mu^2 z_t = 0$$

$$\text{mit}\quad u = -\frac{g}{f} z_y,\ v = \frac{g}{f} z_x$$

ist prinzipiell ein Charakteristikenverfahren möglich. Wir schreiben sie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)(z_{xx} + z_{yy}) + \alpha_1 z_x - \alpha_2 z_y - \mu^2 z_t = 0,$$

$$\alpha_1 \equiv \frac{g}{f} f_y,\ \alpha_2 \equiv \frac{g}{f} f_x$$

und spalten sie mittels

$$\begin{array}{ll} u^0 \equiv z & u^{11} \equiv z_{xx} \\ u^1 \equiv z_x & u^{12} \equiv z_{xy} \\ u^2 \equiv z_y & u^{22} \equiv z_{yy} \end{array}$$

in folgendes System für 6 unbekannte Funktionen auf:

$$\frac{\partial u^0}{\partial x} - u^1 = 0,\ \frac{\partial u^1}{\partial x} - u^{11} = 0,\ \frac{\partial u^1}{\partial y} - \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u^{11}}{\partial y} - \frac{\partial u^{12}}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u^{12}}{\partial y} - \frac{\partial u^{22}}{\partial x} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)(u^{11} + u^{22}) - \alpha_2 u^2 + \alpha_1 u^1 - \mu^2 \frac{\partial u^0}{\partial t} = 0.$$

Die charakteristische Form des Systems wird:

$$C^N \equiv \begin{vmatrix} x_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2' & -x_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2' & -x_1' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2' & -x_1' \\ -\mu^2 x_3' & 0 & 0 & L & 0 & L \end{vmatrix} = x_1'^3 L(x_1'^2 + x_2'^2),$$

mit $L \equiv x_3' + ux_1' + vx_2'$.

Der Normalenkegel $C^N = 0$ besteht demnach
aus der dreifach zählenden Ebene $x_1' = 0$,
aus der einfach zählenden Ebene $L = 0$ und
aus der zweifach zählenden x_3'-Achse.

Entsprechend zerfällt der Strahlenkegel C^S in 3 ausgeartete Teile:
die dreifach zählende x_1'-Achse,
die Gerade $G \equiv \{x_1' = \lambda u,\ x_2' = \lambda v,\ x_3' = \lambda\}$ und
die zweifach zählende Ebene $x_3' = 0$.

Analog zu d) verwenden wir für ein Charakteristikenverfahren die charakteristischen Flächenelemente

$$\varphi \equiv t = \text{const}$$
$$\psi \equiv ux + vy - (u^2 + v^2)t = \text{const}.$$

In den Ebenen $\varphi = $ const wird der Rang der charakteristischen Matrix 1 und man erhält als Verträglichkeitsbedingungen die ersten 5 Gleichungen des Systems wieder:

$$\frac{\delta u^0}{\delta x} - u^1 = 0,\quad \frac{\delta u^1}{\delta x} - u^{11} = 0,\quad \frac{\delta u^1}{\delta y} - \frac{\delta u^2}{\delta x} = 0,$$
$$\frac{\delta u^{11}}{\delta y} - \frac{\delta u^{12}}{\delta x} = 0,\quad \frac{\delta u^{12}}{\delta y} - \frac{\delta u^{22}}{\delta x} = 0.$$

In den Ebenen $\psi = $ const hat die charakteristische Matrix für $u \neq 0$ den Rang 5 und man findet die Verträglichkeitsbedingung

$$\left[\left(\frac{\delta}{\delta t} + v\frac{\delta}{\delta y}\right)(u^{11} + u^{22}) + \alpha_1 u^1 - \alpha_2 u^2 - \mu^2 \frac{\delta u^0}{\delta t}\right] u +$$
$$+ \mu^2(u^2 + v^2)u^1 = 0.$$

Legt man der Integration ein rechteckiges Netz in der (x,y)-Ebene zugrunde, so verschiebt sich beim Übergang zum Niveau $t = h_3$ jeder Gitterpunkt in Richtung des örtlichen (u,v). Dadurch tritt eine Deformation des Netzes ein, die sehr komplizierte Differenzenformeln zur Folge hat. Da qualitativ die Verhältnisse wie unter d) fortbestehen, sehen wir von der Aufstellung expliziter Formeln ab.

2. Barokliner Fall

a) Ableitung der Gleichungen

Wir wollen uns nunmehr von der einschränkenden Annahme der Barotropie — $\varrho = \varrho\,(p)$ — wieder freimachen und betrachten künftig barokline Prozesse. Wir sehen wiederum den E r t e l schen Wirbelsatz als verträglich an mit den Gleichungen (7, 8, 9), wählen jedoch

$$\psi \equiv \ln\vartheta = \text{const} + \frac{1}{\varkappa}\ln p + \ln\frac{1}{\varrho}.$$

Für (10) erhält man wegen*) $\frac{d\psi}{dt} = 0,\ \nabla\psi \times \nabla\frac{1}{\varrho} = 0$

(13) $$\frac{d}{dt}[\eta\psi_p + (\mathfrak{k}\times\mathfrak{V}_p)\cdot\nabla\psi] = 0.$$

Aus (7, 8) folgt zunächst $\mathfrak{V}_p = \mathfrak{k} \times \frac{1}{f}\nabla(gz)_p$ und

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{V}_p = -\frac{1}{f}\nabla(gz)_p$$

Aus der Definition $\psi \equiv \ln\vartheta$ folgt weiter

$$\nabla\psi \equiv \nabla\ln\vartheta = \nabla\ln\frac{1}{\varrho} = -\varrho\nabla(gz)_p,$$

so daß

$$(\mathfrak{k}\times\mathfrak{V}_p)\cdot\nabla\psi = \frac{\varrho}{f}(\nabla gz_p)^2.$$

Für (13) erhält man mit der Abkürzung

$$s \equiv -\psi_p = -\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial p} \quad \text{(statisches Stabilitätsmaß)}$$

(13') $\frac{d}{dt}[-s\eta + \frac{\varrho}{f}(\nabla gz_p)^2] = 0$ oder nach Ausführung der Differentiation

$$s\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{ds}{dt} - \frac{2\varrho}{f}\nabla gz_p\frac{d}{dt}\nabla gz_p - (\nabla gz_p)^2\frac{d}{dt}\frac{\varrho}{f} = 0.$$

Durch Substitutionsprozesse läßt sich das System (7, 8, 9, 11, 13) auf eine einzige Gleichung mit der abhängigen Variablen z = z (x, y, p, t,) reduzieren. Wir beschränken uns vorerst lediglich auf die Betrachtung des Hauptteils dieser Gleichung, das sind Terme, die lediglich höchste (hier dritte) Ableitungen von z nach den unabhängigen Koordinaten enthalten. Wir vermerken:

$$\eta = \mathfrak{k}\cdot(\nabla\times(\mathfrak{k}\times\frac{1}{f}\nabla gz)) + f = \frac{1}{f}\nabla^2 gz + \nabla\frac{1}{f}\cdot\nabla gz + f,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{f}\frac{d}{dt}\nabla^2 gz + \ldots,$$

wobei die Punkte, wie auch in den folgenden Relationen, an Stelle von Termen mit Ableitungen niedriger als III. Ordnung stehen,

$$s \equiv -\frac{\partial\ln\vartheta}{\partial p} = -\frac{1}{\varkappa p} - \varrho\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\varkappa p} + \varrho(gz)_{pp},$$
$$\frac{ds}{dt} = \varrho\frac{d}{dt}gz_{pp} + \ldots,$$
$$\frac{1}{\varrho} = -gz_p,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\varrho} = \ldots.$$

Die Koeffizienten u, v, ω des Differentialoperators $\frac{d}{dt}$ enthalten nur bis zu 2. Ableitungen von z, denn

$$u = -\frac{1}{f}gz_y,\quad v = \frac{1}{f}gz_x.$$

ω läßt sich aus (11) $\frac{d\psi}{dt} = \psi_t + \mathfrak{V}\cdot\nabla\psi + \omega\psi_p = 0$ eliminieren; man erhält

$$\omega = -\frac{g}{s}(gz_{pt} + \mathfrak{V}\cdot\nabla gz_p) = \ldots.$$

Der Hauptteil der resultierenden Differentialgleichung III. Ordnung in z läßt sich aus (13) nach Substitution von $\frac{d\eta}{dt}, \frac{ds}{dt}$ schreiben

$$\frac{d}{dt}(\nabla^2 gz) + \frac{\eta\varrho f}{s}\frac{d}{dt}gz_{pp} - \frac{2\varrho}{s}\nabla gz_p\cdot\frac{d}{dt}\nabla gz_p + \ldots$$

Mit der Abkürzung $L \equiv t' + ux' + vy' + \omega p'$ erhält man für die homogene Form bzw. den Normalenkegel daraus

$$C^N \equiv L(x'^2 + y'^2 + \frac{\eta\varrho f}{s}p'^2 - \frac{2\varrho}{s}gz_{px}x'p' - \frac{2\varrho}{s}gz_{py}y'p')$$

mit $C_I^N \equiv L = 0$ (einwertig)

und $C_{II}^N \equiv x'^2 + y'^2 + \frac{\eta\varrho f}{s}p'^2 - \frac{2\varrho}{s}(gz_{px}x'p' + gz_{py}y'p') = 0.$

*) Unabhängig davon, ob $\psi \equiv \ln\vartheta$ oder $\psi \equiv p$ gesetzt wird, läßt sich das System (7—11) auf eine einzige Differentialgleichung III. Ordnung in z reduzieren. Beide Systeme führen jedoch nicht zum gleichen Ergebnis; allerdings treten nur Unterschiede in vernachlässigbaren Termen auf.

C_{II}^N läßt sich, wie die Berechnung der Hesse'schen Determinante

$$H \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{\varrho}{s} gz_{px} \\ 0 & 1 & -\frac{\varrho}{s} gz_{py} \\ -\frac{\varrho}{s} gz_{px} & -\frac{\varrho}{s} gz_{py} & \frac{\eta \varrho f}{s} \end{vmatrix} = \frac{\varrho f}{s^2}[s\eta - \frac{\varrho}{f}(\nabla gz_p)^2] > 0^*$$

zeigt, nicht auf weniger als 3 Veränderliche transformieren. Die Form C_{II}^N ist, wie die Umformung

$$C_{II}^N \equiv (x' - \frac{\varrho}{s} gz_{px} p')^2 + (y' - \frac{\varrho}{s} gz_{py} p')^2 + \frac{\varrho f}{s^2}(s\eta - \frac{\varrho}{f}(\nabla gz_p)^2) p'^2 = 0$$

ergibt, positiv definit, stellt also im (x', y', p', t')-Raum die doppelt zählende t'-Achse dar. Da in C_I^N t' vorkommt, läßt sich C^N insgesamt nicht auf weniger als 4 Veränderliche umschreiben. C^N und damit die betrachtete Differentialgleichung ist also nicht parabolisch ausgeartet und, da von ungerader Ordnung, hyperbolisch.

Der Strahlenkegel zerfällt in die beiden ebenfalls ausgearteten Bestandteile

1. die doppelt zählende Ebene $t' = 0$
2. die einfach zählende Gerade $x' = ut'$, $y' = vt'$, $p' = \omega t'$.

Für die Entwicklung eines Charakteristikenverfahrens wollen wir uns jedoch mit einer einfacheren Fassung des Ertelschen Wirbelsatzes begnügen und betrachten an Stelle (13) lediglich die vereinfachte Gleichung $\frac{d}{dt}(s\eta) = 0$**).

Ausführung der Differentiation ergibt

$$(14) \qquad \frac{d\eta}{dt} + \frac{\eta}{s}\frac{ds}{dt} = 0.$$

Wir benutzen weiterhin $\frac{d\eta}{dt} \approx \frac{1}{f}\frac{d}{dt}\nabla^2 gz + \frac{df}{dt}$

(hierin sind Glieder mit Ableitungen von $\frac{1}{f}$ vernachlässigt) und erhalten

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(-\frac{1}{\varkappa p} + \varrho gz_{pp}) = + \frac{1}{\varkappa p^2}\omega + \frac{d\varrho}{dt} gz_{pp} + \varrho \frac{d}{dt} gz_{pp}.$$

Wegen $\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\omega$

und aus der Definition für s ergibt sich daraus

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s}{p}\sigma\omega + \varrho\frac{d}{dt} gz_{pp}, \quad \text{mit } \sigma \equiv \frac{1}{s\varkappa}\left[s + \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{\varkappa})\right].$$

Für (14) erhält man deshalb ausführlich

$$(14') \qquad \frac{d}{dt}\nabla^2 gz + \frac{\eta\varrho f}{s}\frac{d}{dt} gz_{pp} + f\frac{df}{dt} + \frac{\eta\sigma f}{p}\omega = 0.$$

Die charakteristische Form der Gleichung (14') wird

$$C^N \equiv L(x'^2 + y'^2 + \frac{\eta\varrho f}{s} p'^2) \text{ mit } L \equiv t' + ux' + vy' + \omega p'.$$

Sie ist für $\frac{\eta\varrho f}{s} \neq 0$ hyperbolisch.

Beschränken wir uns auf den Fall $\frac{\eta\varrho f}{s} > 0$, so zerfällt der Normalenkegel C^N wiederum

1. in die einfach zählende Ebene $L = 0$
2. in die doppelt zählende t'-Achse.

Der Strahlenkegel zerfällt in die beiden ausgearteten Bestandteile

1. die Gerade $G \equiv \{x' = u\lambda,\ y' = v\lambda,\ p' = \omega\lambda,\ t' = \lambda\}$
2. die doppelt zählende Ebene $t' = 0$.

b) **Ansatz zu einem Charakteristikenverfahren**

Die Differentialgleichung (14') mit den Hilfsgrößen

$$s = -\frac{1}{\varkappa p} + \varrho gz_{pp}$$

$$\frac{1}{\varrho} = -gz_p$$

$$u = -\frac{1}{f} gz_y, \quad v = \frac{1}{f} gz_x, \quad \omega = -\frac{\varrho}{s}(gz_{pt} + \mathfrak{V}\cdot\nabla gz_p)$$

$$\eta = \frac{1}{f}\nabla^2 gz + \nabla\frac{1}{f}\cdot\nabla gz + f$$

$$\sigma = \frac{1}{\varkappa}(1 + \frac{1}{sp}(1 + \frac{1}{\varkappa}))$$

ließe sich als Differentialgleichung III. Ordnung in 4 unabhängigen Variablen durch Einführung der 10 voneinander verschiedenen 2. Ableitungen der gesuchten Funktion als neue unabhängige Veränderliche auf ein System von 10 Differentialgleichungen I. Ordnung umschreiben, um die für Systeme entwickelte Charakteristikentheorie zur Anwendung bringen zu können. Dabei ist es notwendig, während des Fortgangs der Rechnung die aufgeführten Hilfsgrößen laufend durch Integration der 2. Ableitungen wieder zu gewinnen.

Hier ist jedoch eine andere Aufspaltung in ein äquivalentes System möglich, bei der direkt einige im Verlauf der Integration ohnedies benötigte Terme als neue abhängige Veränderliche eingeführt werden. Wegen der speziellen Gestalt der Gleichung kommt man mit 9 gesuchten Funktionen aus. Es sind dies mit $\Phi = gz$

$$u^0 \equiv \Phi,\ u^1 \equiv \Phi_x,\ u^2 \equiv \Phi_y,\ u^3 \equiv \Phi_p,$$
$$u^{11} \equiv \Phi_{xx},\ u^{12} \equiv \Phi_{xy},\ u^{13} \equiv \Phi_{xp},\ u^{22} \equiv \Phi_{yy},\ u^{33} \equiv \Phi_{pp}.$$

Zwischen diesen bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial u^0}{\partial x} - u^1 = 0,\quad \frac{\partial u^1}{\partial x} - u^{11} = 0,\quad \frac{\partial u^1}{\partial y} - \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u^1}{\partial p} - \frac{\partial u^3}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u^{11}}{\partial y} - \frac{\partial u^{12}}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u^{11}}{\partial p} - \frac{\partial u^{13}}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u^{12}}{\partial y} - \frac{\partial u^{22}}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u^{13}}{\partial p} - \frac{\partial u^{33}}{\partial x} = 0$$

und die Differentialgleichung (14), in der man

$$\omega = -\frac{\varrho}{s}(gz_{pt} + \mathfrak{V}\cdot\nabla gz_p) = -\frac{\varrho}{s}\left(\frac{\partial u^3}{\partial t} + u\frac{\partial u^3}{\partial x} + v\frac{\partial u^3}{\partial y}\right)$$

einsetzt:

$$(15) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)(u^{11} + u^{22}) + \\ &\frac{\eta\varrho f}{s}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}\right)u^{33} - \\ &\frac{\eta\sigma f\varrho}{ps}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)u^3 + f\frac{df}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten u, v, η, s, σ, $\frac{df}{dt}$ enthalten keine Ableitungen der abhängigen Variabeln, für das in (15) explicit auftretende ω ist man jedoch gezwungen, einen Näherungsausdruck zu verwenden, der keine zeitliche Ableitung enthält (z. B. dürfte die Größenordnung von Φ_{pt} und $\mathfrak{V}\cdot\nabla\Phi_p$ gleich sein).

*) Der Ausdruck $s\eta - \frac{\varrho}{f}(\nabla gz_p)^2$ ist wegen (13') bei festgehaltenem Luftteilchen unabhängig von t und werde z. Zt. $t = 0 > 0$ vorausgesetzt.

**) Man gelangt zum gleichen Ergebnis, wenn man im Ertelschen Wirbelsatz $\psi = p$ setzt, was die Gleichung

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta\omega_p + (\mathfrak{k}\times\mathfrak{V}_p)\cdot\nabla\omega \text{ ergibt,}$$

hierin das Spatprodukt vernachlässigt und beachtet, daß wegen $\frac{d\ln\vartheta}{dt} = 0$ und $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial p}\cdot\nabla\ln\vartheta = 0$ folgt $\frac{1}{s}\frac{ds}{dt} = -\omega_p$.

Man erhält mit

$$\mu \equiv \frac{\eta \varrho \mathfrak{f}}{s},\ \mu^* \equiv \frac{\sigma}{p}\mu,$$

$$L \equiv x_4' + ux_1' + vx_2' + \omega x_3'$$

$$L^* \equiv x_4' + ux_1' + vx_2'$$

als Gleichung des charakteristischen Gebildes

$$C^N \equiv x_1'^6 L(x_1'^2 + x_2'^2 + \mu x_3'^2)$$

mit Hilfe der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2' & -x_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3' & 0 & -x_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2' & -x_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3' & 0 & -x_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2' & 0 & -x_1' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3' & 0 & -x_1' \\ 0 & 0 & 0 & -\mu^* L^* & L & 0 & 0 & L & \mu L \end{vmatrix} \equiv C^N.$$

Der Normalenkegel des Systems zerfällt also

1) in die 6-fach zählende Ebene $x_1' = 0$,
2) in die einfach zählende Ebene $L' = 0$,
3) in die doppelt zählende x_4'-Achse.

Der Strahlenkegel zerfällt entsprechend in die ausgearteten Bestandteile

1) die 6-fach zählende x_1'-Achse
2) die einfach zählende Gerade $G \equiv \lambda$ (u, v, ω, 1)
3) die 2-fach zählende Ebene $x_4' = 0$.

Für die Flächenelemente $\varphi \equiv t = \text{const}$ als Anfangsmannigfaltigkeit wird der Rang der charakteristischen Matrix 1 und man erhält die ersten acht Gleichungen des Systems als Verträglichkeitsbedingungen wieder.

Für die Flächenelemente $\varphi \equiv \omega x - up = 0$ durch die Gerade G ergibt sich entsprechend die Verträglichkeitsbedingung

$$\left(\frac{\delta}{\delta t} + u\frac{\delta}{\delta x} + v\frac{\delta}{\delta y}\right)(u^{11} + u^{22}) + \mu\left(\frac{\delta}{\delta t} + u\frac{\delta}{\delta x} + v\frac{\delta}{\delta y}\right)u^{33}$$

$$- \mu^*\left(\frac{\delta}{\delta t} + u\frac{\delta}{\delta x} + v\frac{\delta}{\delta y}\right)u^3 + f\frac{df}{dt} + \mu^* u\frac{\delta u^3}{\delta x}$$

$$- \mu^* \frac{(u)^2}{\omega}\left(\frac{\delta u^1}{\delta x} - u^{11}\right) = 0.$$

Denkt man sich ein schiefwinkliges Gitter derart gewählt, daß der Operation $\triangle t \cdot \frac{d}{dt}$ der Übergang i, j, k, l $\rightarrow$ i, j, k, l + 1 entspricht, so lassen sich vollkommen analoge Formeln zu den auf Seiten 22 angeführten Gleichungen aufstellen.

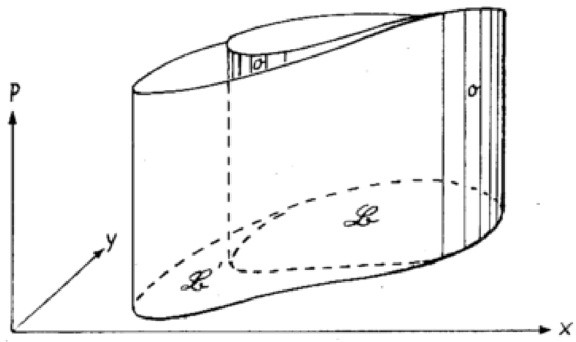

Fig. 24

Eine zu den Untersuchungen auf Seite 23 analoge Betrachtung wurde bisher nicht durchgeführt. Das Auftreten der Geraden G als Teil des Strahlenkegels läßt jedoch erwarten, daß zur Bestimmung der gesuchten Funktionen in einem Bereich $\mathfrak{B}$ des (x, y, p)-Raumes zur Zeit t_0 neben der Vorgabe des zeitlichen Verlaufs der gesuchten Funktion u^0 auf der Oberfläche $\mathfrak{O}$ des Bereichs die Vorgabe der Anfangswerte von u in einem $\mathfrak{B}$ umfassenden Bereich $\mathfrak{B}'$ erfordert, dessen Gestalt von t_0, u, v, ω abhängt (Fig. 24).

Literatur

1) Massau, J.: Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Gent (1900).

2) Oswatitsch, Kl.: Über die Charakteristikenverfahren der Hydrodynamik. Z. angew. Math. Mech. **25**, 195, 264 (1947).

3) Courant, R. u. Friedrichs, K. O.: Supersonic flow and shock waves. New York (1948) (insbesondere Kap. II.)

4) a) Sauer, R.: Dreidimensionale Probleme der Charakteristikentheorie partieller Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. **30**, 347 (1950).

b) Sauer, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Grundlehren der mathem. Wiss. Berlin **62** 153, (1952).

5) Beckert, H.: Über quasilineare hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Math. naturw. Kl. **97**, Nr. 5 (1950).

6) Courant, R. u. Hilbert D.: Methoden der mathematischen Physik **2**, 135, 307. Grundlehren der mathem. Wiss. Berlin **48**, (1937) und vorl. Arbeit, S. 6/7.

7) Courant, R., Friedrichs, K. O. und Lewy, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathemathischen Physik. Math. Ann. **100**, 32 (1928).

8) s. 6) **2**, 326 und die dort zitierten Arbeiten von Friedrichs und Lewy.

9) s. 6) **2**, Kap. 6.

10) s. 4) b) S. 153.

11) Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Grundlehren der math. Wiss. Berlin **60**, 218 (1951).

12) s. 6) **2**, 368.

13) s. 11) S. 205.

14) Rellich, F.: Über die Reduktion gewisser ausgearteter Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Math. Ann. **109**, 784 (1937).

15) Hinkelmann, K.: Horizontale Massendivergenz als Funktion des Luftdruckfeldes. Meteor. Rdsch. **4**, 53 (1951).

16) Eliassen, A.: The quasi-static equation of motion with pressure as independent variable. Geofys. Publ. **17**, No. 3 (1949)).

17) Ertel, H.: Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. Meteor. Z. **59**, 277 (1942).