

# **Berichte**

des

# **Deutschen Wetterdienstes**

**Nr. 30**  
(Band 5)

DK 551.511.6:551.588.3

## **Über den Einfluß der Orographie auf den meridionalen, makroturbulenten Impulstransport in der Atmosphäre**

von

**Friedrich Wippermann**

(mit 11 Abbildungen und 2 Tabellen im Text)

Diese Untersuchung wurde unterstützt vom Air Research  
and Development Command United States Air Forces  
über dessen europäisches Amt unter Kontrakt No. AF  
(514) — 735 — C

Bad Kissingen 1957

## Inhalt

	Seite
Zusammenfassung .....	3
1. Einleitung .....	3
2. Die stationäre Lösung als zeitlicher Mittelwert .....	4
3. Die Notwendigkeit einer Berücksichtigung des meridionalen makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße .....	6
4. Die Berücksichtigung der zeitlichen Fluktuationen des Grundstromes U durch die Methode der Aneinanderreihung kurzfristiger stationärer Zustände .....	7
5. Die Größe der Teilintervalle $t_1$ .....	8
6. Die Verteilungsfunktion $\Phi(s)$ für die Häufigkeit des Auftretens bestimmter Geschwindigkeiten des Grundstromes .....	9
7. Zusammenstellung aller Vereinfachungen und Voraussetzungen	11
8. Die Berechnung der Einflußfunktion $G(x)$ .....	11
9. Berechnung der zeitlich gemittelten Höhenlage der 500-mb-Fläche entlang 45° N bei verschiedenen Häufigkeitsverteilungen der zonalen Strömungsgeschwindigkeit .....	12
a) Auswertung der $G(s_0, d, x)$ .....	13
b) Berechnung der $\hat{z}(x)$ .....	15
10. Diskussion der Resultate .....	15
11. Die Berechnung des geostrophischen, meridionalen, makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße .....	16
12. Die Berechnung der Einflußfunktion $I(x)$ .....	18
13. Berechnung des geostrophischen, meridionalen, makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße für verschiedene Häufigkeitsverteilungen des Grundstromes U. Vergleich der Resultate mit Beobachtungsergebnissen .....	19
14. Die Auswahl von Breitenkreissektoren, die für den meridionalen (planetarischen) Impulsfluß repräsentativ sind .....	20
15. Tabellen .....	21
16. Schlußbemerkung .....	22
17. Literaturangaben .....	23
18. Symboltafel .....	24
19. Anhang .....	25

Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Johannes-Gutenberg-Universität zu Mainz als  
Habilitationsschrift angenommen.

Anschrift des Verfassers: Dr. F. Wippermann, Offenbach/M., Löwenstr. 46

## Zusammenfassung

Fast alle quantitativen Untersuchungen, die sich mit zeitlichen Mittelwerten einer atmosphärischen Feldgröße befassen, machen die Auswertung von Termen notwendig, welche den turbulenten Transport irgendeiner Quantität darstellen. Diese Turbulenzterme werden zumeist durch die Korrelation zwischen den Abweichungen der Geschwindigkeitskomponenten von ihrem zeitlichen Mittelwert einerseits und denjenigen der zu transportierenden Quantität andererseits beschrieben. In theoretischen Untersuchungen vernachlässigt man solche Turbulenzterme im allgemeinen aus Gründen der mathematischen Schwierigkeiten, indem man den zeitlichen Mittelwert mit dem zum Falle der Stationarität gehörenden Wert identifiziert; in empirischen Untersuchungen erfordert die Auswertung der Einzeldaten zur Bestimmung solcher Turbulenzterme einen sehr hohen Arbeitsaufwand.

Es wird eine Methode angegeben, die es gestattet, durch Aneinanderreihung von in Teilintervallen nahezu gültigen stationären Zuständen die Turbulenzterme näherungsweise zu berechnen. Hierzu ist lediglich die Kenntnis einiger statistischer Maßzahlen bezüglich des zeitlichen Auftretens der zu transportierenden Quantität erforderlich. Die Größe der Teilintervalle wird mit  $2\frac{1}{2}$  bis 5 Tagen bestimmt.

Das Verfahren wird zur Lösung von zwei meteorologischen Problemen angewendet:

- A. Die Berechnung zeitlicher Mittelwerte der Höhen der 500-mb-Fläche unter Berücksichtigung des Einflusses der Orographie macht die Auswertung eines Termes der Form  $(\bar{U}^{-1})^T \bar{v}^T$  erforderlich. Mit dem vorgenannten Verfahren wird die Berechnung der Höhenwerte unter Berücksichtigung dieses Termes für drei verschiedene Häufigkeitsverteilungen des Auftretens der Zonalströmung durchgeführt. Die Rechenergebnisse werden mit den Beobachtungsdaten verglichen.
- B. In hemisphärischen Bilanzuntersuchungen des Strömungsimpulses (im Rahmen der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation) wird stets eine Berücksichtigung des meridionalen, makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße  $\bar{U}^T \bar{v}^T$  erforderlich. Auch diese Größe wird für verschiedene Häufigkeitsverteilungen der Zonalströmung  $\bar{U}$  berechnet und mit den Ergebnissen der Auswertung von Einzelbeobachtungen verglichen.

Es ist nicht möglich, den über einen geschlossenen Breitenkreis hinweggehenden, planetarischen Anteil dieses turbulenten Flusses mit dem vorgenannten Verfahren zu berechnen, sondern vielmehr nur die orographisch bedingten (sich über einen ganzen Breitenkreis aufhebenden) Abweichungen hiervon. Hierdurch wird es möglich, Entscheidungen darüber zu treffen, inwieweit der aus Beobachtungsdaten ermittelte turbulente Impulsfluß über einen Breitenkreis-sektor als repräsentativ für den über den geschlossenen Breitenkreis hinweggehenden planetarischen Fluß angesehen werden kann. Es erweist sich, daß die beiden mit Beobachtungsdaten am besten besetzten Sektoren, nämlich der amerikanische (ca.  $120^\circ$  W —  $60^\circ$  W) und der europäische (ca.  $20^\circ$  W —  $60^\circ$  E) als repräsentativ gelten können.

Die Anwendung des Verfahrens setzt die Existenz stationärer Lösungen voraus, wodurch in den meisten

Fällen wiederum eine vorherige Linearisierung (in der räumlichen Abhängigkeit) notwendig wird. Die Lösung der beiden Probleme A und B muß somit auf die Anwendung eines eindimensionalen atmosphärischen Modells beschränkt bleiben.

## 1. Einleitung

Eine Weiterentwicklung der sogenannten Numerischen Vorhersagemethodik macht einen Einschluß auch derjenigen Effekte in die Prognosegleichung erforderlich, die durch die orographischen Hindernisse bedingt sind. In Abhängigkeit von der Anströmungsrichtung des Hindernisses, von der Windgeschwindigkeit, von der vertikalen und horizontalen Windscherung, von der statischen Stabilität und anderem mehr sind diese Effekte von Fall zu Fall sehr verschieden. Aus diesem Grunde erscheint es zweckmäßig, zunächst zu studieren, wie sich der Effekt eines orographischen Hindernisses im zeitlichen Mittel auswirkt; diese Problemstellung gehört zugleich in den mit „Allgemeine Zirkulation der Atmosphäre“ bezeichneten Fragenkomplex.

In zeitlichen Mittelkarten (langjährige Monats- oder Jahreszeitenmittel) läßt die Druckverteilung über der Nordhalbkugel eine zonale, west-östliche Strömung erkennen, der einige Störungen in meridionaler Richtung überlagert sind. Sofern lediglich die horizontale Verteilung dieser Störungen von Interesse ist, verwendet man zur beobachtungsmäßigen Ermittlung derselben am besten zeitliche Mittelkarten der Höhenlage der 500-mb-Fläche. Diese Druckfläche liegt sehr nahe dem äquivalentbarotropen Niveau ( $\sim 560$  mb), in welchem — im zeitlichen Mittel — die wirklichen Strömungsverhältnisse gerade den über die Vertikale gemittelten gleichen. Langjährige Mittelkarten (Normalkarten) der absoluten Topographie der 500-mb-Fläche vermögen also in guter Annäherung die „normale“, horizontale Verteilung dieser Abweichungen von der rein zonalen Strömung wiederzugeben.

Derartige Normalkarten der absoluten Topographie der 500-mb-Fläche (US-Wheater Bureau (38)) lassen im Winter zwei große Tröge, einen etwa entlang der amerikanischen Ostküste, den anderen entlang der asiatischen Ostküste erkennen. Die beiden korrespondierenden Rücken finden wir unmittelbar vor der westeuropäischen, bzw. der westamerikanischen Küste. Ein dritter, schwacher und weniger gut ausgeprägter Trog befindet sich über dem europäischen Rußland. Dieser letztere verschwindet im Sommer gänzlich, während die anderen beiden Tröge gegenüber dem Winter nur unwesentliche Verschiebungen aufweisen.

Gerade dieser Umstand bestärkte eine Reihe von Autoren in der Auffassung, daß die der Zonalströmung überlagerten Störungen durch den Einfluß der orographischen Hindernisse, vornehmlich des Kettengebirges der Rocky Mountains und des zentralasiatischen Gebirgsmassives hervorgerufen seien. In einer Reihe von Untersuchungen versuchte man dies quantitativ zu erklären (Haurwitz (14), Charney und Eliassen (6), Bolin (4), Berkofsky (2)). Im Gegensatz hierzu standen Untersuchungen, in denen versucht wurde, diese Störungen auf den Einfluß der Wärmequellen und -senken und deren horizontale Anordnung zurückzuführen (Sutcliffe (37), Wippermann (41)) oder aber sie durch die gegenüber der freien Atmosphäre stärkere Aufheizung der Luftmassen über den großen

Hochplateaus (F l o h n (11)) zu deuten. Es ließ sich inzwischen zeigen (W i p p e r m a n n (42), wie auch insbesondere S m a g o r i n s k y (32), daß beide Effekte — orographische Hindernisse wie auch Wärmequellen und Wärmesenken — von der gleichen Größenordnung sind. Die Einfluß der Wärmequellen ist in den bodennahen Schichten etwas größer, nimmt aber mit der Höhe rascher ab als der Einfluß der orographischen Hindernisse.

In allen genannten Untersuchungen wurde jedoch so verfahren, als ob die sich in den Normalkarten ausprägenden und zu erklärenden Störungen der rein zonalen Zirkulation durch eine (orographische oder wärmequellenmäßige) Beeinflussung derjenigen Strömung deutbar sei, die sich ebenfalls aus diesen Normalkarten ergibt. In Wirklichkeit wird aber nicht an jedem Termin des Mittelbildungszeitraumes die gleiche, zonale Normalströmung durch orographische Hindernisse oder Wärmequellen beeinflusst; vielmehr bedingt ein von Termin zu Termin stark wechselndes, mehr oder weniger verwirbeltes Strömungsfeld ebenfalls ständig wechselnden Einfluß, der nur im Mittel dem Resultat der Normalkarten entspricht.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, auch die Wirkung der zeitlichen Änderungen der Strömung auf die in Normalkarten sich ausprägenden meridionalen Störungen zu berücksichtigen. Dabei kann dies zunächst nur für den Fall geschehen, daß eine — allerdings mit der Intensität zeitlich schwankende — zonale Strömung durch orographische Hindernisse beeinflusst wird.

**2. Die stationäre Lösung als zeitlicher Mittelwert**

Aus Gründen der mathematischen Einfachheit hat man hingegen in allen vorgenannten quantitativen Untersuchungen den zeitlichen Mittelwert mit der stationären Lösung der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen (bzw. Vorticitygleichung) identifiziert. Dabei wird eine zumeist stillschweigende Vernachlässigung von makroturbulenten Termen vorgenommen, wie das an der im folgenden abzuleitenden Gleichung ersichtlich wird.

Ausgehend von der Vorticitygleichung für eine reibungsfreie Strömung in einem Koordinatensystem, das den Druck p als vertikale Koordinate (E l i a s s e n (7)) aufweist,

$$[1] \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \eta + \omega \frac{\partial \eta}{\partial p} + \mathbf{k} \cdot [\nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p}] = -\eta \nabla \mathbf{v}$$

— die Bedeutung der Symbole ist aus der Symboltafel ersichtlich — und der Kontinuitätsgleichung

$$[2] \quad \nabla \mathbf{v} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

erhält man nach einer Mittelbildung über den Druck nach folgender Art

$$[3] \quad \overline{(\dots)} = \frac{1}{P_0} \int_0^{P_0} (\dots) dp$$

die Gleichung

$$[4] \quad \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t} + \overline{(\mathbf{v} \nabla) \eta} = \frac{f}{P_0} \omega_0 \quad \text{da } \omega(p=0) = 0$$

Hierbei ist der vertikale Vorticitytransport  $\omega \partial \eta / \partial p$  sowie der Drehterm  $\mathbf{k} \cdot [\nabla \omega \times \partial \mathbf{v} / \partial p]$  als klein gegenüber den anderen Termen vernachlässigt; im Divergenzterm der rechten Seite von [1] ist ferner wegen  $\zeta \ll f$  die Vorticity der Absolutgeschwindigkeit durch diejenige der Führungsgeschwindigkeit ersetzt worden. Mittels der statischen Grundgleichung erhält man

$$[5] \quad \omega_0 = \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) p - g_0 w_0 \approx \frac{\partial p}{\partial t} - g_0 w_0$$

wobei berücksichtigt ist, daß

$$(\mathbf{v} \nabla) p \approx (\mathbf{v}_g \nabla) p = 0.$$

Mit dem von Charney und Eliassen (6) vorgeschlagenen Ansatz für die Vertikalgeschwindigkeit am Boden

$$[6] \quad w_0 = (\mathbf{v}_0 \nabla) h = \kappa (\mathbf{v} \nabla) h$$

und der barischen Tendenzgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g_0 \frac{\partial z}{\partial t}$$

erhält man:

$$[7] \quad \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t} - \frac{f}{H} \frac{\partial z_0}{\partial t} + \overline{(\mathbf{v} \nabla) \eta} = -\frac{f}{H} \kappa \overline{(\mathbf{v} \nabla) h}$$

Mit  $(\dots) = \overline{(\dots)} + (\dots)^*$  ergibt sich für

$$\overline{(\mathbf{v} \nabla) \eta} = \overline{(\mathbf{v} \nabla) \overline{\eta}} + \overline{(\mathbf{v}^* \nabla) \eta^*},$$

wobei der letzte Ausdruck den Sutcliffe'schen Entwicklungsterm darstellt, welcher den Grad der Baroklinität wiedergibt. Bei Anwendung der Gleichung [7] auf das äquivalentbarotrope Niveau  $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  ( $p = 560$  mb)  $\approx \mathbf{v}$  ( $p = 500$  mb), der Verwendung eines Koordinatensystems, bei dem die positive x-Achse nach Osten und die positive y-Achse nach Norden weist und einer Linearisierung der Gleichung [7] durch Aufteilung in einen konstanten zonalen Grundstrom und überlagerte kleine Störungen (deren Produkte als sehr klein vernachlässigt werden können)

$$u = \overline{u} = U, \quad v = v', \quad z = z'$$

$$\eta = \eta' \quad (\text{da } \partial U / \partial y \equiv 0 \text{ angenommen})$$

$$h = \overline{h} + h' \quad (\text{mit } \overline{\partial h / \partial x} \equiv 0)$$

erhält man

$$[8] \quad \frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{f}{H} \frac{\partial z'_0}{\partial t} + U \frac{\partial z'}{\partial x} + U^* \left( \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^* + v' \beta = -\frac{f}{H} \kappa U \frac{\partial h'}{\partial x}$$

Hierin ist wie in Gleichung [6] angenommen, daß sich nicht nur die Windgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , sondern auch die Tendenz  $\partial z / \partial t$  sich linear mit der Höhe (bzw. mit dem Druck) ändert und der Reduktionsfaktor  $\kappa$  den betreffenden Koeffizienten angibt. Eine Multiplikation mit  $U^{-1}$  und die Anwendung der folgenden Mittelbildung auf Gleichung [8]

$$[9] \quad \overline{(\dots)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\dots) dt$$

unter Berücksichtigung von

$$\overline{(\dots)} = \overline{(\dots)} + \overline{(\dots)^*} \quad \text{mit } \overline{(\dots)^*} \equiv 0$$

ergibt:

$$[10] \quad U^{-1} \frac{\partial z'}{\partial t} - \kappa \frac{f}{H} U^{-1} \frac{\partial z'_0}{\partial t} + \frac{\partial z'}{\partial x} + U^{-1} \overline{[U^* \left( \frac{\partial z'}{\partial x} \right)^*]} + \beta \overline{(U^{-1}) v'} = -\frac{f \kappa}{H} \frac{\partial h'}{\partial x}$$

Es läßt sich zeigen, daß hierin die beiden ersten Terme für einen hinreichend großen Mittelbildungszeitraum verschwinden. Sie können geschrieben werden

$$[11] \quad \overline{U^{-1} \frac{\partial z'}{\partial t} - \kappa \frac{f}{H} U^{-1} \frac{\partial z'_0}{\partial t}} = \overline{U^{-1} \left\{ \frac{\partial z'}{\partial t} - \kappa \frac{f}{H} \frac{\partial z'_0}{\partial t} \right\}} + \overline{(U^{-1})^* \left( \frac{\partial z'}{\partial t} \right)^*} - \kappa \frac{f}{H} \overline{(U^{-1})^* \left( \frac{\partial z'_0}{\partial t} \right)^*}$$

worin die Klammer des ersten Ausdruckes verschwindet. Es ändern sich nämlich die atmosphärischen Feld-

funktionen nicht monoton mit der Zeit, so daß für hinreichend große Zeiten

$$\frac{\partial}{\partial t} (\dots) = 0$$

Der zweite und dritte Term sind zeitliche Korrelationen zwischen dem Reziprokwert des zonalen Grundstromes und der Tendenz  $\partial z' / \partial t$ . (Bei Benutzung der geostrophischen Approximation ist nämlich

$$\frac{\partial z'}{\partial t} \approx \frac{\partial \zeta'_g}{\partial t} = \frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial z'}{\partial t}$$

Diese beiden Terme können auf Grund der synoptischen Erfahrung vernachlässigt werden, welche besagt, daß zwar eine Korrelation zwischen der Zonalströmung und der Intensität der Tendenzgebiete existiert, jedoch nicht in einer solchen Weise, daß Steig- oder Fallgebiete bevorzugt werden, d. h.

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{U}-1)^* (\partial z' / \partial t)^*} &= 0, \text{ aber} \\ \overline{(\bar{U}-1)^* (|\partial z' / \partial t|)^*} &< 0. \end{aligned}$$

Um diese rein qualitative synoptische Erfahrung auch quantitativ zu fassen, wurde für den Zeitabschnitt 1. bis 31. März 1955 der Korrelationskoeffizient zwischen der Zonalströmung und dem über alle Tendenzgebiete innerhalb dieser Strömung gemittelten Intensitätswert im Zentrum der Tendenzgebiete berechnet. Dieser Korrelationskoeffizient wurde zweifach gebildet nämlich einmal mit dem Absolutwert der maximalen Tendenz, zum anderen unter Berücksichtigung von deren Vorzeichen. Die hierzu erforderlichen täglichen Werte der zonalen Windgeschwindigkeit im 500-mb-Niveau wurden den Arbeitswetterkarten der synoptischen Abteilung des Deutschen Wetterdienstes in Form der über alle Längengrade gemittelten Höhendifferenz der 500-mb-Fläche zwischen 45° N und 60° N entnommen. Der hiermit zu korrelierende Intensitätswert der Tendenz wurde durch Mittelbildung aller Maximalwerte der zu einem Termin mit dem Zentrum zwischen 45° N und 60° N liegenden Tendenzgebiete gewonnen. Die sich ergebenden Korrelationskoeffizienten waren:

$$\begin{aligned} r(U; \partial z / \partial t) &= 0.050 \\ r(U; |\partial z / \partial t|) &= 0.223 \end{aligned}$$

Diese quantitative Auswertung bestätigt die synoptische Erfahrung und berechtigt damit zur Vernachlässigung der beiden letzten Terme des mit [11] bezeichneten Ausdruckes, d. h. also auch der beiden ersten Terme in Gleichung [10].

Betrachten wir den vierten Term in Gleichung [10]: Hierin stellt das Produkt

$$\overline{U^* (\partial \zeta' / \partial x)^*}$$

nichts anderes als die thermische Advektion der thermischen Vorticity dar. Wir können nämlich  $z^*$  (und entsprechendes gilt auch für die abgeleiteten Größen  $U^*$  oder  $\zeta'$  bzw.  $(\partial \zeta' / \partial x)^*$ ) als die Höhe der relativen Topographie des betrachteten Druckniveaus über oder unter demjenigen auffassen, das mit dem äquivalentbarotropen zusammenfällt. Die thermische Advektion der thermischen Vorticity ist aber zugleich ein Maß für den Grad der Baroklinität. Wir wissen aber aus der synoptischen Erfahrung, daß die Baroklinität im Einzelfall sehr selten verschwindet, daß aber im zeitlichen Mittel die Atmosphäre nur noch schwach baroklin ist, d. h. sich nahezu barotrop verhält:

$$\overline{U^* (\partial \zeta' / \partial x)^*} \approx 0.$$

Spalten wir nun den zu betrachtenden vierten Term der Gleichung [10] auf:

$$\overline{U^{-1} \{ U^* (\frac{\partial \zeta'}{\partial x})^* \}} = \overline{U^{-1} \{ U^* (\frac{\partial \zeta'}{\partial x})^* \}} + \overline{(U-1)^* \{ U^* (\frac{\partial \zeta'}{\partial x})^* \}}$$

so ist hierin der erste Term der rechten Seite also annähernd null. Eine quantitative Untersuchung des zweiten Termes (als Funktion des Mittelbildungszeitraumes) erfordert einen sehr hohen Arbeitsaufwand. Auch hier kann auf Grund der synoptischen Erfahrung die Aussage gemacht werden, daß zumindest keine sehr stramme (zeitliche) Korrelation zwischen der Intensität des Grundstromes im äquivalentbarotropen Niveau und dem Grad der Baroklinität besteht. Diese beiden Gründe nötigen und berechtigen uns zur Vernachlässigung des vierten Termes in Gleichung [10] unter der Annahme, daß hierdurch kein zu großer Fehler gemacht wird. Von der Möglichkeit dieser Vernachlässigung wird umso lieber Gebrauch gemacht, als einer Berücksichtigung des genannten Termes zu große mathematische Schwierigkeiten entgegenstehen.

Von Gleichung [10] verbleibt mithin:

$$[12] \quad \overline{\frac{\partial \zeta'}{\partial x}} + \beta \overline{(U-1) v'} = - \frac{f}{H} \approx \frac{\partial h'}{\partial x}$$

Spaltet man den zweiten Term der vorstehenden Gleichung folgendermaßen auf

$$\beta \overline{(U-1) v'} = \beta \overline{(U-1) v'} + \beta \overline{(U-1)^* (v')^*}$$

und verwendet die geostrophische Approximation  $v \approx v_g$ , worin

$$[13] \quad v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x} \text{ und damit } \zeta_g = \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

so ergibt sich mit einer nachfolgenden Integration über  $x$

$$[14] \quad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} + \bar{s} \bar{z} = - qh'(x) - \frac{f\beta}{g} \int \overline{(U-1)^* (v')^*} dx$$

Hierin bedeuten die Abkürzungen

$$s = \beta / U$$

das Quadrat der Anzahl „freier“ Wellen auf einem geschlossenen Breitenkreis entsprechend der vom Grundstrom abhängigen Länge der stationären Wellen (siehe Rossby (30)). Ferner bedeutet die Abkürzung

$$q = \frac{f^2 \kappa}{g H}$$

Die Gleichung [14] läßt erkennen, daß das Profil der Topographie der äquivalentbarotropen Druckfläche entlang des betrachteten Breitengrades sich in Form einer erzwungenen Schwingung ergibt; die beiden Terme der rechten Seite stellen die „äußeren Kräfte“ dar. Als diese fungieren einmal die Topographie der Erdoberfläche  $h(x)$ , die ein Maß für den orographischen Einfluß darstellt, zum anderen der über  $x$  integrierte, makroturbulente, meridionale Transport der (reziproken) zonalen Bewegungsgröße. Aus zahlreichen Auswertungen von Beobachtungsmaterial wissen wir, daß diese letztere Größe in der Natur nicht verschwindet, sondern bisweilen erhebliche Werte anzunehmen vermag.

Wenn auch bei Anwendung einer zeitlichen Mittelbildung gemäß [9] die Annahme gerechtfertigt ist, daß die zeitlichen Änderungen mit ausreichender Genauigkeit vernachlässigt werden können, so sind damit dennoch keine stationären Verhältnisse gegeben; vielmehr drückt sich die Nichtstationarität in diesem Falle durch den vorgenannten makroturbulenten Term aus. Der Einfachheit halber verfährt man nun im allgemeinen so, daß man diesen Term (den zweiten der rechten Seite in Gleichung [14]) aus Gründen der mathematischen Schwierigkeiten vernachlässigt und auf diese Weise den zeitlichen Mittelwert mit dem stationären Fall identifiziert.

In der gleichen Weise verfahren z. B. auch Charney und Eliassen (6), die für die verbleibende Gleichung

$$[15] \quad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} + \bar{s} \bar{z} = - qh'(x)$$

die Lösung in der Form

$$[16] \quad \bar{z}(x) = q \int_0^L h'(\xi) G(x - \xi) d\xi$$

mit der Green'schen Funktion

$$[17] \quad G(x) = -\frac{\cos V_s^{-1}(\frac{L}{2} - x)}{2 V_s \sin V_s^{-1} \frac{L}{2}} \quad 0 \leq x \leq L,$$

wobei

$$G(x + L) = G(x)$$

angeben.

Es ist der Sinn der nachfolgenden Arbeit eine Methode anzugeben, die es gestattet, den im vorstehenden Verfahren von Charney und Eliassen vernachlässigten Turbulenzterm in Gleichung [14]

$$[18] \quad \frac{f\beta}{g} \int (U-1) \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx = \frac{f}{g} \left( \frac{\beta}{U} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} = s \nabla \cdot \mathbf{z}$$

wenigstens näherungsweise zu berücksichtigen.

### 3. Die Notwendigkeit einer Berücksichtigung des meridionalen makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße

Bevor angegeben wird, in welcher Weise der Turbulenzterm [18] in der Gleichung [14] berücksichtigt werden kann, soll auf Grund einer qualitativen Überlegung die Notwendigkeit der Berücksichtigung dieses Termes herausgestellt werden. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die zeitlich gemittelte Höhenverteilung des äquivalent-barotropen Druckniveaus ( $\approx$  der 500-mb-Fläche) beträchtlich durch den meridionalen makroturbulenten Transport zonaler Bewegungsgröße beeinflusst wird.

Von der Gleichung für die zonale Bewegung in einem geographischen Koordinatensystem

$$[19] \quad \frac{du}{dt} + \frac{uw}{a} - \frac{uv}{a} \tan \varphi + lw - fv = -\frac{g}{r} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - F_x$$

ausgehend, erhält man durch Umformung und Integration über ein Volumen, welches begrenzt wird durch die Erdoberfläche, die obere Grenze der Atmosphäre sowie zwei Zonalebene in den Breiten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , eine Gleichung für die substantielle Änderung des Rotationsmomentes  $M$  mit

$$[20] \quad M = r^2 \left( \frac{d\lambda}{dt} + \Omega \right) = a \cos \varphi u + a^2 \cos^2 \varphi \Omega$$

eines zonalen Ringes

$$[21] \quad \iiint \frac{dM}{dt} \, d\tau = -g \iiint \frac{\partial z}{\partial \lambda} \, d\tau - r \iiint F_x \, d\tau$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung läßt sich die linke Seite der Gleichung [21] noch aufteilen in die zeitliche lokale Änderung des Rotationsmomentes sowie die Divergenz des Flusses von Rotationsmoment

$$[22] \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho M \, d\tau + \iiint \nabla \cdot (\mathbf{v}_\rho M) \, d\tau = -g \iiint \frac{\partial z}{\partial \lambda} \, d\tau - r \iiint F_x \, d\tau$$

(siehe z. B. Widger (40)). Gleichung [22] hat die Form einer Bilanzgleichung (van Mieghem (17), (18), (19)), in der die Terme der rechten Seite Produktions- bzw. Dissipationsterme darstellen. Im zeitlichen Mittel gemäß [9] (z. B. Monats- oder Jahreszeitenmittel) verschwindet der erste Term der Gleichung [22], eine Divergenz oder Konvergenz des Flusses von Rotationsmoment kann demnach nur durch die Produktionsterme auf der rechten Seite der Gleichung [22] hervorgerufen werden. Von diesen gibt der erste den sogenannten Gebirgseffekt, der zweite den Reibungseffekt wieder. Die Reibung bedingt nämlich, da die Bodenwinde in den Breitenzonen zirka

10° — 35° N und 35° — 70° N im Mittel einander entgegengesetzt sind, in beiden Zonen auch entgegengesetzte Drehmomente. Der ständigen Produktion von Rotationsmoment in der Passatwindzone steht eine ständige Dissipation desselben in der Westwindzone gegenüber; der Ausgleich wird durch einen entsprechend großen meridionalen (zum größten Teile turbulenten) Transport von Rotationsmoment gewährleistet. So lassen sich die eine Produktion (bzw. Dissipation) angehenden Terme auch als Fluß von Rotationsmoment durch die untere Atmosphären-grenze aus der Erde heraus (bzw. in die Erde hinein) interpretieren. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung [22] wird mit Gebirgseffekt bezeichnet; diese Größe verschwindet nämlich dann nicht mehr, wenn ein Gebirge durch die betrachtete Druckfläche hindurchgeht und diese am Ost- und Westrand des Gebirges eine verschiedene Höhenlage hat. Auch dieser Gebirgseffekt kann als Fluß von Rotationsmoment aus der Erde in die Atmosphäre oder aus der Atmosphäre in die Erde hinein interpretiert werden.

Die Divergenz oder Konvergenz des meridionalen Flusses von Rotationsmoment ist in den letzten Jahren Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen (siehe z. B. Bjerknes und Mintz (3), sowie Starr (34) — hier auch Bibliographie — und (35)). Im Vergleich zur Divergenz des meridionalen, überwiegend turbulenten Flusses von Rotationsmoment hat White (39) die zeitliche Änderung des durch die Gebirge ausgeübten Drehmomentes für verschiedene Breitenzonen studiert; hierbei wird ein Maximum des letzteren im Früh Sommer zwischen 25° N und 50° N beobachtet. Dieses ist nur so erklärbar, daß der Gebirgseinfluß ein die Gesamtbilanz des Rotationsmomentes selbstregulierender Effekt ist: Wenn die Divergenz des Flusses größer oder kleiner als die Produktion (bzw. Dissipation) in Folge Reibung ist, so wird der Fehlbetrag durch den Gebirgseffekt auskompensiert. Zu diesem Zwecke stellt sich an den beiden Rändern des Gebirges eine entsprechend verschiedene Höhenlage der betrachteten Druckfläche ein. Die Höhenlage einer von einem Gebirge durchstoßenen Druckfläche am Rande des Gebirges ist demnach abhängig von der über den ganzen Breitenkreis gemittelten Divergenz des meridionalen, überwiegend turbulenten Transportes von Rotationsmoment. Es ist nunmehr leicht einzusehen, daß dann auch an der über dieser Druckfläche liegenden und vielleicht nicht mehr vom Gebirge erreichten 500-mb-Fläche sich ein entsprechender, wenn auch nicht mehr ganz so starker Einfluß der Divergenz des meridionalen Rotationsmomentflusses hinsichtlich ihrer Höhenlage bemerkbar machen wird. Diesen Einfluß der Divergenz des meridionalen Rotationsmomentflusses auf die zeitlich gemittelte Höhenlage der 500-mb-Fläche bringt der zweite Term der rechten Seite von Gleichung [14] zum Ausdruck. Die vorstehende rein qualitative Überlegung gestattet es somit, die Notwendigkeit einer Berücksichtigung des genannten Termes aufzuzeigen.

Ein anderes Argument, welches die Berücksichtigung dieses Termes notwendig erscheinen läßt, ist eines der Resultate der folgenden Untersuchung. Um brauchbare, mit den Beobachtungen übereinstimmende Ergebnisse zu erhalten, waren Charney und Eliassen genötigt, in Gleichung [1] und damit in der späteren Gleichung [15] die Reibung einzuführen. Hierdurch stehen aber die verwendeten Gleichungen trotz der damit erzielten besseren Ergebnisse im Widerspruch zur Erhaltung der Energie, da mit der Reibung lediglich eine Dissipation, aber überhaupt keine Energiequelle berücksichtigt wird. Es kann in der nachfolgenden Untersuchung gezeigt werden, daß eine wenn auch nur angenäherte Berücksichtigung des Turbulenztermes in Gleichung [14] die gleiche Wirkung wie die Einführung

der Reibung hat: es werden ebenfalls bessere Ergebnisse erhalten, der Widerspruch zur Energieerhaltung aber vermieden. Bei einer Berücksichtigung des Turbulenztermes in Gleichung [14] weisen die später verwendeten Green'schen Funktionen ganz ähnlich wie im Falle einer Berücksichtigung der Reibung mit zunehmender Entfernung vom Einflußpunkt abnehmende Amplituden auf.

**4. Die Berücksichtigung der zeitlichen Fluktuationen des Grundstromes U durch die Methode der Aneinanderreihung kurzfristiger stationärer Zustände**

Es ist vorstellbar, daß sich der zu untersuchende Mittelbildungszeitraum  $t_2$  in eine Anzahl von Teilzeiträumen der Größe  $t_1$  unterteilen läßt.  $t_1$  ist dabei nach zwei Bedingungen zu wählen: einerseits muß das Teilintervall so groß sein, daß die über das Intervall gemittelte zeitliche Änderung bereits mit Annäherung verschwindet, d. h. daß also fast stationäre Verhältnisse vorliegen

$$[23] \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \approx 0;$$

andererseits muß das Teilintervall so klein sein, daß der Turbulenzterm auf der rechten Seite der Gleichung [14] noch sehr klein ist und näherungsweise noch vernachlässigt werden kann

$$[24] \quad (U-1) \nabla v \approx 0.$$

Auf die Wahl der Größe des Teilintervalls  $t_1$  auf Grund der beiden vorgenannten Bedingungen [23] und [24] wird noch näher eingegangen werden.

Falls es möglich ist, das Gesamtintervall  $t_2$  in eine Anzahl gleich großer Teilintervalle  $t_1$  aufzuteilen, für die jeweils die Bedingungen [23] und [24] erfüllt sind, so gilt für jedes Teilintervall  $t_1$  auch die Lösung [16]

von Charney und Eliassen. Da aber der Grundstrom U sich mit der Zeit ändert, also in jedem Teilintervall einen anderen Wert haben kann, damit aber auch die Green'sche Funktion G(x) gemäß [17] in jedem Teilintervall ein anderes Aussehen haben kann, erhält man die Lösung für den Gesamtzeitraum  $t_2$  durch eine nochmalige Mittelbildung der für die  $t_2/t_1$  Teilintervalle gültigen Lösungen:

$$[25] \quad \hat{z}_{t_2} = \frac{t_1}{t_2} \sum_{\mu=1}^{t_2/t_1} [\bar{z}_{t_1}(x)]_{\mu} = \\ = \alpha \int_0^L h'(\xi) \frac{t_1}{t_2} \sum_{\mu=1}^{t_2/t_1} [G_{t_1}(x-\xi)]_{\mu} d\xi$$

Hierin möge das Mittel aus den Green'schen Funktionen als eine neue Einflußfunktion  $\bar{G}$  aufgefaßt werden, wobei die Summation durch eine Integration ersetzt werde:

$$[26] \quad \bar{G} = \frac{t_1}{t_2} \sum_{\mu=1}^{t_2/t_1} G(s_{\mu}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) \Phi(s) ds *$$

Die Lösung [25] für das Teilintervall  $t_2$  lautet dann

$$[27] \quad \hat{z}(x) = \alpha \int_0^L h'(\xi) \bar{G}(x-\xi) m \xi$$

In Gleichung [26] wurde das Kollektiv bestehend aus den  $t_2/t_1$  Green'schen Funktionen charakterisiert durch die Verteilungsfunktion  $\Phi(s)$ , welche die Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Green'schen Funktion G(s) im Gesamtintervall  $t_2$  angibt.

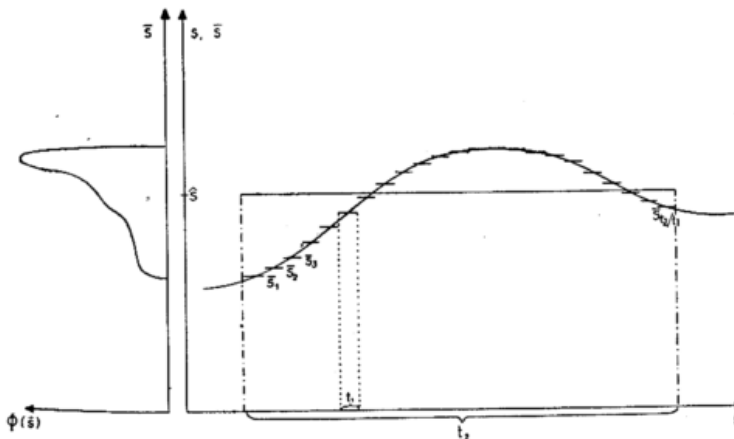


Abb. 1  
Schematische Darstellung der Funktion  $s(t)$  in den verschiedenen Mittelbildungszeiträumen  $t_1$  und  $t_2$ , sowie der zugehörigen Verteilungsfunktion  $\Phi(\bar{s})$ .

In der schematischen Darstellung (Abb. 1) entspricht  $\bar{s}$  dem von Charney und Eliassen als Mittel über den Gesamtzeitraum  $t_2$  verwendeten Wert, während die  $s_{\mu}$  für  $\mu = 1, 2, 3, \dots, t_2/t_1$  das Kollektiv der für die kürzeren Teilintervalle  $t_1$  gültigen Mittelwerte darstellen.

Es ist durchaus möglich, auch der (infolge Aufteilung in endliche Teilintervalle  $t_1$ ) diskontinuierlichen Häufigkeitsverteilung der Green'schen Funktionen durch Wahl einer entsprechenden Verteilungsfunktion  $\Phi(\bar{s})$  trotz der Integration gemäß [26] gerecht zu werden.

Es ist möglich, die Häufigkeitsverteilung von  $s$  durch eine Verteilungsfunktion  $\Phi(s)$  festzulegen, die nur noch von wenigen statistischen Maßzahlen (Mittelwert, Streu-

ung, Schiefe, oder weiteren F e c h n e r'schen Momenten noch höherer Ordnung) als Parametern abhängt. Wenn mit dieser Verteilungsfunktion  $\Phi(s)$  die Integration gemäß Gleichung [26] durchgeführt werden kann, so gelangt damit gleichzeitig eine Berücksichtigung des Turbulenztermes in Gleichung [14], d. h. eine Berücksichtigung der zeitlichen Fluktuationen des Grundstromes U. Hierzu brauchen nur die genannten statistischen Maß-

\*) Eine korrektere Schreibweise für Gleichung [26] wäre  $G = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\bar{s}) \Phi(\bar{s}) d\bar{s}$ ; aus Gründen der Einfachheit soll jedoch künftig statt  $\bar{s}$  nur noch  $s$  geschrieben und darunter der Mittelwert des Teilintervalles verstanden werden.

zahlen hinsichtlich des zeitlichen Verhaltens des Grundstromes bekannt zu sein.

An späterer Stelle wird gezeigt, daß diese Möglichkeit besteht; in einigen Beispielen wird sie Anwendung finden.

Ein Nachteil des Verfahrens liegt offensichtlich darin, daß bei Verwendung der Verteilungsfunktion  $\Phi(s)$  gemäß Gleichung [26] es nicht mehr möglich ist, eine Aussage über die zeitliche Reihenfolge der  $s$ -Werte zu machen; es werden vielmehr verschiedene Funktionen  $s(t)$ , sofern sie nur die gleiche Häufigkeitsverteilung der  $s$  im Gesamtzeitraum  $t_2$  haben, die gleiche Einflußfunktion  $G$  und damit auch die gleiche Lösung  $z$  besitzen. Es besteht jedoch die Möglichkeit, daß für verschiedene Funktionen  $s(t)$ , die lediglich die gleiche Häufigkeitsverteilung der  $s$ -Werte im Zeitraum  $t_2$  haben, auch die beiden in [23] und [24] genannten, zu vernachlässigenden Terme von der gleichen Größe sind und damit in allen diesen Fällen die Lösung  $z$  um den gleichen Betrag gefälscht wird. Zunächst läßt sich jedoch diese Frage nicht entscheiden.

### 5. Die Größe der Teilintervalle $t_1$

Die Größe des Teilintervalles  $t_1$  ist so zu wählen, daß die beiden Bedingungen [23] und [24] erfüllt sind. Es soll in diesem Abschnitt versucht werden, auf Grund der Auswertungen von Beobachtungsmaterial einigen Aufschluß darüber zu gewinnen, wie groß  $t_1$  im Mittel vieler Fälle am zweckmäßigsten zu wählen ist. Die Funktion

$$[28] \quad B(t_1) = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} \frac{\partial z}{\partial t} dt = \frac{1}{t_1} [z(t_1) - z(t_0)],$$

die es für die Bedingung [23] zu betrachten gilt, hat für  $t_1 = 0$  einen endlichen Wert  $B(t_0)$ , von welchem sie mit wachsendem  $t_1$  (im Mittel vieler Fälle monoton) abfällt, um sich für große  $t_1$  der Asymptote  $B(t_1) = 0$  zu nähern. Im Gegensatz hierzu hat die für die Bedingung [24] zu betrachtende Funktion

$$[29] \quad D(t_1) = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} (U-v) v dt$$

für  $t_1 = 0$  den Wert  $D(t_0) = 0$ . Sie steigt für wachsende  $t_1$  (wieder im Mittel vieler Fälle monoton) an, um sich einem endlichen Wert  $D(t_1)$  für große  $t_1$  asymptotisch zu nähern. Dabei darf angenommen werden, daß die Funktion

$$[30] \quad E(t_1) = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} U v dt$$

sich in gleicher Weise verhält wie  $D(t_1)$ , da ja die Korrelation bei Verwendung des Reziprokwertes in [29] lediglich das Vorzeichen wechselt. Über die Größe  $E(t_1)$  sind dank zahlreicher Auswertungen von Beobachtungsmaterial ohnehin unsere Kenntnisse besser als über die Größe  $D(t_1)$ . Insbesondere haben wir einen Anhaltspunkt über den Wert, dem sich die Funktion  $E(t_1)$  (im Mittel vieler Fälle) für wachsende  $t_1$  asymptotisch nähert. In mittleren Breiten erfolgen (im zeitlichen und räumlichen Mittel) etwa 90% des gesamten meridionalen Transportes zonaler Bewegungsgröße auf makroturbulentem Wege, während nur etwa 10% durch eine mittlere meridionale Zirkulation vom Hadley-Typ transportiert werden. (Siehe hierzu Starr und White (36) u. a.). Betrachtet man daher statt der Funktion  $E(t_1)$  die Funktion

$$[31] \quad K(t_1) = \frac{\int_{t_0}^{t_0+t_1} U v dt}{\int_{t_0}^{t_0+t_1} U dt}$$

so wird  $K(t_1)$  im Mittel vieler Fälle von  $K(t_0) = 0$  monoton ansteigen und sich für große  $t_1$  dem Werte  $K(t_1) = 0.9$  asymptotisch nähern. Eine Ermittlung des Verlaufes von  $K(t_1)$  aus Beobachtungsdaten gibt gleichzeitig einen — allerdings nur qualitativen — Hinweis auf die Größe des Fehlers infolge Vernachlässigung des Turbulenztermes in Gleichung [14], also infolge Nichterfüllung der Bedingung [24].

Verwendet man andererseits statt der durch [28] gegebenen Funktion  $B(t_1)$  die Funktion

$$[32] \quad W(t_1) = \frac{\int_{t_0}^{t_0+t_1} \frac{\partial z}{\partial t} dt}{\int_{t_0}^{t_0+t_1} \left| \frac{\partial z}{\partial t} \right| dt}$$

so ist der endliche Wert für  $t_1=0$   $W(t_0) = 1.0$ , von dem aus im Mittel vieler Fälle  $W(t_1)$  für wachsende  $t_1$  monoton abfällt und sich dem Wert  $W(t_1) = 0$  asymptotisch nähert. Auch diese Funktion, aus Beobachtungsdaten erst einmal ermittelt, gestattet eine qualitative Aussage über den Fehler, der durch Nichterfüllung der Bedingung [23] gemacht wird.

Die Auswertung von  $W(t_1)$  erfolgte mittels der Höhenänderungen der 500-mb-Fläche über München im September 1953; verwertet wurden hierbei die jeweils vier Aufstiege pro Tag nach den Angaben im „Täglichen Wetterbericht“ des Deutschen Wetterdienstes 1953 (9). Es wurden also jeweils sechsstündige Tendenzen aufaddiert, so daß

$$[33] \quad W(t_1) \approx \frac{\sum_{z=t_0}^{z=t_0+t_1} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_z}{\sum_{z=t_0}^{z=t_0+t_1} \left| \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_z \right|}$$

Um eine Mittelbildung zu erhalten, wurde der Zeitpunkt des Beginnes  $t_0$  verschieden gewählt, nämlich:

$t_0 =$	31. 8. 1953	09h
	1. 9. 1953	21h
	3. 9. 1953	09h
	5. 9. 1953	09h
	7. 9. 1953	09h

und jeweils für die 25 nachfolgenden Tage die Funktion  $W(t_1)$  gemäß [33] berechnet, d. h. für jeden Wert  $t_0$   $25 \times 4 = 100$  sechsstündige Tendenzen laufend aufaddiert. Eine weitere Glättung durch Mittelbildung von jeweils 4 sechsstündigen Werten gibt für jeden der 25 Folgetagen den Wert  $W(t_1)$  gemäß [33]; diese Funktion

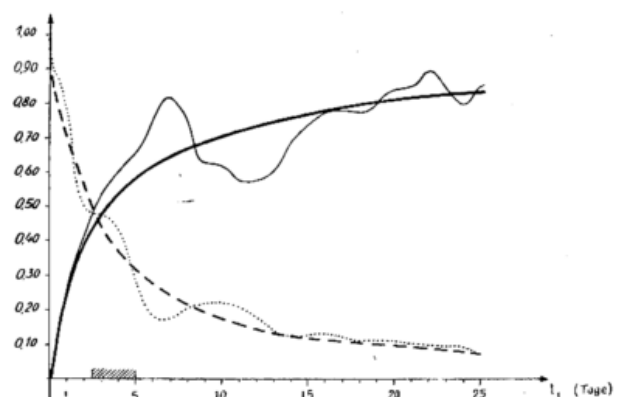


Abb. 2

Darstellung der aus Beobachtungsdaten gemäß [33] ermittelten Funktion  $W(t)$  (.....) und deren ausgeglichenen Verlaufes (---) sowie der gemäß [34] ermittelten Funktion  $K(t_1)$  (—) und des ausgeglichenen Verlaufes (—) der letzteren.

hat als punktierte Linie ihre Darstellung in Abbildung 2 gefunden. Die unterbrochene, kräftige Linie stellt die gleiche Funktion in grober Ausgleichung dar.

Zur Auswertung der Funktion  $K(t_1)$  wurde auf das Aufstiegsmaterial von Berlin im Februar und März 1950 zurückgegriffen. Da hiervon für den 03.00-GMT-Termin die Windbeobachtungen aus ähnlichen Untersuchungen von Möller und de Bary (21) und Möller (23) in Komponenten aufgeteilt vorlagen, war eine erleichterte Berechnung der Turbulenzterme möglich. Wie die Ergebnisse von Möller (23) (hier für die vektorielle, makroturbulente Feldbeschleunigung  $(\nabla^T \nabla^T) \mathbf{v}^T$ ), diejenigen von Starr (35), Mintz (24) u. a. zeigen, ist der makroturbulente Impulstransport im Bereich der Tropopause am größten. Es wurden deshalb die Windkomponenten in 300 mb ausgewählt und hiermit  $K(t_1)$  folgendermaßen näherungsweise berechnet:

$$[34] \quad K(t_1) \approx \frac{\sum_{\tau=t_0}^{t_0+t_1} (u^T v^T)_{\tau}}{\sum_{\tau=t_0}^{t_0+t_1} (u v)_{\tau}}$$

Dabei fiel für jeweils  $\tau = 24\text{h}$  ein Produkt  $(uv)$  an;  $t_0$  wurde wiederum variiert, nämlich

$t_0 =$	1. 2. 1950	03.00 GMT
	4. 2. 1950	03.00 GMT
	8. 2. 1950	03.00 GMT
	16. 2. 1950	03.00 GMT
	20. 2. 1950	03.00 GMT

und zu jedem  $t_0$  für 25 Folgetage der Wert  $K(t_1)$  gemäß [34] berechnet. Die sich ergebenden 6 Kurven wurden gemittelt, das Mittelungsergebnis noch einmal durch übergreifende fünftägige Mittel geglättet und als dünn ausgezogene Kurve in Abb. 2 dargestellt. Die stark ausgezogene Kurve stellt die entsprechende grobe Ausgleichung dar. Es ist noch zu bemerken, daß nach den Beobachtungsdaten die Kurve  $K(t_1)$  sich einer Asymptote beim Werte  $K(t_1) \approx 0.35$  zu nähern scheint, und daß durch eine Multiplikation mit dem Faktor 2.5 eine Anpassung an den aus der Erfahrung erwarteten Verlauf (Asymptote  $K(t_1) = 0.9$ ) erreicht werden kann. Damit stellt der Verlauf von  $K(t_1)$  in Abb. 2 gleichermaßen einen Extremfall dar; für einzelne Zeitabschnitte (wie auch für den ausgewählten Zeitraum Februar/März 1950) kann die Kurve wesentlich flacher liegen. Hierdurch verschiebt sich der Schnittpunkt der beiden ausgeglichenen Kurven  $W(t_1)$  und  $K(t_1)$  bis zu 3 Tagen zu einem größeren Wert von  $t_1$ .

Will man aus dem Verlauf der Kurven  $W(t_1)$  und  $K(t_1)$  (allerdings nur qualitative) Schlüsse ziehen hinsichtlich der Fehler, die durch eine Nichterfüllung der Bedingungen [23] und [24], also durch eine Aneinanderreihung kurzfristiger stationärer Zustände entstehen, so ist folgendes zu bemerken: Es ist sehr wahrscheinlich, daß im Bereich des Schnittpunktes der Kurven ( $K(t_1)$  und  $W(t_1)$ ) die entstehenden Fehler sich zu verhältnismäßig gleichen wie auch kleinen Teilen auf die beiden vernachlässigten Terme

$$\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{und} \quad (\bar{U}^{-1})^T \nabla^T \mathbf{v}^T$$

verteilen und nicht das gleiche Vorzeichen haben, wodurch der Gesamtfehler gering sein dürfte. Wegen der möglichen, verschieden starken Neigungen vornehmlich der Kurve  $K(t_1)$  soll der Schnittpunktsbereich von  $K(t_1)$  und  $W(t_1)$  als derjenige zwischen  $2\frac{1}{2}$  und 5 Tagen definiert werden. Dieser Zeitraum wird demnach (im Mittel vieler Fälle) als am günstigsten für die Größe des Teilintervalles  $t_1$  angesehen.

In Übereinstimmung damit steht die Feststellung von Hess und Brezowsky (15), nach welcher die mittlere Andauer aller definierten 28 Großwetterlagen mit nur einer Ausnahme (zyklonale Westlage 5.3 Tage) zwischen 3 und 5 Tagen liegt. Die Großwetterlage erweist sich so als vergleichbar mit den aneinanderzureihenden, kurzfristigen, stationären Zuständen; sie ist jedoch nur für eine bestimmte Region und nicht etwa für eine ganze Hemisphäre definiert, auch hat sie in der Aufeinanderfolge nicht die konstante Andauer  $t_1$ .

### 6. Die Verteilungsfunktion $\Phi(s)$ für die Häufigkeit des Auftretens bestimmter Geschwindigkeiten des Grundstromes

Zur Festlegung der Verteilungsfunktion  $\Phi(s)$  ist die Kenntnis der Häufigkeitsverteilung für das Auftreten bestimmter Größen des Grundstromes  $U$  erforderlich. Um eine solche zu erhalten, wurde für das Beispiel des Winterhalbjahres 1951/52 und des Sommerhalbjahres 1952 aus den absoluten Topographien der 500-mb-Fläche (analysiert von der Synoptischen Abteilung des Deutschen Wetterdienstes) die zonale Strömung im Gürtel zwischen  $40^\circ\text{N}$  und  $45^\circ\text{N}$  entnommen. Dies erfolgte unter Verwendung der geostrophischen Approximation gemäß [13]

$$[35] \quad U \approx U_g = - \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial y} z''''$$

durch Bestimmung von  $z''''$  auf  $40^\circ\text{N}$  und  $45^\circ\text{N}$  infolge Mittelbildung der Werte  $z$  für je  $10^\circ\lambda$  entlang der Breitenkreise, jedoch unter Ausschluß des Bereiches von

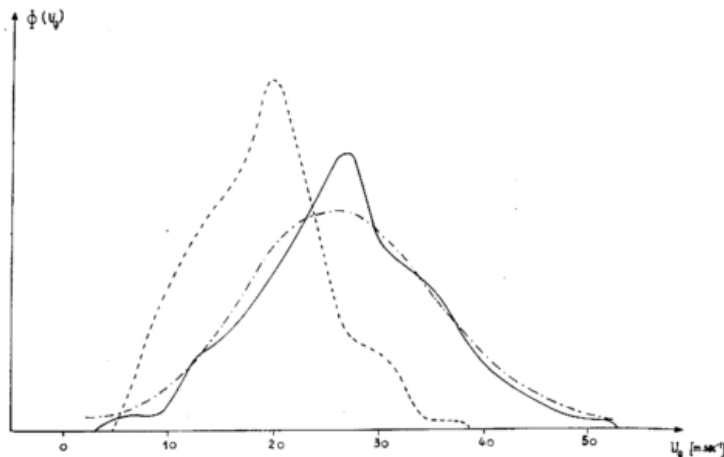


Abb. 3

Häufigkeitsverteilung für das Auftreten bestimmter Geschwindigkeiten des Grundstromes  $U_g$  zwischen  $40^\circ\text{N}$  und  $45^\circ\text{N}$  für das Winterhalbjahr 1951/52 (—), das Sommerhalbjahr 1952 (---) sowie das Winterhalbjahr 1951/52 geglättet (— · — · —)

160° E — 130° W (dieser Sektor fehlt im Ausschnitt der Arbeitswetterkarten südlich 55° N). Die sich ergebenden Verteilungen (siehe Abb. 3) sind einigermaßen symmetrisch — insbesondere nach einer Glättung — und ließen sich in grober Näherung noch durch eine Gauss'sche Normalverteilung darstellen. Letzteres gilt insbesondere dann, wenn noch — wie schon erwähnt — eine Glättung der Kurven vorgenommen wird, wie dies im Beispiel des Winterhalbjahres 1951/52 (— · — · —) in Abb. 3) deutlich wird. Die Glättung erfolgte in der nachstehenden Weise

$$U_{\nu} \text{ (geglättet) } = \frac{1}{4} (2U_{\nu} + U_{\nu+1} + U_{\nu-1})$$

wobei mit  $\nu$  die mit je 3.58 m sec<sup>-1</sup>, d. h. je 2 dm Höhendifferenz in 42.5° N eingeteilten Klassenintervalle gezählt werden.

Mit  $\Phi(s)$ , wobei  $s = \beta/U$ , ist jedoch die Verteilungsfunktion für die Häufigkeit des Auftretens des Reziprokwertes der Grundstromgeschwindigkeiten festzulegen. Wie Abb. 4 zeigt, weisen diese Verteilungen eine entsprechend starke Schiefe auf und sind auch in grober Näherung nicht mehr durch eine Normalverteilung zu ersetzen.

Wird jedoch die Funktion  $\Phi(s)$  entsprechend den schiefen Häufigkeitsverteilungen der Abb. 4 festgelegt, so ist zu berücksichtigen, daß mit einer derart komplizierten Funktion noch die spätere Integregation gemäß Gleichung [26] zum Erhalt der Einflußfunktion  $G$  möglich sein muß. Diese Notwendigkeit zwingt uns zu der recht weitgehenden Voraussetzung, die in Abb. 4 dargestellten Häufigkeitsverteilungen doch noch durch eine

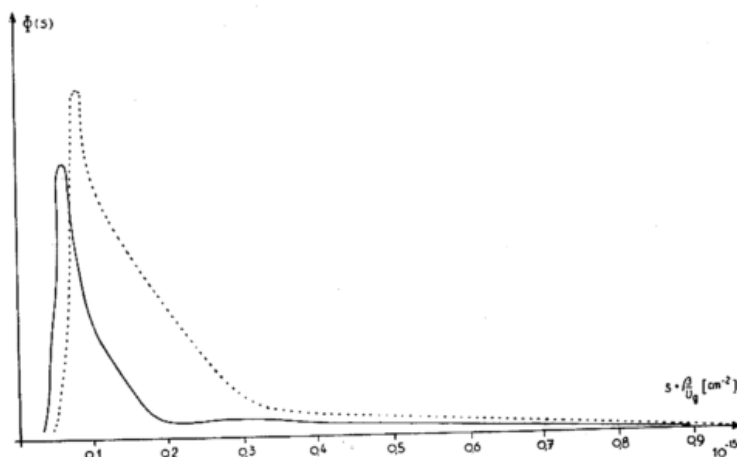


Abb. 4  
Häufigkeitsverteilung für das Auftreten der Werte  $s = \beta/U$  zwischen 40° N und 45° N für das Winterhalbjahr 1951/52 (—) und das Sommerhalbjahr 1952 (.....)

Verteilungsfunktion  $\Phi(s)$  entsprechend einer Gauss'schen Normalverteilung

$$[36] \quad \Phi(s) = \frac{1}{\pi d \sqrt{2}} e^{-\frac{(s-s_0)^2}{2d^2}}$$

festzulegen. Diese Annahme wird den natürlichen Gegebenheiten sehr wenig gerecht, läßt sich aber aus Gründen der Umgehung mathematischer Schwierigkeiten nicht vermeiden.

Sie bedeutet eine Nichtberücksichtigung der hohen  $s$ -Werte, d. h. der kleinen Grundstromgeschwindigkeiten; in der Winterkurve der Abb. 4 bleiben mit dieser Annahme diejenigen  $s$ -Werte unberücksichtigt, die größer als etwa  $0.13 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-2}$  sind. Derjenige Teil der Häufigkeitsverteilung (nämlich der für die kleinen  $s$ -Werte), der berücksichtigt wird, läßt sich in grober Näherung durch eine symmetrische Verteilung mit geringer Streuung ersetzen. Das Maximum dieser symmetrischen Verteilung muß ungefähr mit demjenigen der beobachteten Verteilung zusammenfallen; es wird etwas zu höheren  $s$ -Werten (kleineren  $U$ -Werten) verschoben sein.

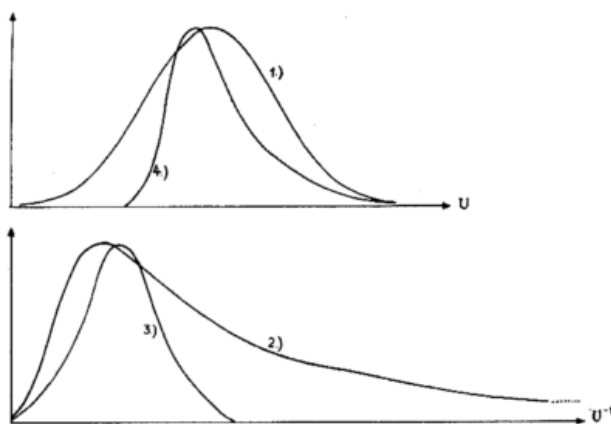


Abb. 5

Veranschaulichung der Fehler aufgrund der Annahme, daß die Verteilungsfunktion  $\Phi(s)$  eine Gauss'sche Normalverteilung sei. Die Ordinate gibt jeweils die Häufigkeit der Werte von  $U$  bzw.  $1/U$ . Kurve 1) sei die (als Normalverteilung) beobachtete Verteilung von  $U$ , Kurve 2) die zugehörige Verteilung der Reziprokwerte, welche wiederum durch eine Gauss'sche Normalverteilung (Kurve 3)) angenähert wird. Kurve 4) ist die Übertragung dieser Näherung auf die ursprüngliche Verteilung von  $U$ ; sie läßt erkennen, daß die geringen Windgeschwindigkeiten völlig vernachlässigt werden.

Es wird sich später zeigen, daß die Verwendung einer Gauss'schen Normalverteilung gemäß [36] bei der Integration zum Erhalt von  $G$  gemäß [26] noch größere Schwierigkeiten insofern bedingt, als  $\Phi(s)$  gemäß [36] an den Stellen

$$s = s_0 \pm i \sqrt{\infty}$$

Pole besitzt und daher die Schließung des Integrationsweges in der komplexen Ebene unmöglich wird. Da jedoch die einfachere Form der „Glockenkurve“

$$[37] \quad \Phi(s) = \frac{1}{\pi d \sqrt{2}} \left(1 + \frac{(s-s_0)^2}{2d^2}\right)^{-1}$$

die durch Reihenentwicklung der Gauss'schen Normalverteilung [36] erhalten wird, diesen Mangel nicht aufweist, soll diese als Verteilungsfunktion gewählt werden. Die geringfügigen Abweichungen der Glockenkurve [37] gegenüber der Gauss'schen Normalverteilung [36] sind angesichts der Annahme, daß die schiefe Verteilung von  $s$  durch eine Normalverteilung angenähert werden soll (vgl. Abb. 5), bedeutungslos.

**7. Zusammenstellung aller Vereinfachungen und Voraussetzungen**

Bevor für einige Beispiele die durch die Erhebungen der Erdoberfläche beeinflusste, zeitlich gemittelte Höhenlage der 500 mb-Fläche berechnet wird, erscheint es zweckmäßig, die zahlreichen Annahmen und Vereinfachungen noch einmal zusammenzustellen. Sie sind derart zahlreich und so weitgehend, daß an die Resultate der Rechnungen keine zu großen Forderungen hinsichtlich der Übereinstimmung mit den Beobachtungen gestellt werden dürfen.

In der nachfolgenden Rechnung sind folgende Annahmen und Vereinfachungen enthalten:

- 1.)  $\sigma \equiv 0$  Die Vorticitygleichung [1] gilt nur für reibungsfreie Bewegung
- 2.)  $\overline{\omega \frac{\partial \eta}{\partial p}} = 0$  Der (vertikale) Mittelwert des vertikalen Vorticitytransportes wird vernachlässigt
- 3.)  $\overline{\mathbf{k}[\nabla \omega \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p}]} = 0$  Der (vertikale) Mittelwert des Drehtermes wird vernachlässigt.
- 4.)  $\zeta < f$  Die relative Vorticity soll kein gegenüber dem Coriolisparameter sein, d. h. sowohl zyklonale oder antizyklonale Krümmungen als auch zyklonale oder antizyklonale Scherungen sind nur schwach ausgeprägt
- 5.)  $\mathbf{v}_0 = \kappa \mathbf{v}$  Bodenwind und (vertikaler) Mittelwert des Windes haben die gleiche Richtung, das Verhältnis ihrer Skalarwerte sei räumlich und zeitlich konstant
- 6.)  $w_0 = (\mathbf{v}_0 \nabla) h$  Die Vertikalbewegung am Erdboden ist durch die Neigung der ausgeglichenen Erdoberfläche gegeben
- 7.)  $\widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  (500 mb) Das äquivalentbarotrope Niveau wird mit einem bestimmten Druckniveau (500 mb) identifiziert
- 8.)  $u = U$  Die zonale Windgeschwindigkeit ist von der geographischen Länge unabhängig
- 9.)  $\partial U / \partial y = 0$  Die zonalen Winde weisen keine Änderung in meridionaler Richtung auf
- 10.)  $v = v'$  Vorhandene meridionale Bewegungen sollen nur schwach ausgeprägt sein

11.)  $\overline{U^* \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \right)^*} = 0$

Die thermische Advektion thermischer Vorticity soll verschwinden; die Atmosphäre wird als nicht-baroklin angesehen

12.)  $v = v_g, \zeta = \zeta_g$

Die Luftbewegungen sollen geostrophisch erfolgen

13.)  $\frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} \frac{\partial}{\partial t} (\dots) dt \approx 0$

Im Teilintervall  $t_1$  soll der zeitliche Mittelwert lokaler Änderungen bereits annähernd verschwinden

14.)  $\frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} (U-1)^n (v')^n dt \approx 0$

Im Teilintervall  $t_1$  soll der makroturbulente, meridionale Transport von (reziproker) zonaler Bewegungsgröße noch annähernd verschwinden

15.)  $t_1 = \text{const.}$

Die einzelnen Teilintervalle  $t_1$  (in etwa Andauer von Großwetterlagen) sollen konstant sein

16.)  $\Phi(s) = \frac{1}{\pi d \sqrt{s}} (1 + \frac{(s-s_0)^2}{2d^2})^{-1}$

Die sehr schiefe Häufigkeitsverteilung der Reziprokwerte des Grundstromes wird durch eine Glockenkurve ersetzt.

**8. Die Berechnung der Einflußfunktion  $\bar{G}(x)$**

Die Einflußfunktion  $\bar{G}$  ist gemäß Gleichung [26] gegeben durch

$$\bar{G} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) \Phi(s) ds$$

Der Ausführung der Integration setzt die durch Gleichung [17] gegebene Green'sche Funktion insofern Schwierigkeiten entgegen, als sie an den Stellen

$$s = m^2 \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$$

Pole aufweist (Resonanzstellen). Um diese Schwierigkeit zu umgehen, ersetzen wir Gleichung [15] durch eine entsprechende für Bewegungen, die nicht mehr reibungsfrei sind

[38]  $\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial x^2} + 2\sigma \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \bar{s} \bar{z} = -q h'(x)$

worin  $\sigma$  einen Reibungskoeffizienten bedeutet. Für Gleichung [38] läßt sich die zu [16] analoge Lösung angeben mit

[39]  $\bar{z}(x) = q \int_0^L h'(\xi) G_\sigma(x - \xi) d\xi$

Hierbei wird die Einführung der Reibung lediglich zum Zwecke der Integration vorgenommen; es soll unmittelbar nach Erhalt des Integrationsergebnisses der Grenzübergang für  $\sigma \rightarrow 0$  durchgeführt und damit die Reibung wieder ausgeschlossen werden. Aus diesem Grunde scheint es auch nicht erforderlich, den Reibungsansatz physikalisch näher zu erklären. In der Lösung ([39]) erscheint eine neue Green'sche Funktion  $G_\sigma$ , sie ist gemäß Anhang 1

[40]  $G_\sigma(x) = -\frac{e^{-\sigma x} \sin \sqrt{s-\sigma^2} (L-x) + e^{\sigma(L-x)} \sin \sqrt{s-\sigma^2} x}{2 \sqrt{s-\sigma^2} \{ \text{Cosh } \sigma L - \cos \sqrt{s-\sigma^2} L \}}$

Die zu [27] analoge Gleichung für  $\hat{z}(x)$  im Falle einer Berücksichtigung der Reibung bei der Integration ist:

$$[41] \quad \hat{z}(x) = q \int_0^L h'(\xi) \left\{ \lim_{\sigma \rightarrow 0} G_\sigma(x-\xi) \right\} d\xi$$

Hierin ist wiederum analog zu [26] die Einflußfunktion  $G_\sigma$  durch Integration über das Kollektiv der Green'schen Funktionen  $G_\sigma$  (letzteres nach Gleichung [40]) gegeben

$$[42] \quad \hat{G}_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(s) \Phi(s) ds$$

Diese Integration soll in der komplexen Ebene durchgeführt werden.  $G_\sigma(x)$  läßt sich nach einigen Umrechnungen auch in folgender Weise komplex schreiben.

$$[43] \quad G_\sigma(x) = \frac{i}{4\psi} \left\{ \frac{e^{\bar{\alpha}(\frac{L}{2}-x)}}{\text{Sinh } \bar{\alpha} \frac{L}{2}} - \frac{e^{\alpha(\frac{L}{2}-x)}}{\text{Sinh } \alpha \frac{L}{2}} \right\}$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt{s - \sigma^2} \\ \alpha &= \sigma + i\psi \\ \bar{\alpha} &= \sigma - i\psi \end{aligned}$$

verwendet wurden.  $G_\sigma(x)$  hat Pole an den Stellen

$$\alpha = i \frac{2k\pi}{L} \quad \text{und} \quad \bar{\alpha} = i \frac{2k\pi}{L}$$

$$\text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm \infty$$

bzw. in der  $\psi$ -Ebene ( $\psi = \sqrt{s - \sigma^2}$ ) für

$$[44] \quad \psi = \pm \left( \frac{2k\pi}{L} + i\sigma \right)$$

$$\text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm \infty$$

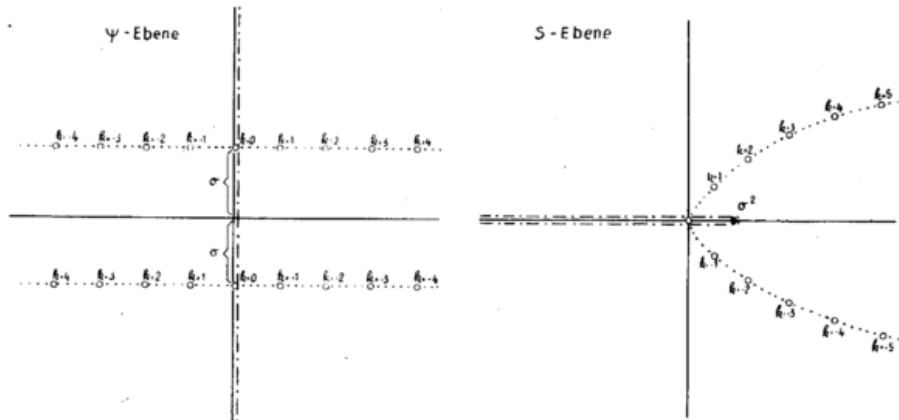


Abb. 6

Die Lage der Pole der Funktion  $G_\sigma(s)$  für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$  in der komplexen  $\psi$ -Ebene (links) und  $s$ -Ebene (rechts) gemäß [44] bzw. [45].

Es ist ersichtlich, daß die Polstellen in der  $\psi$ -Ebene auf zwei Geraden liegen, welche im Abstand  $\pm \sigma$  parallel zur reellen Achse verlaufen (siehe Abb. 6, linker Teil). Unter Berücksichtigung von  $\psi = \sqrt{s - \sigma^2}$  ergeben sich die Polstellen in der  $s$ -Ebene, in welcher gemäß [42] die Integration durchzuführen ist, mit

$$[45] \quad s_k = \frac{2k\pi}{L} \left( \frac{2k\pi}{L} + 2i\sigma \right) \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$$

Gegenüber [44] tritt nur noch ein Vorzeichen auf; die auf Parallelen zur negativen reellen  $\psi$ -Achse liegenden Pole befinden sich nämlich bei Betrachtung der  $s$ -Ebene im anderen Blatt. Der Verzweigungsschnitt reicht bis  $+\sigma^2$ . Die Pole gemäß [45] liegen auf einer Parabel, deren Scheitelpunkt im Ursprung liegt und deren Achse mit der positiven reellen Halbachse identisch ist (siehe Abb. 6, rechter Teil).

Die Residuen von  $G_\sigma(s)$  sind (gemäß Anhang 2):

$$[46] \quad \text{Res } G_\sigma(s_k) = -\frac{1}{L} e^{i \frac{2k\pi}{L} (\frac{L}{2} - x)}$$

Die Pole der Verteilungsfunktion [37]

$$\Phi(s) = \frac{1}{\pi \sqrt{2d}} \left( 1 + \frac{(s-s_0)^2}{2d^2} \right)^{-1}$$

andererseits liegen bei

$$[47] \quad s_j = s_0 + i j d \sqrt{2} \quad \text{für } j = \pm 1;$$

die Residuen ergeben sich zu

$$[48] \quad \text{Res } \Phi(s) = \frac{1}{2\pi i j} \quad \text{für } j = \pm 1$$

Sie sind sehr einfach durch Partialbruchzerlegung der Verteilungsfunktion zu erhalten (siehe Anhang 3).

Die Integration soll unter Anwendung des Cauchy'schen Residuentheorems durchgeführt werden. Da die Funktion  $G_\sigma(s)$  für  $k = 0$  (siehe [45]) auch einen Pol im Ursprung besitzt, wird — um diesen auszuschließen — die Integration zweifach entlang der reellen Achse durchgeführt und die Integrationswege im Unendlichen der positiven (bzw. negativen) imaginären Halbebene geschlossen (siehe hierzu Abb. 7).

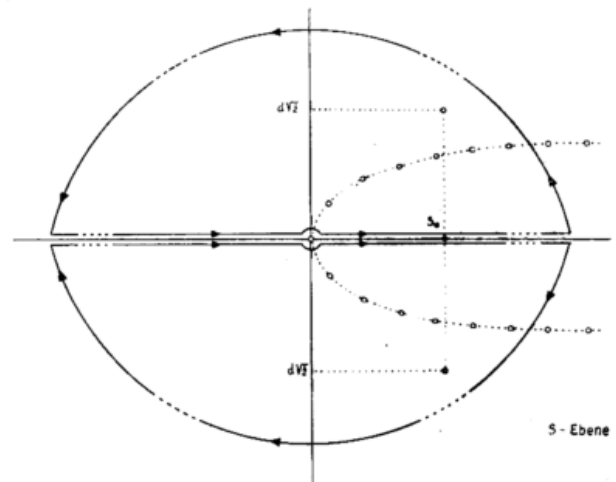


Abb. 7

Die Lage der Pole der Funktionen  $G_\sigma(s)$  und  $\Phi(s)$  sowie die Angaben der Integrationswege zur Bestimmung der Funktion  $G_\sigma$  gemäß Gleichung [42] in der komplexen  $s$ -Ebene.

Man erhält

$$[49] \quad 2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\sigma}(s) \Phi(s) ds = 2\pi i \left\{ \left( \sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{k=-\infty}^{-1} \right) [\text{Res } G_{\sigma}(s_k)] \Phi(s_k) + \sum_{j=\pm 1} [\text{Res } \Phi(s_j)] G_{\sigma}(s_j) \right\}$$

$$[50] \quad G_{\sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\sigma}(s) \Phi(s) ds = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2} \left( \sum_{k=-\infty}^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \right) \frac{d\sqrt{2}}{\pi L} \frac{e^{-i \frac{2k\pi}{L} x}}{\left( \frac{2k\pi}{L} \right)^4 + 2i\sigma \left( \frac{2k\pi}{L} \right)^3 - (2s_0 - \sigma^2) \left( \frac{2k\pi}{L} \right)^2 - 2i\sigma s_0 \left( \frac{2k\pi}{L} \right) + 2d^2 + s_0^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=\pm 1} \frac{1}{2\pi i j} G_{\sigma}(s_0 + ijd\sqrt{2}) \right\}$$

An der Gleichung [50] ist erkenntlich, daß für  $k \rightarrow \infty$  der erste Term der rechten Seite  $\rightarrow 0$  geht, ein Umstand, der uns berechtigt, den Integrationsweg zwischen zwei Polstellen  $s$  (für sehr große  $k$ ) hindurchzuführen und zu schließen.\* Setzt man im zweiten Term der rechten Seite von [50] die Funktion  $G_{\sigma}(s_0 +$

Der entgegengesetzte Umlaufsinn der Integrationswege bedingt die Differenz der Summen im ersten Term der rechten Seite. Gleichung [49] läßt sich auch in der folgenden Form schreiben:

$ijd\sqrt{2}$ ) für  $j = +1$  und  $j = -1$  gemäß Gleichung [43], so erhält man nach längeren Umformungen wiederum einen reellen Ausdruck für  $\hat{G}_{\sigma}(s_0, d, \sigma, x)$ . Der nachfolgende Grenzübergang  $\sigma \rightarrow 0$  liefert dann die gewünschte Einflußfunktion:

[51]

$$\hat{G}(s_0, d, x) = -\frac{d\sqrt{2}}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi k}{L} x}{\left( \left( \frac{2\pi k}{L} \right)^2 - s_0 \right)^2 + 2d^2} - \frac{1}{4\sqrt{s_0^2 + 2d^2} \left\{ \text{Cosh } M \frac{L}{2} - \cos N \frac{L}{2} \right\}} \left[ + \dots + e^{-\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Sinh } M \frac{L}{4} \cos N \frac{L}{4} \left( N \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) - M \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) + e^{-\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Cosh } M \frac{L}{4} \sin N \frac{L}{4} \left( N \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) + M \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) - e^{-\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Sinh } M \frac{L}{4} \cos N \frac{L}{4} \left( N \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) + M \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) + e^{-\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Cosh } M \frac{L}{4} \sin N \frac{L}{4} \left( N \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) + M \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \right]$$

Hierin bedeuten die Abkürzungen

$$M = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{s_0^2 + 2d^2} - s_0}$$

$$N = \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{s_0^2 + 2d^2} + s_0}$$

für  $d=0$  ist  $M=0$  und  $N=2\sqrt{s_0}$ ; es ist ferner, wie leicht zu sehen,

$$\lim_{d \rightarrow 0} \hat{G}(s_0, d, x) = G(s_0, x) \quad (\text{siehe Gleichung [17]}).$$

**9. Berechnung der zeitlich gemittelten Höhenlage der 500 mb-Fläche entlang 45°N bei verschiedenen Häufigkeitsverteilungen der zonalen Strömungsgeschwindigkeit**

Unter Einsetzung der aus den Beobachtungen hervorgehenden Werte für  $s_0$  und  $d$  soll gemäß Gleichung [51] die Einflußfunktion  $\hat{G}(s_0, d, x)$  ausgewertet werden und mittels dieser durch eine Integration gemäß Gleichung [41] die (zeitlich gemittelte) Höhenlage  $\hat{z}(x)$  der 500 mb-Fläche entlang des 45. Breitengrades berechnet werden. Die errechneten Höhenwerte ihrerseits sollen — unter

\*) Entlang des beschriebenen Weges kann auch dann integriert werden, wenn die Verteilung von  $U$  sowohl West- wie auch Ostwinde enthält, die entsprechende  $s$ -Verteilung also von  $+\infty$  nach  $-\infty$  springt.

In diesem Zusammenhang darf darauf aufmerksam gemacht werden, daß bei alleiniger Existenz von Ostwinden gänzlich andere Verhältnisse herrschen würden. Gleichung [15] wäre in diesem Falle vom Typ einer Helmholtz-Gleichung, die entsprechende Green'sche Funktion würde monoton vom Einflußpunkt aus abfallen; die bei Westwinden vorhandene Wellenbildung käme nicht zustande.

Berücksichtigung der zahlreichen, in Abschnitt 7 genannten Vereinfachungen — mit den Höhenwerten aus Beobachtungen gewonnener Mittelkarten verglichen werden.

**a.) Auswertung von  $\hat{G}(s_0, d, x)$**

Die Einflußfunktion  $\hat{G}(s_0, d, x)$  wurde für drei verschiedene Werte der Streuung  $d$  berechnet; für alle drei Fälle gilt jedoch der gleiche Wert  $s_0$ , welcher zu

$$s_0 = 0.05062 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-2}$$

entsprechend einem häufigsten Wert des Grundstromes von  $U = 32 \text{ m sec}^{-1}$

bestimmt wurde. Die verschiedenen Streuungswerte sind:

$$d_0 = 0 \text{ cm}^{-2}$$

entsprechend einer Geschwindigkeitsdifferenz von  $\Delta U = 0 \text{ m sec}^{-1}$

$$d_1 = 0.00723 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-2}$$

entsprechend einer Geschwindigkeitsdifferenz von  $\Delta U = 4 \text{ m sec}^{-1}$

$$d_2 = 0.0231 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-2}$$

entsprechend einer Geschwindigkeitsdifferenz von  $\Delta U = 10 \text{ m sec}^{-1}$ .

Ein Vergleich mit Beobachtungsdaten, z. B. mit der Häufigkeitsverteilung des Grundstromes  $U$  im Falle des Winterhalbjahres 1951/52 (vgl. Abb. 3), bei der das Maximum bei  $27 \text{ m sec}^{-1}$  liegt, oder mit dem häufigsten  $U$ -Wert im langjährigen Mittel (US-Weather-Bureau (38))  $23 \text{ m sec}^{-1}$  zeigt, daß der Wert  $s_0 = 0.05062 \times 10^{-15} \text{ cm}^{-2}$  zu klein (bzw. die entsprechende häufigste Grundstromgeschwindigkeit  $U = 32 \text{ m sec}^{-1}$  zu groß) angenommen wurde. Erst recht ist  $s_0$  aber gegenüber demjenigen häufigsten Wert zu klein angenommen, der sich ergibt, wenn die schiefe  $s$ -Verteilung durch eine  $G a u s s$ 'sche Normalverteilung ersetzt wird (vgl. Abb. 5). Die Verwendung des obigen Wertes von  $s_0$  wird jedoch durch die folgende Überlegung gerechtfertigt:

Eine richtige Wahl des Mittelwertes  $s_0$  ist sehr wesentlich für die Güte des Resultates, da  $s_0$  zum überwiegenden Teile die Wellenlänge der Einflußfunktion  $G$  bestimmt. Je besser diese aber mit der Wellenlänge in der beobachteten Höhenverteilung übereinstimmt, desto besser wird auch die Übereinstimmung zwischen der berechneten  $\hat{z}(x)$  und beobachteten  $\hat{z}_{obs}(x)$  Höhenverteilung der 500 mb-Fläche sein. Hier macht sich ein deutlicher Mangel des eindimensionalen Modelles bemerkbar: Die Wellenlänge der Einflußfunktion  $G$  hängt auch noch von der Änderung des Strömungsfeldes in meridionaler Richtung ab, ein Umstand, dem  $C h a r n e y$  und  $E l i a s s e n$  durch Annahme einer sinusoidalen Abhängigkeit der Störungen in meridionaler Richtung ( $H a u r w i t z$  (14)) Rechnung trugen. Da aber die meridionale Wellenlänge der (gemäß der Linearisierungsbedingungen nur kleinen) Störungen sich aus den Beobachtungen kaum feststellen läßt, wird mit der Wahl derartiger Werte die Rechnung nicht weniger ungenau als bei der Annahme eines gegenüber den Beobachtungen zu kleinen  $s_0$  Wertes. Dies wird also durch einen Mangel des verwendeten sehr einfachen Modelles gerechtfertigt.

In diesem Zusammenhang ist es von Interesse, den Einfluß der Streuung  $d$  auf die Wellenlänge der Einflußfunktion  $G$  zu studieren. Letztere ist, wie aus den beiden letzten Termen in [51] ersichtlich  $4\pi/N$ , die Wellenzahl also

$$\delta = \frac{N}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{s_0^2 + 2d^2} + s_0} = \sqrt{s_0} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 2(\frac{d}{s_0})^2}}{2}} = \sqrt{s_0} \gamma$$

Es ist also die Wellenzahl gleich derjenigen der stationären Wellen von  $R o s s y$  (30) multipliziert mit einem

Einflußfaktor  $\gamma$ , der seinerseits wieder vom Mittelwert  $s_0$  und der Streuung  $d$  abhängt. Im Falle  $d = 0$  wird  $\gamma = 1$  und damit  $\delta = \sqrt{s_0}$ , die Einflußfunktion  $G$  gemäß [51] geht in  $G$  gemäß [17] über. Für die angenommenen Werte von  $d_1$  und  $d_2$  ist

$$\begin{aligned} (d_1/s_0)^2 &= 0.02041 \\ (d_2/s_0)^2 &= 0.20661 \end{aligned}$$

oder aber der Faktor  $\gamma$

$$\begin{aligned} \gamma(d_0) &= 1.0000 \\ \gamma(d_1) &= 1.0101 \\ \gamma(d_2) &= 1.0944 \end{aligned}$$

Wie ersichtlich, ist der Einfluß der Streuung auf die Wellenzahl sehr gering, er setzt die Wellenlänge noch geringfügig herab. Damit wird durch die Berücksichtigung der Streuung, d. h. durch die Berücksichtigung eines ganzen Kollektives von den mittleren Höhenwert bildenden Fällen mit verschiedener Zonalgeschwindigkeit, der durch den bereits früher genannten Modellmangel entstehende Fehler noch verstärkt.

Die Größen  $d_1$  und  $d_2$  wurden so gewählt, daß durch Vergleich der Resultate sowohl mit einer kleinen als auch mit einer großen Streuung  $d$  der Einfluß verschiedener Verteilungsfunktionen deutlich wird. Eine Ermittlung der Werte  $d_1$  und  $d_2$  aus den Beobachtungen ist nicht erfolgt.

Die Berechnung der Einflußfunktion  $G$  gemäß [51] wurde für die angenommenen Werte  $s_0$  sowie  $d_0, d_1, d_2$  für 36 äquidistante Punkte auf dem Breitenkreis  $45^\circ N$  durchgeführt. Hierbei entfällt die Auswertung der unendlichen Summe in Gleichung [51] für den Fall  $d = 0$ , während im Falle  $d_1$  die ersten zwölf, im Falle  $d_2$  die ersten dreizehn Glieder berücksichtigt wurden. Die Konvergenz der Reihe erwies sich als so gut, daß es bei der geforderten Genauigkeit genügte, die Rechnung nach der genannten Anzahl von Gliedern abzubauen.

Die sich ergebenden Einflußfunktionen sind in Abb. 8 dargestellt. Ein Vergleich mit der Darstellung bei  $C h a r n e y$  und  $E l i a s s e n$  zeigt, daß die Streuung der Zonalgeschwindigkeit im Mittelbildungszeitraum die gleiche Wirkung hat wie die Reibung nach dem Ansatz von  $C h a r n e y$  und  $E l i a s s e n$ : Die Einflußfunktion zeigt — ähnlich einer gedämpften Schwingung — mit der Entfernung vom Einflußpunkt in Richtung der Strömung ständig abnehmende Amplituden. Die Werte der Einflußfunktion sind für die drei Fälle  $d_0, d_1$  und  $d_2$  in den Reihen 1 — 3 der Tabelle 1 angegeben.

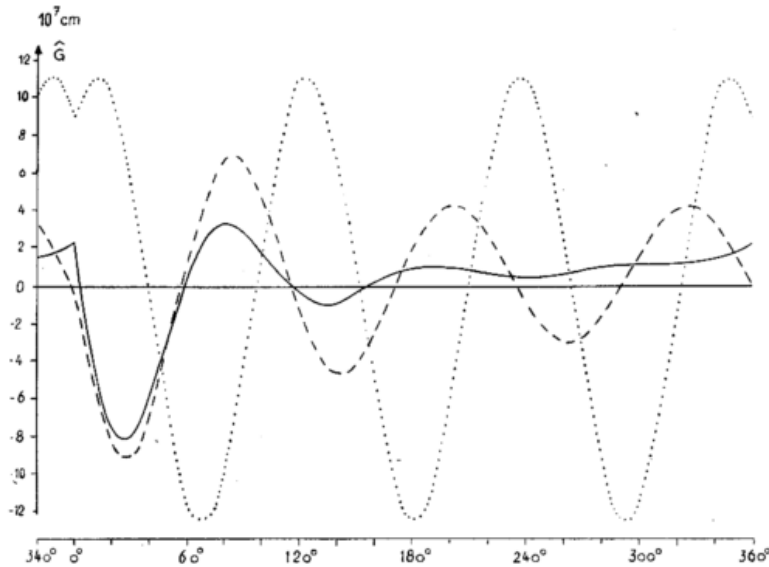


Abb. 8  
Einflußfunktionen  $G(s_0, d, x)$  entsprechend Gleichung [51] für die Fälle  $d_0$  (.....),  $d_1$  (-----) und  $d_2$  (—————). Zahlenwerte für  $s_0, d_0, d_1$  und  $d_2$  in Abschnitt 9a.

**b.) Berechnung der  $\hat{z}(x)$**

Zur Berechnung der mittleren Höhenwerte wurde die Integration in Gleichung [41] durch eine Summation mit Berücksichtigung lediglich der Wert für  $x = x_0 + \mu \Delta x$ , mit  $\Delta x = 785.74 \text{ km}$  (entsprechend  $10^0 \lambda$ )  $\mu = 1, 2, 3 \dots$  durchgeführt; auch die laufende Koordinate  $\xi$  fand ebenfalls nur an jedem 10. Längengrad Berücksichtigung.

Für  $h$  wurden die Höhenwerte einer ausgeglichenen

Topographie der Erdoberfläche verwendet. Diese Höhenwerte (siehe Tabelle 2, Reihe 1) wurden durch Mittelbildung über einem ca.  $1200 \times 1200 \text{ km}^2$  großen Areal erhalten, das den angegebenen Koordinatenpunkt zum Mittelpunkt hatte.

Entsprechend den Beobachtungen wurde in dem Faktor  $q = f^2 \kappa / gH$  die Reduktionsgröße

$$\kappa = U_0 / U = 0.5$$

angenommen.

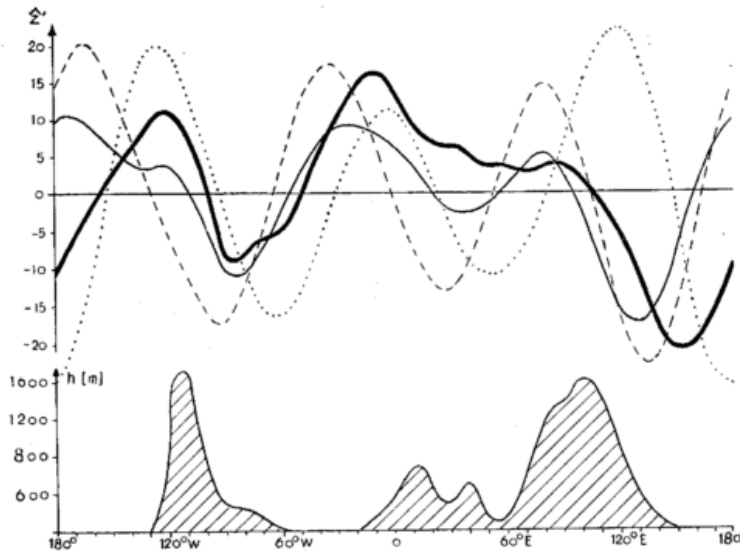


Abb. 9  
 Beobachtete (—) und berechnete ( $d_0$  ..... ,  $d_1$  - - - - - ,  $d_2$  - - - - -) Höhenlage  $\hat{z}(x)$  der 500-mb-Fläche in  $45^\circ \text{ N}$ . Angegeben sind nur die Abweichungen vom Breitenkreismittel in dm. ( $\hat{z}(x)$  für  $d_0$  ist um  $\frac{1}{2}$  verkleinert dargestellt.)  
 Unterer Teil: Ausgeglichenen Höhe der Erdoberfläche.

**10. Diskussion der Resultate**

Aus den drei für  $d_0$ ,  $d_1$  und  $d_2$  berechneten, zeitlich gemittelten Höhenverteilungen  $\hat{z}(x)$  läßt sich durch Vergleich mit den beobachteten Höhenwerten, nämlich dem langjährigen Januarmittel (US-Weather Bureau (38)) feststellen, daß die Übereinstimmung um so besser ist, je größer der Wert für die Streuung  $d$  gewählt wurde.

Die bessere Anpassung in den Fällen  $d \neq 0$  ist zugleich ein Beweis dafür, daß der zeitliche Mittelwert nicht mit dem rein stationären Fall ( $d = 0$ ) identifiziert werden darf, vielmehr der Turbulenzterm in Gleichung [14] berücksichtigt werden muß. Sobald nämlich ein ganzes Kollektiv von Fällen mit verschiedenen  $s$ -Werten zum Zustandekommen von  $\hat{z}(x)$  beiträgt ( $d \neq 0$ ), wird die Einflußfunktion  $G$  „gedämpft“ und vom Einflußpunkt entfernter liegende Punkte hinsichtlich ihres Höhenwertes  $\hat{z}$  weniger beeinflußt (vgl. Abb. 8, in welcher die einzelnen Kurven auch als die Höhenverteilungen gedeutet werden können, die durch ein infinitesimal schmales, im Punkte  $0^\circ$  gelegenes Gebirge hervorgerufen werden). In diesem Sinne hat die Streuung  $d$  die völlig gleiche Wirkung wie die von Charney und Eliassen verwendete Reibung, deren Stärke durch die Größe des Reibungskoeffizienten  $\sigma$  gegeben war. Auch diese beiden Autoren erreichten eine Verbesserung der Resultate mit größer werdenden Reibungskoeffizienten, welche die Einflußfunktion „dämpften“ und den Einflußbereich beschränkten. Über die Definition des Einflußbereiches und seine Berechnung findet sich Näheres bei Berkofsky (1).

Für die Dämpfung der Einflußfunktion  $G$  (ohne Unterschied, ob diese durch die Streuung  $d$  in unserem Falle

oder durch den Reibungskoeffizienten  $\sigma$  im Falle von Charney und Eliassen bedingt wird) wird es einen optimalen Wert geben, über welchen hinaus die Anpassung der Resultate an die Beobachtungen wieder schlechter wird. Wenn die Dämpfung zu stark ist, geht die Wellenbildung gänzlich verloren; in diesem Falle wäre es auch nicht mehr möglich z. B. den Rücken vor der westeuropäischen Küste — nach vorliegender Rechnung durch die Rocky Mountains induziert — zu erklären.

Besonders deutlich macht sich der Einfluß der Streuung  $d$  auf die Position der mittleren Tröge und Rücken. Während  $\hat{z}(x)$  für  $d_0$  im Bereich  $20^\circ \text{ E} < \lambda < 170^\circ \text{ E}$  einen nahezu inversen Verlauf zu  $\hat{z}_{\text{obs}}(x)$  hat, weist die entsprechende Kurve für  $d_1$  nur noch eine Phasendifferenz von ca. 25% bezüglich des ostasiatischen Troges auf, verschlechtert aber hingegen die Übereinstimmung mit der Beobachtung im Bereich  $160^\circ \text{ E} < \lambda < 110^\circ \text{ W}$ . Für den Fall großer Streuung ( $d_2$ ) stimmt die Lage der Tröge und Rücken — unter Berücksichtigung der weitgehenden Vereinfachungen des verwendeten atmosphärischen Modelles — verhältnismäßig gut mit derjenigen überein, die sich aus den Beobachtungen ergibt. Die Phasendifferenz zwischen berechneter und beobachteter Lage des Troges an der ostasiatischen Küste ließe sich durch Wahl eines kleineren Wertes von  $s_0$  noch verringern. Über Osteuropa ist in den Rechenergebnissen ein Trog noch deutlicher ausgeprägt als dies in den entsprechenden Beobachtungen der Fall ist. Es darf jedoch bemerkt werden, daß andere Mittelkarten (Scherhag (31), Flohn (10)) an der betreffenden Stelle einen ausgeprägteren Trog erkennen lassen als die Karten des US-Weather-Bureau (38).

**11. Die Berechnung des geostrophischen, meridionalen makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße**

Das vorstehend verwendete Verfahren der Aneinanderreihung stationärer Zustände gestattete eine approximative Berücksichtigung des Turbulenztermes

$$\frac{f\beta}{g} \int \overline{(U-v)^2} \delta x$$

auf der rechten Seite der Gleichung [14]. Dieser Term stellt aber nichts anderes als den (über x integrierten), makroturbulenten Transport der reziproken, zonalen Bewegungsgröße in meridionaler Richtung dar.

Es mag in diesem Zusammenhang zunächst verwunderlich erscheinen, daß in diesem Turbulenzterm der Reziprokwert der zonalen Bewegungsgröße und nicht diese selbst als die in meridionaler Richtung zu transportierende Quantität enthalten ist. Da es jedoch das Endziel war, die zeitlich gemittelte Höhenlage einer Druckfläche auszurechnen, mußte die Gleichung (unter Verwendung der geostrophischen Approximation) nach den im Advektionsterm stehenden Höhenwerten z aufgelöst werden. Hingegen erfolgt z. B. bei den zahlreichen Bilanzbetrachtungen der zonalen Bewegungsgröße im Problembereich der Allgemeinen atmosphärischen Zirkulation die Auflösung nach dem Term mit der zeitlichen, lokalen Änderung der Zonalströmung; die den Turbulenzterm ausmachende Advektion zonaler Bewegungsgröße erscheint nur als Produktions- oder Dissipationsterm auf der rechten Seite. In diesen Fällen enthält der Turbulenzterm die zonale Bewegungsgröße selbst, nicht ihren Reziprokwert. Der Unterschied in der zu transportierenden Quantität liegt somit an einer unterschiedlichen Problemstellung.

Bilanzbetrachtungen der kinetischen Energie (vgl. z. B. Pisharoty (26)) oder der Vorticity (vgl. z. B. Kao (16)) machen ebenfalls die Auswertung von Termen notwendig, die den makroturbulenten Transport darstellen, die jedoch die zu transportierende Quantität als andere Formen der zonalen Bewegungsgröße (u<sup>2</sup> im ersten Falle, ∂u/∂y im zweiten Falle) enthalten. Auch diese Terme müßten mit der in den vorangehenden Abschnitten verwendeten Methode der Aneinanderreihung stationärer Zustände näherungsweise ausgewertet werden können, sofern nur u von x unabhängig ist. In gleicher Weise gilt dies natürlich für den Fall, daß die zu transportierende Quantität nur die reine zonale Bewegungsgröße u (jedoch von x unabhängig, also U) ist; derartige Turbulenzterme

$$[52] \quad A = \overline{U^2 v^2}$$

treten z. B. in allen Bilanzuntersuchungen des Rotationsmomentes auf.

Im folgenden soll versucht werden, die Größe dieses Termes A näherungsweise anzugeben, wenn nur die Kenntnis statistischer Maßzahlen über die zeitliche Verteilung von U vorliegt; weiter ist natürlich die Kenntnis der Topographie der Erdoberfläche erforderlich, welche nach unserer Vorstellung bei verschieden starkem Grundstrom U eine verschieden große meridionale Bewegung v bedingt. Wir bedürfen allerdings noch der Voraussetzung, daß der meridionale Transport nahezu geostrophisch erfolgt:

$$[53] \quad A \approx A_g = \overline{U^2 v_g^2}$$

Bedenkt man, daß gemäß Gleichung [14] für die Teilintervalle t<sub>1</sub> die Höhenwerte z(x) gegeben sind, so ist auch — unter Berücksichtigung der geostrophischen Approximation [13] — für jede Stelle x die geostrophische Meridional Komponente v<sub>g</sub>(x) für das Teilintervall t<sub>1</sub> mit

$$[54] \quad \overline{v_g}(x) = \frac{g}{f} q \int_0^L h'(\xi) \frac{\partial G}{\partial x}(x - \xi) d\xi$$

gegeben. Da die Zonalgeschwindigkeit im Teilintervall t<sub>1</sub> definitionsgemäß

$$[55] \quad \overline{U} = (\bar{s})^{-1} \beta$$

ergibt sich:

$$[56] \quad \overline{U v_g} = \frac{\beta}{f} g q \int_0^L h'(\xi) (\bar{s})^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(x - \xi) d\xi$$

Hierbei gilt das Produkt  $\overline{U v_g}$  nur im einzelnen Teilintervall t<sub>1</sub>. Eine Mittelbildung über den Gesamtzeitraum t<sub>2</sub> ergibt

$$[57] \quad \widehat{\overline{U v_g}} = \frac{\beta}{f} g q \int_0^L h'(\xi) \frac{t_1}{t_2} \sum_{\mu=1}^{\mu=t_2/t_1} [(\bar{s})^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(x - \xi)]_{\mu} d\xi$$

oder analog zu [26]

$$[58] \quad \widehat{\overline{U v_g}}(x) = \frac{\beta}{f} g q \int_0^L h'(\xi) I(x - \xi) d\xi$$

Hierin ist die Einflußfunktion:

$$[59] \quad I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(d, s) s^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) ds^*$$

Bezeichnen wir den Gesamttransport mit C<sub>g</sub>

$$[63] \quad C_g = \widehat{\overline{U v_g}},$$

so ist der gesuchte Turbulenzterm [53]

$$[64] \quad A_g = C_g - \widehat{\overline{U v_g}},$$

worin C<sub>g</sub> gemäß [63] durch [58] gegeben ist. Es muß mit anderen Worten vom Gesamttransport C<sub>g</sub> noch derjenige Transport zonaler Bewegungsgröße subtrahiert werden, der durch die mittlere meridionale Bewegung in Hadley-Zellen (Hadley (13)) erfolgt. Dieser letzte Anteil läßt sich einfach berechnen: Der Mittelwert von U ist bekannt, der (zeitliche) Mittelwert von v<sub>g</sub> läßt sich als Funktion von x mit der einfachen Green'schen Funktion gemäß Gleichung [17] berechnen. Der mittlere Transport  $\widehat{\overline{U v_g}}$  könnte natürlich auch gemäß Gleichung [58] berechnet werden, wenn man sich hierin der Einflußfunktion I(x) gemäß [59] für den Fall verschwindender Streuung d = 0 bediente.

In den Bilanzuntersuchungen des Rotationsmomentes, die zu einem besseren Verständnis der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation durchgeführt werden, und die zahlreiche Auswertungen makroturbulenter

\* Durch Differentiation von [38] nach x erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{v_g} + 2\sigma \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_g} + \bar{s} \overline{v_g} = -q \frac{g}{f} \frac{\partial}{\partial x} h'$$

mit der Lösung

$$[60] \quad \overline{v_g}(x) = \frac{g}{f} q \int_0^L \frac{\partial h'}{\partial x}(\xi) G_{\sigma}(x - \xi) d\xi$$

worin G<sub>σ</sub> durch Gleichung [40] gegeben ist. In diesem Falle ist  $\overline{U v_g}$  zu berechnen aus

$$[61] \quad \widehat{\overline{U v_g}} = \frac{\beta}{f} g q \int_0^L \frac{\partial h'}{\partial x}(\xi) \hat{J}(x - \xi) d\xi$$

mit der Einflußfunktion

$$[62] \quad \hat{J}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s) \frac{1}{s} G(x, s) ds.$$

Die Integration [61] ist derjenigen gemäß [58] vorzuziehen, da I(x-ξ) für ξ = x einen Sprung aufweist (differenzierte Green'sche Funktion). Da aber für die Integration [61] die Werte der Neigung der ausgeglichenen Erdoberfläche benötigt werden, die bei punktwiser Ermittlung nur sehr ungenau erhaltbar sind, soll die Integration doch gemäß [58] durchgeführt werden.

Transporte zonaler Bewegungsgröße enthalten, werden in der Regel diese Transporte als Mittel über einen geschlossenen Breitenkreis betrachtet. So ermittelt man diese Quantitäten als die Korrelationen der räumlichen Abweichungen zu einer bestimmten Zeit

$$\overline{u'v'}(t) \text{ oder auch } \overline{u_g'v_g'}(t)$$

und betrachtet diese wiederum als zeitliches Mittel über verschieden lange Zeiträume

$$\overline{\overline{u'v'}}$$

Der Turbulenzterm  $A_g$  hingegen, für den oben die Möglichkeit einer approximativen Berechnung angegeben wurde, besteht aus der Korrelation der zeitlichen Abweichungen (vom Mittelwert) an einem bestimmten Ort:

$$[65] \quad A = \overline{u'v'}(x) \quad \text{bzw.} \quad A_g = \overline{u_g'v_g'}(x)$$

Da wir wegen der Notwendigkeit der Linearisierung (Gleichung [7] — [8]) statt [65]

$$[66] \quad A = \overline{U'v'}(x) \quad \text{bzw.} \quad A_g = \overline{U_g'v_g'}(x)$$

verwenden, ist

$$[67] \quad \overline{\overline{A_g}} = 0.$$

Die durch die Linearisierung bedingte Einfachheit des von uns verwendeten Modelles läßt also einen makroturbulenten Fluß zonaler Bewegungsgröße über einen geschlossenen Breitenkreis hinweg nicht zu; es werden vielmehr nur von der geographischen Länge abhängige Flüsse berechnet, die sich über einen geschlossenen Breitenkreis völlig auskompensieren. Diese zum Teil nach Norden, zum Teil nach Süden gerichteten Flüsse können nur durch die verschiedene Beschaffenheit der Topographie der Erdoberfläche bedingt sein.

Der gesamte meridionale makroturbulente Transport von zonaler Bewegungsgröße kann in einen planetarischen Anteil und einen orographisch bedingten aufgeteilt werden, derart daß

$$[68] \quad A(x) = \overline{\overline{U'v'}} + \overline{U'v'}(x)$$

Hierin stellt der erste Term der rechten Seite den planetarischen (über einen geschlossenen Breitenkreis hinweggehenden) Anteil des makroturbulenten Flusses dar; der zweite Term als die Abweichungen hiervon (von  $x$  bzw. von der geographischen Länge  $\lambda$  noch abhängig) gibt den orographisch bedingten Anteil. Die Aussage [67] bedeutet nun, daß in unserem Falle infolge der Linearisierung der planetarische Anteil nicht erfaßt werden kann ( $\overline{\overline{U'v'}} = 0$ ) und nur die orographisch bedingten Anteile des turbulenten Flusses berechnet werden.

Die Existenz des planetarischen Anteiles setzt eine (im Breitenkreismittel nicht verschwindende) Asymmetrie der Turbulenzkörper (Zyklonen, Antizyklonen) voraus (Starr (33)), wie z. B. die Neigung der Trog- und Rückenachsen gegenüber den Meridianen o. ä. Dieser Effekt ist — sofern er im Breitenkreismittel nicht verschwindet — zunächst unabhängig von der Orographie und dient der Ausgleichung der planetarischen Bilanz des Rotationsmomentes (Transport von Rotationsmoment aus den Tropen und der Poiregion in die mittleren Breiten). Dieser planetarische Transport wird nun noch durch die Orographie beeinflusst, d. h. in bestimmten geographischen Längenbereichen wird er verstärkt in anderen abgeschwächt. Dies ist nur so erklärbar, daß durch den Einfluß der Orographie die Asymmetrie der Turbulenzkörper noch stärker bzw. noch schwächer wird. Die Achse eines Troges z. B. müßte unter dem Einfluß der Orographie eine noch stärkere Neigung zu den Meridianen erfahren, bzw. es müßte diese Neigung geringer werden und die Trogachse einen mehr meridionalen Verlauf annehmen. Unsere Rech-

nung wird, da sie den planetarischen Anteil nicht erfassen kann, nur diese orographisch bedingten Anteile des makroturbulenten Impulstransportes ermitteln.

Dies ist zunächst ein Nachteil, weil nahezu alle empirischen Ermittlungen quantitativer Art sich auf die Feststellung des planetarischen Flusses beschränken; daher ist ein Vergleich der Rechenresultate mit den Beobachtungsergebnissen kaum möglich. Zweifellos ist es im Rahmen der Untersuchungen zur allgemeinen atmosphärischen Zirkulation auch wesentlich wichtiger, den planetarischen Anteil des turbulenten Flusses zu ermitteln, als örtliche Abweichungen von dessen Breitenkreismittel festzustellen. Dennoch erweist sich dieser Nachteil unseres einfachen Modelles in einer anderen Hinsicht als Vorteil: Die Tatsache, daß der planetarische Anteil verschwindet, versetzt uns in die Lage zu entscheiden, auf welchem Breitenkreissektor der aus Beobachtungsdaten ermittelte makroturbulente Impulsfluß als repräsentativ für den über den gesamten Breitenkreis hinweggehenden gleichartigen Fluß angesehen werden kann. Es ist insofern sehr wichtig diese Entscheidung zu treffen, als die zahlenmäßige Auswertung von Turbulenztermen einen sehr hohen Arbeitsaufwand erfordert und die Beschränkung auf einen repräsentativen Sektor die Arbeit sehr erleichtert. Noch wichtiger ist für diese Entscheidung aber die Tatsache, daß das Radiosondennetz nur über bestimmten Breitenkreissektoren so dicht und so homogen ist, wie es für eine einigermaßen zuverlässige Auswertung der Turbulenzterme anhand des Beobachtungsmaterials erforderlich ist. So wird z. B. der amerikanische Sektor (ca. 120°W — 60°W) wegen seines guten und homogenen aerologischen Beobachtungsmaterials für Bilanzuntersuchungen des Rotationsmomentes bevorzugt (vgl. Starr (34)).

Wir dürfen einen Breitenkreissektor hinsichtlich des turbulenten Impulstransportes dann als repräsentativ für den gesamten Breitenkreis ansehen, wenn der sich ergebende orographisch bedingte, meridionale makroturbulente Impulsfluß im Mittel über den betreffenden Breitenkreissektor verschwindet; in diesem Falle würde die Verwendung eines besseren Modelles für den Breitenkreissektor eben nur noch den planetarischen Anteil des Flusses wiedergeben.

Für die Berechnung von  $A_g$  gemäß [64] ist noch zu bemerken, daß es nicht möglich ist, vernünftige Werte für  $\hat{U}v_g$  zu berechnen. Dies liegt ebenfalls wieder an Schwächen des verwendeten Modelles bzw. der Methode, insofern nämlich, als die schiefe  $s$ -Verteilung durch eine symmetrische Glockenkurve ersetzt wird. Es war bereits in Abschnitt 9 a dargelegt worden, daß aus diesem Mangel, wie auch aus demjenigen der Nichtberücksichtigung der meridionalen Erstreckung von Störungen, mit einem gegenüber den Beobachtungen zu kleinen  $s$ -Wert (zu hohen  $U$ -Wert) gerechnet werden müßte. Dies ist der Grund dafür, daß der Anteil  $\hat{U}v_g$  bei der Berechnung zu groß ausfällt. Um dieses Fehlresultat zu vermeiden, machen wir uns den Beobachtungsbefund zunutze, daß in mittleren Breiten der geordnete (Hadley-) Transport  $\hat{U}v_g$  nur etwa 10% des Gesamttransportes ausmacht:

$$\text{magn } \hat{U}v_g = 10^{-1} \text{ magn } C_g$$

(vgl. Starr und White (36)). Deshalb können wir schreiben:

$$[69] \quad A_g \approx C_g$$

Um für bestimmte Fälle, für die  $s_0$  sowie  $d$  bekannt sind, den geostrophischen, meridionalen, makroturbulenten Transport zonaler Bewegungsgröße  $A_g$  zu ermitteln, ist es zunächst erforderlich, die Einflußfunktion  $I(x)$  gemäß Gleichung [59] und mit dieser — unter Berücksichtigung von [63] —  $C_g$  gemäß Gleichung [58] zu berechnen.

**12. Die Berechnung der Einflußfunktion I(x)**

Für die Einflußfunktion I(x) gilt das gleiche wie für G(x): Die Integration (in diesem Falle gemäß [59]) ist nur möglich durch Einführung der Reibung zu diesem Zweck und anschließendem Grenzübergang für  $\sigma \rightarrow 0$ . Wir erhalten aus [40]

[70a] 
$$\frac{\partial G_\sigma}{\partial x} = -\sigma G_\sigma + P$$

worin P folgende Abkürzung bedeutet

[70b] 
$$P(x) = \frac{e^{-\sigma x} \cos \sqrt{s-\sigma^2} (L-x) - e^{\sigma(L-x)} \cos \sqrt{s-\sigma^2} x}{2 \{ \text{Cosh } \sigma L - \cos \sqrt{s-\sigma^2} L \}}$$

Wegen des späteren Grenzüberganges  $\sigma \rightarrow 0$  werden nur P(x) bei der Integration berücksichtigt. P hat die

gleichen Polstellen wie  $G_\sigma(x)$  siehe [45], nämlich

[71] 
$$s_k = \frac{2k\pi}{L} \left( \frac{2k\pi}{L} + 2i\sigma \right)$$
  
für  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$

Die Residuen von P ergeben sich zu

[71] 
$$\text{Res } P(s) = (i \frac{2k\pi}{L} - \sigma) \frac{1}{L} e^{-\frac{2k\pi}{L} x}$$

Zur Durchführung der Integration [59] erscheint die Wahl des gleichen Integrationsweges wie bei der Integration [42] (siehe Abb. 7) zweckmäßig. Die Stelle  $s_k$  für  $k = 0$  wird wiederum ausgeschlossen. Hierzu berechtigt die physikalische Irrealität, daß dem Wert  $s = 0$  eine Zonalgeschwindigkeit  $U = \infty$  entspricht.

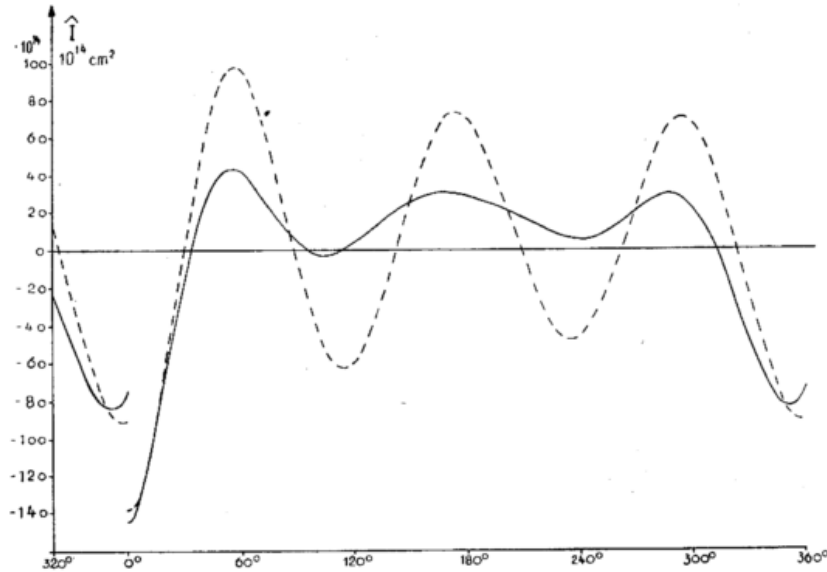


Abb. 10  
Einflußfunktionen I (s<sub>0</sub>, d, x) für d<sub>1</sub> (-----) und d<sub>2</sub> (———). Die Zahlenwerte für s<sub>0</sub>, d<sub>1</sub> und d<sub>2</sub> sind in Abschn. 9a angegeben.

Man erhält für die Einflußfunktion

[73] 
$$I(x) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s) \frac{1}{s} \frac{\partial G}{\partial x}(s) ds =$$
  
$$= 2\pi i \left\{ \left( \sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{k=-\infty}^{-1} \right) \text{Res } P(s_k) \Phi(s_k) + \sum_{j=\pm 1} \text{Res } \Phi(s_j) \frac{1}{s_j} P(s_j) \right\}$$

Auch mittels [73] läßt sich wieder zeigen, daß für  $k \rightarrow \infty$  die Terme der beiden Reihen gegen Null gehen, wenn auch weniger rasch als bei der Funktion  $G_\sigma$  (siehe [50]). Hieraus leitet sich die Berechtigung zum Schließen der Integrationswege ab. Längere Umformungen sowie der anschließende Grenzübergang für  $\sigma \rightarrow 0$  ergeben:

[74]

$$I(s_0, d, x) = -\frac{d\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi k}{L} x}{k \left[ \left( \frac{2\pi k}{L} \right)^2 - s_0^2 + 2d^2 \right]} +$$
  
$$+ \frac{1}{4(s_0^2 + 2d^2)} \left\{ \text{Cosh } M \frac{L}{2} - \cos N \frac{L}{2} \right\} \left[ + \right.$$
  
$$+ e^{\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Sinh } M \frac{L}{4} \cos N \frac{L}{4} \left( s_0 \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) - d \sqrt{2} \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right)$$
  
$$+ e^{\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Cosh } M \frac{L}{4} \sin N \frac{L}{4} \left( s_0 \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) + d \sqrt{2} \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right)$$
  
$$- e^{-\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Sinh } M \frac{L}{4} \cos N \frac{L}{4} \left( s_0 \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) + d \sqrt{2} \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right)$$
  
$$+ e^{-\frac{M}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right)} \text{Cosh } M \frac{L}{4} \sin N \frac{L}{4} \left( s_0 \sin \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) - d \sqrt{2} \cos \frac{N}{2} \left( x - \frac{L}{2} \right) \right) \left. \right]$$

Die gemäß [74] ausgewerteten Einflußfunktionen sind in Abb. 10 dargestellt, die Zahlenwerte in Tabelle 1, Spalte 5 und 6 wiedergegeben. Zu diesen Auswertungen wurden die gleichen Werte  $s_0$ ,  $d_1$  und  $d_2$  angenommen wie zur Berechnung der zeitlich gemittelten Höhenwerte. Der Fall  $d_0 = 0$  würde zwar den Anteil des mittleren, geordneten Fusses  $\bar{U}v_g$  liefern, doch muß aus den schon vorher genannten Gründen wegen des zu niedrigen  $s_0$ -Wertes (zu hohen U-Wertes) mit einem Fehlresultat gerechnet werden.

In den Einflußfunktionen ist deutlich der Sprung am Einflußpunkt zu erkennen.

Auch im Falle der Einflußfunktion  $I(x)$  zeigt sich, daß mit zunehmender Streuung  $d$  die „Dämpfung“ der Einflußfunktionen stärker wird.

**13. Berechnung des geostrophischen, meridionalen, makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße für verschiedene Häufigkeitsverteilungen des Grundstromes U. Vergleich der Resultate mit Beobachtungsergebnissen.**

Die gemäß [74] berechnete Einflußfunktion  $I(x)$  wird unter Berücksichtigung von [69] in

$$[75] \quad A_g \approx \frac{\beta}{f} g q \int_0^L h'(\xi) I(x - \xi) d\xi$$

angewendet und liefert damit näherungsweise den geostrophischen, meridionalen, makroturbulenten Transport zonaler Bewegungsgröße. Wegen des Sprunges von  $I$  an der Stelle  $x = \xi$  wird für [75] der Grenzwert

$$[76] \quad A_g \approx \frac{\beta}{f} g q \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{x-\epsilon} h'(\xi) I(x - \xi) d\xi + \int_{x+\epsilon}^L h'(\xi) I(x - \xi) d\xi \right\}$$

bestimmt. Die Integration in [75] bzw. [76] wurde wiederum durch eine Summation über alle Werte an den Schnittpunkten des Breitenkreises  $45^\circ N$  mit je  $10^\circ$  und in Nähe der Sprungstelle über interpolierte Werte ersetzt. Entsprechend den Berechnungen der Einflußfunktion  $I(x)$  fällt  $A_g$  für die beiden Fälle  $d_1$  und  $d_2$  an; die Resultate sind in Abb. 11 dargestellt, die Werte in Tabelle 2, Spalte 6 und 7 wiedergegeben.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Beobachtungsauswertungen ist insofern nur bedingt möglich, als die meisten Untersuchungen dieser Art die Bestimmung der „räumlichen“ Turbulenz, d. h. der Korrelation der Abweichungen von den entsprechenden Breitenkreismitteln als Funktion der Zeit, nämlich der Quantität

$$[77] \quad \overline{u'v'}(t)$$

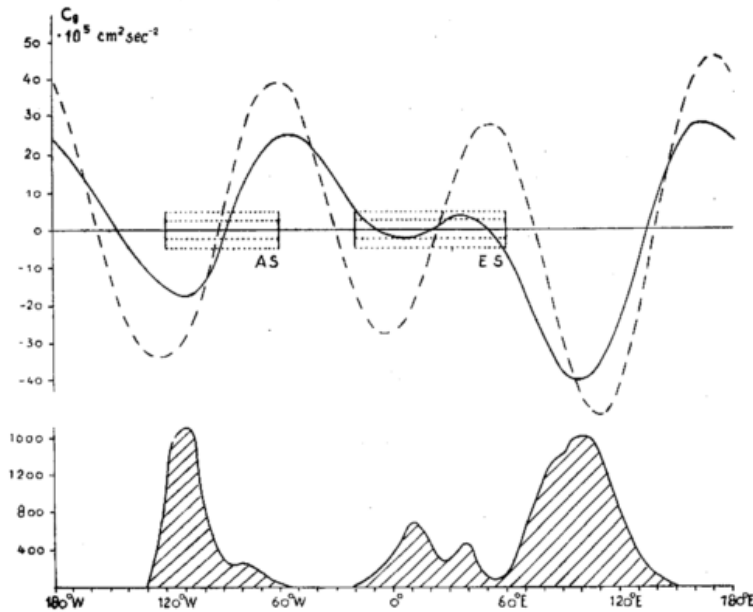


Abb. 11  
Berechneter Gesamttransport zonaler Bewegungsgröße in meridionaler Richtung in den Fällen  $d_1$  (—) und  $d_2$  (---) in  $10^5 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$  für  $\varphi = 45^\circ N$  (positiv: nordwärts gerichtet). AS (amerikanischer Sektor) und ES (europäischer Sektor) bezeichnen die beiden mit Beobachtungsmaterial gut besetzten Breitenkreissektoren, die zum Zwecke von Untersuchungen über den meridionalen Transport von Bewegungsgröße als repräsentativ für den ganzen Breitenkreis angesehen werden dürfen.

Unterer Teil: Ausgeglichenere Höhe der Erdoberfläche.

zum Inhalte haben; es wird jedoch in diesen Untersuchungen kaum die „zeitliche“ Turbulenz, also die Korrelation der Abweichungen vom entsprechenden zeitlichen Mittelwert als Funktion des Ortes, also Größen wie

$$[78] \quad \overline{u'v'}(x) \quad \text{bzw.} \quad \widehat{u'v'}(x)$$

ermittelt. Die gemäß [76] berechnete Größe [78] läßt sich lediglich mit den Auswertungen an Einzelstationen, die sich notwendigerweise über einen bestimmten

Zeitabschnitt erstrecken müssen, vergleichen. Hierzu können die Untersuchungen von Priestley (27) sowie Nyberg und Schmacke (25) herangezogen werden.

Wir setzen voraus, daß der Breitenunterschied zwischen  $45^\circ N$  (Resultate gemäß Abb. 11) und  $51^\circ N$  für Larkhill (Priestley (27) bzw.  $59^\circ N$  für Stockholm (Nyberg und Schmacke (25)) keinen wesentlichen Einfluß auf die Verteilung des Transportes entlang eines Breitenkreises haben soll. Dies ist für Längen um

2°W (Larkhill) bis 18°E (Stockholm) wahrscheinlich noch einigermaßen erfüllt, da die diesen Längenbereich im wesentlichen beeinflussenden Rocky Mountains durch ihre N-S-Erstreckung auch nördlich des Brechnungsbreitengrades (45°N) in gleicher Weise oder doch sehr ähnlich wirksam sind. Bei einem durch das zentralasiatische Hochgebirge beeinflussten Längenbereich, wäre wegen der starken Änderung des Hindernisses beim Fortschreiten in nördlicher Richtung die obige Voraussetzung weniger gut erfüllt.

Wir setzen ferner gemäß [69] voraus, daß der hier berechnete Gesamttransport  $C_g$  näherungsweise mit dem makroturbulenten Transport  $A_g$  in Larkhill und Stockholm verglichen werden kann. Unter diesen Voraussetzungen ist uns der Vergleich mit den Ergebnissen an den beiden vorgenannten Stationen möglich. Nyberg und Schmacke geben für den Winter in 500 mb einen sehr schwachen Transport (in Stockholm) nach Süden an, im Jahresmittel einen verschwindenden Transport. Unsere Berechnungen geben im Falle  $d_2$  für 17°E einen gleichgroßen Transport nach Süden, der Transport verschwindet bei 21°E. Auch der Befund von Nyberg und Schmacke, daß der von Priestley ermittelte Transport in Larkhill etwa sechsmal größer als in Stockholm sei, ist mit unseren Rechenergebnissen in Einklang.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit besteht mit den Auswertungen von Buch (5). In diesen ist auf Tafel 15 eine hemisphärische Darstellung der Quantität

$$\overline{u^*v^*}(\varphi, \lambda)$$

für das 500 mb Niveau gegeben, wobei sich die zeitliche Mittelbildung in diesem Falle über das ganze Jahr 1950 erstreckt. Entnimmt man dieser Darstellung die Werte für 45°N und vergleicht sie mit den Resultaten unserer Rechnung im Falle  $d_2$  mittels des Korrelationskoeffizienten, so ergibt sich dieser mit

$$r = +0.32$$

An vielen Punkten zeigen die beiden Verteilungen auf dem Breitenkreis starke Abweichungen voneinander und der sich ergebende Korrelationskoeffizient ist nicht sehr hoch. Trotzdem darf dieses Resultat noch als günstig angesehen werden, da neben den schon früher erwähnten zahlreichen Modellmängeln auch noch die Tatsache sich mindernd auswirkt, daß die herangezogenen Vergleichsdaten von Buch nicht langjährige Winterwerte, sondern Mittelwerte eines einzigen Jahres darstellen.

Abb. 11 läßt noch — vornehmlich für den Fall der Streuung  $d_2$  — erkennen, daß im Bereich der großen Gebirge der orographisch bedingte, makroturbulente Transport zonaler Bewegungsgröße südwärts gerichtet ist, über den Tiefländern und Ozeanen hingegen nach Norden. Hieraus und aus der Kenntnis des Zusammenhanges zwischen dem Transport und der Asymmetrie der Turbulenzkörper läßt sich für das Bild einer absoluten Topographie folgendes aussagen: Ein von West nach Ost wandernder Trog z. B. hat eine von NE nach SW verlaufende, gegenüber den Meridianen geneigte Trogachse. Der über den ganzen Breitenkreis gemittelte Neigungswinkel der Trogachse gegenüber den Meridianen ist ein Maß für den planetarischen Anteil des makroturbulenten Impulsflusses. Der hier berechnete orographisch bedingte Anteil hingegen äußert sich lediglich in einer Modifikation dieses Winkels; es muß über den Tiefländern und Ozeanen der Neigungswinkel

der Trogachse gegenüber den Meridianen noch stärker sein, mit Annäherung des Troges an ein großes Gebirge und beim Wegzug über dieses muß der Winkel schwächer werden, d. h. die Trogachse muß eine mehr meridianparallele Lage oder gar eine von NW nach SE geneigte Lage einnehmen. Letzteres erwarten wir nach den Rechenergebnissen (vgl. Abb. 11) auch für die Annäherung eines Troges an die europäische Küste und finden es durch die synoptische Erfahrung bestätigt.

#### 14. Die Auswahl von Breitenkreissektoren, die für den meridionalen (planetarischen) Impulsfluß repräsentativ sind.

Es war bereits im Abschnitt 11 die Möglichkeit auseinandergesetzt worden, eine Entscheidung darüber zu treffen, inwieweit die makroturbulenten Transportgrößen über einen Breitenkreissektor als repräsentativ für den über den gesamten Breitenkreis hinweggehenden Transport angesehen werden können. Die in Abb. 11 dargestellten Resultate lassen erkennen, daß ähnlich dem amerikanischen Sektor (ca. 120°W — 60°W) auch der europäische Sektor (ca. 20°W — 60°E) als ein zweiter, mit genügend Beobachtungsstationen bedeckter Sektor diesen Bedingungen entspricht. Der orographisch bedingte, makroturbulente, meridionale Transport von zonaler Bewegungsgröße verschwindet bei einer Integration über diesen Sektor.

Die beiden repräsentativen Sektoren sind in Abb. 11 schematisch gekennzeichnet.

Es muß noch bemerkt werden, daß von repräsentativen Breitenkreissektoren aufgrund der vorstehenden Rechenergebnisse nur dann gesprochen werden kann, wenn es sich um die Ermittlung des makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße (Impuls) oder kinetischer Energie handelt. Denn nur in diesem Falle läßt sich eine Bilanzgleichung allein aus den Bewegungsgleichungen herleiten, wobei dann die Bodenreibung und der Gebirgseffekt als Produktions- oder Dissipationsterme die Rolle von äußeren Kräften übernehmen. Es liegt also in diesem Falle ein rein dynamisches Problem vor.

Soll aber der meridionale, makroturbulente Transport der Gesamtenergie berücksichtigt und untersucht werden, so benötigt man zur Aufstellung einer Bilanzgleichung noch zusätzlich den ersten Hauptsatz der Thermodynamik und eine Kontinuitätsgleichung für den Wasserdampf; als äußere Kräfte treten dann außerdem die Wärmequellen und -senken sowie Verdunstung und Niederschlagsbildung in Erscheinung. Es liegt in diesem erweiterten Falle ein thermodynamisches Problem vor.

Es wäre denkbar, durch eine breitenkreismäßige Nebeneinanderreihung (siehe Gates (12)) der Berechnungen auch die Divergenz der turbulenten Impulsflüsse zu gewinnen. Selbst wenn wir davon absehen, daß infolge der vielen Modellmängel in eine solche Berechnung merkbare Fehler eingingen, würde eine Erklärung des meridionalen Windprofiles oder eine ähnliche Bilanzbetrachtung unmöglich bleiben. Auch die Wärme wird (in hier nicht erfaßter Weise) auf makroturbulentem Wege in meridionaler Richtung transportiert (siehe z. B. Möller 22)) und der Impulshaushalt (bzw. Haushalt kinetischer Energie) durch ständige Transformationen von innerer und potentieller Energie in kinetische oder umgekehrt (Miller (20), van Miegheem (19)) beeinflusst. Zu derartigen Bilanzuntersuchungen müßte also das vorstehende Verfahren dahingehend erweitert werden, daß der turbulente Transport der Gesamtenergie berechnet werden könnte.

15. Tabellen

Tab. 1 Einflußfunktion  $G(\xi)$  und  $I(\xi)$  für verschiedene Streuungen d.

$\xi$ [100°]	$G(s_0 d_0, \xi)$ [cm]	$G(s_0 d_1, \xi)$ [cm]	$G(s_0 d_2, \xi)$ [cm]	$I(s_0, d_1, \xi)$ [cm <sup>2</sup> ]	$I(s_0, d_2, \xi)$ [cm <sup>2</sup> ]
0°	8.80.10 <sup>7</sup>	— 0.25.10 <sup>7</sup>	2.27.10 <sup>7</sup>	—14.03.10 <sup>15</sup> (—9.33)	—14.41.10 <sup>15</sup> (—7.41)
10°	11.08	— 5.41	— 4.03	—11.61	—11.13
20°	9.78	— 8.59	— 7.60	— 6.41	— 6.20
30°	5.30	— 8.99	— 8.00	— 0.18	— 1.31
40°	— 1.01	— 6.80	— 5.91	5.34	2.28
50°	— 7.21	— 2.88	— 2.69	8.81	4.05
60°	—11.42	1.48	0.40	9.39	4.11
70°	—12.37	5.00	2.49	7.43	3.06
80°	— 9.76	6.78	3.24	3.57	1.62
90°	— 4.38	6.52	2.85	— 0.78	0.44
100°	2.12	4.51	1.76	— 4.40	— 0.17
110°	7.78	1.51	0.54	— 6.41	— 0.13
120°	10.85	— 1.53	— 0.41	— 6.29	0.40
130°	10.42	— 3.80	— 0.89	— 4.34	1.16
140°	6.60	— 4.72	— 0.79	— 1.10	1.91
150°	0.57	— 4.19	— 0.39	2.39	2.48
160°	— 5.84	— 2.50	0.14	5.26	2.78
170°	—10.68	— 0.22	0.61	6.86	2.86
180°	—12.48	2.01	0.90	6.72	2.73
190°	—10.68	3.60	0.99	5.16	2.45
200°	— 5.84	4.23	0.91	2.42	2.06
210°	0.57	3.80	0.75	— 0.62	1.63
220°	6.60	2.52	0.58	— 3.25	1.15
230°	10.42	0.77	0.43	— 4.86	0.86
240°	10.85	— 0.97	0.46	— 4.88	0.74
250°	7.78	— 2.32	0.51	— 3.56	0.91
260°	2.12	— 2.93	0.62	— 0.95	1.40
270°	— 4.38	— 2.68	0.76	2.11	2.10
280°	— 9.76	— 1.65	0.85	4.87	2.73
290°	—12.37	— 0.08	0.95	6.58	2.93
300°	—11.42	1.66	1.01	6.53	2.32
310°	— 7.21	3.17	1.07	4.74	0.71
320°	— 1.01	4.06	1.15	1.35	— 1.82
330°	5.30	4.08	1.26	— 2.73	— 4.73
340°	9.78	3.20	1.45	— 6.51	— 7.20
350°	11.08	1.61	1.74	— 9.00	— 8.31
360°	8.80	— 0.25	2.27	— 9.33 (—14.03)	— 7.41 (—14.41)

Tab. 2 Ausgeglichenere Höhen der Erdoberfläche sowie beobachtete mittlere Höhenlage der 500-mb-Fläche (Abweichungen vom Breitenmittel) entlang 45° N. Berechnete mittlere Höhenlage der 500-mb-Fläche sowie geostrophischer meridionaler Gesamttransport von zonaler Bewegungsgröße bei verschiedener Streuung d.

x [10° λ]	h [m]	$\hat{z}_{obs}(x)$ [dm] gült. f. λ — 5°	$\hat{z}_{d_0}(x)$ [dm]	$\hat{z}_{d_1}(x)$ [dm]	$\hat{z}_{d_2}(x)$ [dm]	$C_g(x)  _{d_1}$ [cm²sec⁻²]	$C_g(x)  _{d_2}$ [cm²sec⁻²]
180°	—	— 8.24	—51.08	14.58	9.58	4.06.10 <sup>6</sup>	2.45.10 <sup>6</sup>
170° W	—	— 3.66	—40.23	19.23	10.26	2.65	1.83
160°	—	0.61	—18.74	19.61	8.80	0.78	1.11
150°	—	4.27	6.68	14.98	6.42	— 1.11	0.29
140°	—	7.32	28.79	8.24	4.30	— 2.57	— 0.45
130°	—	10.68	40.36	0.85	3.23	— 3.28	— 0.96
120°	1200	9.46	38.09	— 5.31	3.60	— 3.35	— 1.41
110°	1705	4.58	27.33	—11.13	0.86	— 2.86	— 1.78
100°	740	— 4.27	12.47	—16.10	— 5.67	— 1.54	— 1.47
90°	288	— 8.85	— 3.19	—17.05	—10.24	0.45	— 0.31
80°	248	— 6.71	—19.29	—13.12	—10.55	2.34	0.97
70°	138	— 5.49	—30.12	— 5.67	— 7.57	3.61	1.96
60°	23	— 3.36	—32.83	3.22	— 2.72	3.93	2.47
50°	3	2.14	—27.05	11.20	2.45	3.26	2.45
40°	—	7.32	—14.61	16.15	6.51	1.80	1.98
30°	—	12.20	0.69	16.90	8.68	0.01	1.31
20°	—	15.25	14.20	13.53	9.02	— 1.60	0.58
10° W	168	15.86	21.78	7.25	8.13	— 2.60	0.06
0°	348	11.29	21.83	— 0.23	6.26	— 2.76	— 0.20
10° E	645	8.24	14.99	— 7.58	3.67	— 2.10	— 0.23
20°	446	6.41	4.57	—11.71	0.33	— 0.77	— 0.03
30°	299	6.10	— 7.05	—12.51	— 1.98	0.85	0.28
40°	481	3.97	—16.96	— 9.06	— 2.34	2.17	0.33
50°	125	3.66	—21.34	— 2.90	— 1.81	2.78	0.01
60°	145	3.05	—20.37	4.69	0.50	2.50	— 0.62
70°	565	3.05	—14.19	11.14	3.61	1.24	— 1.61
80°	1175	3.97	— 3.04	14.28	5.18	— 0.75	— 2.79
90°	1405	2.75	12.09	11.67	3.03	— 2.86	— 3.71
100°	1625	0	27.53	5.34	— 2.20	— 4.43	— 4.03
110°	1420	— 3.05	39.45	— 6.36	— 9.32	— 4.91	— 3.59
120°	859	— 7.93	43.40	—16.30	—15.48	— 4.14	— 2.40
130°	347	—14.64	35.94	—22.04	—17.60	— 2.22	— 0.93
140°	133	—19.83	17.33	—21.52	—14.59	0.22	0.84
150°	—	—20.74	— 7.62	—15.14	— 8.02	2.51	2.03
160°	—	—18.91	—31.84	— 4.99	— 0.32	4.08	2.81
170° E	—	—13.42	—47.99	5.87	6.00	4.60	2.76

16. Schlußbemerkung

Die vorstehende Untersuchung wurde angeregt durch eine Diskussion gelegentlich eines Besuches von Dr. A. Eliassen (Oslo) beim Zentralamt des Deutschen Wetterdienstes in Bad Kissingen im Dezember 1953. Herrn Prof. Dr. B. Haurwitz (New York, z. Z. Mainz) und Herrn Prof. Dr. F. Möller (Mainz) ist der Autor für Anregungen und wertvolle Diskussionsbemerkungen, Herrn Dr. F. Penzlin (Würzburg), für zahl-

reiche Hinweise zur Durchführung der Integration zu Dank verpflichtet. Seinen Dank wünscht der Autor ebenfalls Herrn Prof. Dr. J. van Mieghem (Brüssel) für eine kritische Durchsicht des Manuskriptes und mehrere nützliche Hinweise auszudrücken. Herr stud. rer. nat. H. Pehl (Montabaur) hat die sehr mühevollen numerischen Auswertungen zum größten Teile durchgeführt, wofür ihm herzlich gedankt sei.

17. Literatur

- (1) Berkofsky, L.: The exact determination of the effective domain of dependence of a one-dimensional numerical prediction formula. *Tellus* 6, 165—169 (1954)
- (2) —: Noch unveröffentlichtes Manuskript (1955)
- (3) Bjercknes, J. u. Mintz, Y.: Investigations of the general circulation of the atmosphere. Final-Report Contract AF 19 (122)—48, University of California, Department of Meteorology (1955)
- (4) Bolin, B.: On the influence of the earth's orography on the general character of the westerlies. *Tellus* 2, 184—195 (1950)
- (5) Buch, H.: Hemispheric wind conditions during the year 1950. Final-Report (Part 2) General Circulation Project AF 19—122—153, Tafel 15, S. 51 (1954)
- (6) Charney, J. G. u. Eliassen, A.: A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. *Tellus* 1, 39—54 (1949)
- (7) Eliassen, A.: The quasi-static equations of motion with pressure as independent variable. *Geofs. Publ.* 17, No 3 (1949)
- (8) Deutscher Wetterdienst: Absolute Topographien 500 mb (Arbeitskarten der Synoptischen Abteilung) 1951, 1952 und 1955.
- (9) —: Täglicher Wetterbericht 78, September (1953)
- (10) Flohn, H.: Mittlere Druck- und Strömungsverhältnisse in der Troposphäre (Winter). Die Großwetterlagen Mitteleuropas 2, 105—107 (1949)
- (11) —: Zur vergleichenden Meteorologie der Hochgebirge. *Arch. Meteor. Geophys. Biokl. B.* 6, 193—206 (1955)
- (12) Gates, W. L.: A method of numerical forecasting by juxtaposition of one-dimensional solutions and its application to the equivalent barotropic model. *J. Meteor.* 10, 149—159 (1953)
- (13) Hadley, G.: Concerning the cause of the general tradewinds (1735/36). Erneut gedruckt in *Smithsonian misc. coll.* 51, No. 4 (1910)
- (14) Haurwitz, B.: The motion of atmospheric disturbances. *J. Marine Res.* 3, 35—50 (1940)
- (15) Heß, P. u. Brezowski, H.: Katalog der Großwetterlagen Mitteleuropas. *Ber. Dt. Wetterd. US-Zone Nr.* 33, 5—12 (1952)
- (16) Kao, S. K.: On total momentum vorticity with application to the study of the general circulation of the atmosphere. Siehe Bjercknes-Mintz (3) Part XII, S. 1—77.
- (17) Miegheem, van J.: Les équations générales de la mécanique et de l'énergétique des milieux turbulents en vue des applications à la météorologie. *Mém. Inst. Roy. Météor. Belg.* 34, 5—8 (1949)
- (18) —: Some remarks on the angular momentum balance in the atmosphere. *Tellus* 4, 135—138 (1952)
- (19) —: Energy conversions in the atmosphere on the scale of the general circulation. *Tellus* 4, 334—351 (1952)
- (20) Miller, J. E.: Energy transformation functions. *J. Meteor.* 7, 152—159 (1950)
- (21) Möller, F. u. de Bary, E.: Der Wärme- und Wasserdampfhaushalt der freien Atmosphäre. *Arch. Meteor. Geophys. Biokl. A* 4, 142—155 (1951)
- (22) Möller, F.: Energetische Klimatologie. *Gerlands Beitr. Geophys.* 42, 251—278 (1934)
- (23) —: Die Aufrechterhaltung der Westdrift durch Großaustausch. *Ber. Dt. Wetterd. US-Zone Nr.* 35, 135—138 (1952)
- (24) Mintz, Y.: The geostrophic poleward flux of angular momentum in the month of January 1949. *Tellus* 3, 195—200 (1951)
- (25) Nybberg, A. u. Schmacke, E.: Eddy flux of heat and momentum during two years at Stockholm—Bromma. *Tellus* 3, 89—99 (1951)
- (26) Pisharoty, P. R.: The kinetic energy of the atmosphere, s. Bjercknes-Mintz (3) Part. XIV, S. 1—60.
- (27) Priestley, C. H. B.: Heat transport and zonal stress between latitudes. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 75, 323 (1949)
- (28) Queney, P.: Adiabatic perturbation equations for a zonal atmospheric current. *Tellus* 2, 35 (1950)
- (29) Raethjen, P.: Über den planetarischen Austausch der Vorticity und des Rotationsmoments. *Arch. Meteor. Geophys. Biokl. A* 4, 41 (1951)
- (30) Rossby, C. G. and Collaborators: Relation between the intensity of zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *Marine Res.* 2, 38—55 (1939)
- (31) Scherhag, R.: Wetteranalyse und Wetterprognose. Berlin 1948, 70.
- (32) Smagorinski, I.: The dynamical influence of large-scale heat sources and sinks on the quasistationary mean motions of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 79, 342—366 (1953)
- (33) Starr, V. P.: An essay on the general circulation of the earth's atmosphere. *Meteor.* 5, 39—43 (1948)
- (34) —: A note on the eddy transport of angular momentum. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 77, 44—50 (1951)
- (35) —: Studies of the atmospheric general circulation. Final-Report Part I, Contract AF 19—122—153, M. I. T. Boston 1954.
- (36) Starr, V. P. u. White, R. M.: A hemispherical study of the atmospheric angular momentum balance. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 77, 215—225 (1951)
- (37) Sutcliffe, R. C.: Mean upper contour patterns of the northern-hemisphere — the thermal synoptic view point. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 75, 41 (1951)
- (38) US-Weather Bureau: Normal weather charts for the northern hemisphere. *Techn. Pap. No.* 21 (1952)
- (39) White, R. M.: The role of mountains in the angular momentum balance of the atmosphere. *J. Meteor.* 6, 353—355 (1949)
- (40) Widger, W. K.: A study of the flow of angular momentum in the atmosphere. *J. Meteor.* 6, 291—299 (1949)
- (41) Wippermann, F.: Zur Frage des Einflusses der Land- und Meerverteilung auf die Lage der quasistationären Tröge in einer atmosphärischen Zonalzirkulation. *Arch. Meteor. Geophys. Biokl. A* 4, 112—121 (1951)
- (42) —: Die Konfiguration mittlerer Höhenströmungsfelder und ihre Ursachen. *Tellus* 4, 112—117 (1952)
- (43) Yeh, T. G.: The maintenance of zonal circulation in the atmosphere. *J. Meteor.* 8, 146 (1951)

18. Symboltafel

<b>k</b>	Einheitsvektor in vertikaler Richtung	$K(t_1) = \int_0^{t_1} U^v v^v dt / \int_0^{t_1} Uv dt$	
<b>v</b>	Vektor der horizontalen Windgeschwindigkeit	<b>L</b>	Länge des betrachteten Breitenkreises
<b>a</b>	mittlerer Erdradius	$M = r^2(d\lambda/dt + \Omega)$	Rotationsmoment, außerdem Abkürzung gemäß Gleichung [51]
<b>d</b>	Streuung der Funktion $\Phi(s)$	<b>N</b>	Abkürzung gemäß Gleichung [51]
$f = 2\Omega \sin \varphi$	Coriolisparameter	<b>Q, R</b>	zu bestimmende Koeffizienten gemäß Gleichung [A4]
<b>g</b>	Schwerebeschleunigung	<b>T</b>	absolute Temperatur
<b>h</b>	Höhe der Erdoberfläche über NN	$U = \ddot{u}$	zonaler Grundstrom
$l = 2\Omega \cos \varphi$		$a = \sigma + i\psi$	
<b>m</b>	Polstellen der Funktion $G(s)$	$a = \sigma - i\psi$	
<b>p</b>	Druck	$\beta = \partial f / R \partial \varphi$	meridionale Änderung des Coriolisparameters
$q = f^2 \kappa / gH$			
$r = a \cos \varphi$	senkrechter Abstand von der Rotationsachse der Erde	$\gamma = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{S_0}{d}\right)^2}}}{2}$	
$s = \beta / U$		<b><math>\delta</math></b>	Wellenzahl der Einflußfunktion $\tilde{G}$
<b>t</b>	Zeitkoordinate	<b><math>\varepsilon</math></b>	kleine Größe
<b>u</b>	Komponente der Windgeschwindigkeit in x-Richtung (ostwärts)	$\zeta = \mathbf{k} [\nabla \times \mathbf{v}]$	relative Vorticity
<b>v</b>	Komponente der Windgeschwindigkeit in y-Richtung (nordwärts)	$\eta = \zeta + f$	absolute Vorticity
<b>w</b>	Vertikalkomponente der Windgeschwindigkeit im metrischen System	$\kappa = U_\theta / U = 0.5$	Reduktionsfaktor
<b>x</b>	Raumkoordinate, positiv nach Osten	$\lambda$	geographische Länge
<b>y</b>	Raumkoordinate, positiv nach Norden	$\xi$	Integrationsvariable in x-Richtung
<b>z</b>	Höhe einer Druckfläche über NN	$\rho$	Dichte
$A = \overline{U^v v^v}$	makroturbulenter, meridionaler Transport zentraler Bewegungsgröße	$\sigma$	Reibungskoeffizient
$B(t_1) = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\partial z}{\partial t} dt = \frac{1}{t_1} [z(t_1) - z(t_0)]$		$\tau$	Volumen
$C = A + \tilde{U}\hat{v}$	meridionaler Gesamttransport zentraler Bewegungsgröße	$\varphi$	geographische Breite
$D(t_1) = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} (U-v)^v (v)^v dt$		$\psi = \int s - \sigma^2$	
$E(t_1) = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} U^v v^v dt$		<b><math>\zeta</math></b>	zu bestimmende Größe in Gleichung [A4]
<b>F</b>	Reibungskraft pro Masseneinheit	$\omega = dp/dt$	Vertikalgeschwindigkeit im p-System
<b>G</b>	Green'sche Funktion gemäß Gleichung [17]	<b><math>\Phi</math></b>	Verteilungsfunktion von $\tilde{G}$ bzw. $s$
$H = R T_0 g^{-1}$	Höhe der homogenen Atmosphäre	<b><math>\Omega</math></b>	Rotationsgeschwindigkeit der Erde
<b>I</b>	Einflußfunktion gemäß Gleichung [74]		
<b>J</b>	Einflußfunktion gemäß Gleichung [62]		

Indizes

- o** = Bodenwerte (im Niveau  $p = p_0$ ) bei  $s$  gibt der Index  $o$  das arithmetische Mittel an
- g** = geostrophisch
- j** = zählender Index für die Polstellen der Funktion  $\Phi(s)$
- k** = zählender Index für die Polstellen der Funktion  $\tilde{G}_\sigma(s)$
- p** = Kennzeichnung von Polstellen
- x** = Kennzeichnung der Komponente in x-Richtung
- r** = zählender Index der Werte  $\bar{s}$  innerhalb  $t_2$

- $\nu$  = zählender Index der Klassenintervalle für die Verteilung der  $s$ -Werte
- $\sigma$  = gültig für nicht-reibungsfreie Bewegungen
- $r$  = zählender Index für Einzelwerte atmosphärischer Feldgrößen innerhalb des (variablen) Teilintervalles  $t_1$
- 1 = Kennzeichnung eines Teilintervalles
- 2 = Kennzeichnung des gesamten Mittelbildungszeitraumes

**Mittelbildungen**

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} (\dots) dp$$

mit  $(\dots) = \overline{(\dots)} + (\dots)^*$ , wobei  $\overline{(\dots)^*} \equiv 0$

$$\overline{\overline{(\dots)}} = \frac{1}{L} \int_0^L (\dots) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\lambda$$

mit  $(\dots) = \overline{\overline{(\dots)}} + (\dots)'$ , wobei  $\overline{\overline{(\dots)'}} \equiv 0$

$$\overline{\overline{(\dots)}} = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} (\dots) dt$$

mit  $(\dots) = \overline{\overline{(\dots)}} + (\dots)''$ , wobei  $\overline{\overline{(\dots)'}} \equiv 0$

$$\overline{\overline{\overline{(\dots)}}} = \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} (\dots) dt$$

$t_2 > t_1$

Einfach überstrichene Werte können neben den zeitlichen Mittelwerten auch die konjugiert komplexen Größen bedeuten.

**19. Anhang**

**Anhang 1:**

Im vorliegenden Falle hat die Green'sche Funktion  $G_\sigma$  die homogene Differentialgleichung zu erfüllen, periodisch in  $L$  zu sein, sowie einen Sprung in ihren ersten Ableitungen aufzuweisen. Aus diesen drei Bedingungen:

[A 1]  $\frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial x^2} + 2\sigma \frac{\partial G_\sigma}{\partial x} + sG_\sigma = 0$

[A 2]  $G_\sigma(x) = G_\sigma(x + L) \quad 0 \leq x \leq L$

$$[A 9] \text{ Res } G_{\sigma^{(2)}}(\psi) = - \lim_{\psi' \rightarrow 0} \left\{ \frac{(-1)^k e^{i \frac{2\pi k}{L} (\frac{L}{2} - x)}}{2\psi L} \frac{e^{i\psi' (\frac{L}{2} - x)}}{\text{Sinh} \frac{i\psi' L}{2}} \right\} = - \frac{2k\pi}{e^{i \frac{2\pi k}{L} x}} \frac{x}{2\psi L}$$

Berücksichtigt man ferner, daß wegen  $\psi = \sqrt{s - \sigma^2}$ , das  $\text{Res } G_{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{2\pi i} \oint G(s) ds = \frac{2\psi}{2\pi i} \oint G(\psi) d\psi = 2\psi \text{ Res } G_{\sigma^{(2)}}(\psi)$  so ergibt sich

[A 10]  $\text{Res } G_{\sigma^{(2)}}(s_k) = -\frac{1}{L} e^{-\frac{2\pi k}{L} x}$

Bei Berechnung der  $\text{Res } G_{\sigma^{(1)}}(s)$  aus dem ersten Term in [A 6] ergibt sich der gleiche Wert wie  $\text{Res } G_{\sigma^{(2)}}(s)$ , so daß [A 10] als  $\text{Res } G_\sigma(s)$  gilt.

[A 3]  $\frac{\partial G_\sigma}{\partial x} \Big|_{0+\epsilon} - \frac{\partial G_\sigma}{\partial x} \Big|_{L-\epsilon} = -1$

lassen sich für den Ansatz

[A 4]  $G_\sigma(x) = e^{-\chi x} (Q \sin \psi x + R \cos \psi x)$

alle Größen bestimmen. Aus Gleichung [A 1] folgt  $\chi = \sigma$ ,  $\psi = \sqrt{s - \sigma^2}$ , während sich die Koeffizienten  $Q$  und  $R$  aus Gleichung [A 2] und [A 3] ermitteln lassen. Es ergibt sich

[A 5]  $G_\sigma(x) = \frac{e^{-\sigma x} \sin \sqrt{s - \sigma^2} (L - x) + e^{\sigma(L-x)} \sin \sqrt{s - \sigma^2} x}{2 \sqrt{s - \sigma^2} \{ \text{Cosh } \sigma L - \cos \sqrt{s - \sigma^2} L \}}$

Es ist  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} G_\sigma(x) = G(x)$ , wobei  $G(x)$  in Gleichung [17] angegeben ist.

**Anhang 2:**

Die Residuen von [43]

[A 6]  $G_\sigma = \frac{i}{4\psi} \left[ \frac{e^{-\bar{\alpha} (\frac{L}{2} - x)}}{\text{Sinh } \bar{\alpha} \frac{L}{2}} - \frac{e^{\alpha (\frac{L}{2} - x)}}{\text{Sinh } \alpha \frac{L}{2}} \right]$

sind zu berechnen. Es ist ersichtlich, daß für  $\alpha = \sigma + i\psi = 0$ ;  $\bar{\alpha} \neq 0$  und umgekehrt ist, so daß die Residuen der Terme einzeln bestimmt werden können. Wir berechnen zunächst die Residuen in der  $\psi$ -Ebene, gehen dann auf die  $s$ -Ebene über. Für den zweiten Term läßt sich schreiben:

[A 7]  $G_{\sigma^{(2)}} = -\frac{i}{4\psi} \frac{e^{i(\psi - i\sigma) (\frac{L}{2} - x)}}{\text{Sinh } i(\psi - i\sigma) \frac{L}{2}}$

Die Polstellen liegen gemäß [44] bei  $\psi_p = \pm (\frac{2k\pi}{L} + i\sigma)$ , wobei das positive Vorzeichen für den ersten, das negative für den zweiten Term gilt. Durch Addieren der Identität  $+\frac{2k\pi}{L} - \frac{2k\pi}{L}$  erhält man für [A 7]

[A 8]  $G_{\sigma^{(2)}} = -\frac{i}{4\psi} \frac{e^{[i(\psi - \psi_p) + \frac{2k\pi i}{L}] (\frac{L}{2} - x)}}{\text{Sinh} \frac{L}{2} [i(\psi - \psi_p) + \frac{2k\pi i}{L}]}$

Mit der Abkürzung  $(\psi - \psi_p) = \psi'$  und unter Berücksichtigung dessen, daß

$$\text{Sinh} \left( \frac{i\psi' L}{2} + ik\pi \right) = (-1)^k \text{Sinh} \frac{i\psi' L}{2}$$

läßt sich  $\text{Res } G_{\sigma^{(2)}}(\psi)$  als Koeffizient  $a_1$  der Laurent-Reihe berechnen zu

**Anhang 3:**

Die Residuen der Verteilungsfunktion [37]

[A 11]  $\Phi(s) = \frac{1}{\pi d \sqrt{2}} \left( 1 + \frac{(s - s_0)^2}{2d^2} \right)^{-1}$

an den Polstellen

$$s_j = s_0 + ijd \sqrt{2} \quad j = \pm 1$$

ergeben sich durch einfache Partialbruchzerlegung. Gleichung [A 11] läßt sich umschreiben in

$$\Phi(s) = \frac{d \sqrt{2}}{\pi} (s^2 + s_0^2 - 2ss_0 + 2d^2)^{-1}$$

und dieses zerlegen in

$$\Phi(s) = \frac{2\pi i}{1} \left[ \frac{1}{s - s_0 - id\sqrt{2}} - \frac{1}{s - s_0 + id\sqrt{2}} \right] \quad [A 12] \quad \text{Res } \Phi(s_j) = \frac{1}{2\pi i j} \quad \text{für } j = \pm 1$$

Es ist ersichtlich, daß

**Anhang 4:**

Die Residuen von

$$[A 13] \quad P(s) = \frac{e^{-\sigma x} \cos \sqrt{s - \sigma^2} (L-x) - e^{\sigma(L-x)} \cos \sqrt{s - \sigma^2} x}{2 [\text{Cosh } \sigma L - \cos \sqrt{s - \sigma^2} L]}$$

an den Polstellen

$$s_k = \frac{2k\pi}{L} \left( \frac{2\pi k}{L} + 2i\sigma \right) \quad \text{bzw. } \psi_k = \sqrt{s_k - \sigma^2} = \pm \left( \frac{2\pi k}{L} + i\sigma \right) \\ \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \dots \dots \pm \infty$$

berechnen sich zu

$$[A 14] \quad \text{Res } P(s) = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{s - s_k}{\text{Cosh } \sigma L - \cos \sqrt{s - \sigma^2} L} \cdot \frac{1}{2} \left\{ e^{-\sigma x} \cos \sqrt{s - \sigma^2} (L-x) - e^{\sigma(L-x)} \cos \sqrt{s - \sigma^2} x \right\}_{s = s_k} \\ = \frac{\frac{L}{2} \left( \frac{2\pi k}{L} + i\sigma \right)}{\sin \left( \frac{2\pi k}{L} + i\sigma \right) L} \cdot \frac{1}{2} \left\{ e^{-\sigma x} \cos \left( \frac{2\pi k}{L} + i\sigma \right) (L-x) - e^{\sigma L} e^{-\sigma x} \cos \left( \frac{2\pi k}{L} + i\sigma \right) x \right\}$$

Umschreibung in e-Funktionen ergibt:

$$[A 15] \quad \text{Res } P_\sigma(s) = \left( \frac{2\pi i k}{L} - \sigma \right) \frac{1}{L} e^{-\frac{2\pi i k}{L} x} = \left( \frac{2\pi i k}{L} - \sigma \right) \text{Res } G_\sigma(s).$$



