

Berichte
des
Deutschen Wetterdienstes

Nr. 38
(Band 5)

DK 551.509.313 : 061.3

**Symposium über Numerische Wettervorhersage
in Frankfurt a. M.**

vom 23. bis 28. Mai 1956

Bad Kissingen 1957

Vorwort

Das vorliegende Heft der Berichte des Deutschen Wetterdienstes enthält die Referate, die bei dem von der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft, Zweigverein Frankfurt, im Mai 1956 veranstalteten „Symposium über Numerische Wettervorhersage“ gehalten worden sind.

Soweit die Vorträge bereits in Fachzeitschriften veröffentlicht wurden oder an anderer Stelle veröffentlicht werden sollen, ist eine kurze Zusammenfassung des gehaltenen Referats aufgenommen worden.

Leider mußten die Vertreter der japanischen Gruppe wegen der Entfernung dem Symposium fernbleiben. Der von dieser Gruppe eingereichte Beitrag wurde jedoch in dieses Heft mit aufgenommen.

Die Veröffentlichung der Referate soll auch denjenigen, die an dem Symposium nicht teilnehmen konnten, einen Überblick über dieses relativ junge Fachgebiet und einen Einblick in dessen spezielle Probleme vermitteln und damit einen Beitrag zur Förderung der quantitativen Vorhersage leisten.

Dr. Bell

Inhalt

	Seite
Anschriften der Vortragenden und Teilnehmer	4
Vorträge	
L. Berkofsky: Some estimates of nongeostrophic effects calculated from a vertically integrated nongeostrophic model	6
S. Brandejs, I. Kopáček, N. Věková u. O. Zikmunda: Zur Anwendung der Fjörtoft'schen Methode bei der Vorhersage von Höhenwetterkarten	14
M. Čadež: Transport der inneren und kinetischen Energie in der Atmosphäre	19
D. Djurić and A. Wiin-Nielsen: Preliminary report on computation of trajectories by means of electronic computers	22
B. Döös: Automation of 500 mb forecasts through successive numerical map analysis	24
W. Edelmann: Vergleich verschiedener Modelle mittels Lösungen linearisierter Gleichungen	25
H. Flohn: Zur Beurteilung der numerischen Vorhersage für den praktischen Dienst	31
H. Fortak: Über die Herleitung von allgemeinen hydrodynamischen Wirbelsätzen	33
K. Gambo, N. Saito, S. Fujiwara and T. Murakami: Numerical prediction of the development of the cyclone over the Far East and the associated precipitation	36
W. L. Gates: A dynamical model for large-scale tropospheric and stratospheric motions	48
W. L. Gates: Results of numerical forecasting with the barotropic and thermotropic atmospheric models	49
W. Hansen: Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen	50
O. Haug: Some results of numerical weather prediction with a Lagrangian method	51
O. Herrlin: Numerical forecasting at the Swedish Military Meteorological Office in 1954—1956	53
K. Hinkelmann: Über die Einbeziehung divergenter Windkomponenten in Vorhersagemodelle	56
K. Hinkelmann: Ein semigeostrophisches Vorhersagemodell und sein Randwertproblem	64
G. Hollmann: Ein nichtgeostrophisches Integrationsverfahren unter Ausschluß externer und interner Gravitationswellen	65
G. Hollmann: Über die Grenzen der geostrophischen Approximation und die Einführung nichtgeostrophischer Methoden	68
E. Knighting: The work of the Dunstable Research Group	71
E. Knighting: An atmospheric model including the tropopause effects	78
J. Namias: The success of 72-hour barotropic forecasts in relation to mean flow patterns	80
H. Reiser: Über die numerische Berechnung zukünftiger atmosphärischer Zustände	81
J. Smagorinsky: On the inclusion of moist adiabatic processes in numerical prediction models	82
P. D. Thompson: Report on routine operations and development program of the Joint Numerical Weather Prediction Unit — July 1954 to May 1956	91
P. D. Thompson: A theory of large-scale disturbances in nongeostrophic flow	94
P. D. Thompson: A theory of ultra large-scale turbulence and long period velocity variations in barotropic flow	96
F. Wippermann: Über den Einfluß der Orographie auf den meridionalen, makroturbulenten Impulstransport in der Atmosphäre	97

Anschriften der Vortragenden und Teilnehmer

- Dr. G. Bell, Präsident des Deutschen Wetterdienstes, Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
- P. Bergthorsson, Islandic Weather Service, Reykjavik, Island
- L. Berkofsky, Air Force Cambridge Research Center, ARDC, Boston 15, Mass., 11 Leon Street, USA
- B. A. Bernander, Flygvapnet, Stockholm 80, Schweden
- Dr. F. Bernhardt, Meteorologischer und Hydraulischer Dienst der Deutschen Demokratischen Republik, Potsdam, Telegrafenberg
- W. H. Best, Lt. Col., Headquarters 2nd Weather Wing, z. Zt. Bitburg, Germany
- Dipl.-Math. H. Bottenbruch, Institut für Praktische Mathematik, Technische Hochschule, Darmstadt
- Dr. S. Brandejs, Meteorological Institute, Charles' University, Praha II, U Karlova 3, Tschechoslowakei
- Prof. Dr. M. Čadež, Beograd, Ljube Stojanovića 30, Jugoslavien
- B. R. Döös, Institute of Meteorology, University of Stockholm, Stockholm K, Lindhagensgatan 124/V, Schweden
- M. Durget, La Météorologie Nationale, 1, Quai Branly, Paris 7^e, Frankreich
- M. A. Eaton, Lt. Com., Institute of Meteorology, University of Stockholm, Stockholm K, Lindhagensgatan 124/V, Schweden
- Dipl.-Met. W. Edelmann, Projekt für objektive Wettervorhersage, Deutscher Wetterdienst, Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
- Dr. F. Eicker, Institut für Mathematik, Technische Hochschule, Braunschweig
- Prof. Dr. H. Flohn, Deutscher Wetterdienst, Abt. F, Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
- Dr. H. Fortak, Berlin - Mariendorf, Ankogelweg 14
- W. B. Foster, Frankfurt/Main, Plieningerstraße 2/4
- Dr. W. L. Gates, Air Force Cambridge Research Center ARDC, Boston 15, Mass., 11 Leon Street, USA
- Prof. Dr. W. Hansen, Institut für Meereskunde, Universität Hamburg, Hamburg, Abteistraße 15
- Statsmeteorolog O. Haug, Det Norske Meteorologiske Institutt, Blindern, Oslo, Nils Henrik Abels Vei 40, Norwegen
- Dr. W. Heimann, Siemens & Halske ZL 66, München 25, Hofmannstraße 51
- O. Herrlin, Col. RSAF, Com. Mil. Weatherservice, Flygvapnet, Stockholm 80, Schweden
- Dr. M. Herrmann, Verteidigungsministerium, Bad Godesberg, Kölner Straße 89/91, Gartenhaus.
- Dr. K. Hinkelmann, Deutscher Wetterdienst, Abt. F, Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
- Dr. G. Hollmann, Deutscher Wetterdienst, Abt. F, Frankfurt/Main, Schaumainkai 101—103
- Dipl.-Math. Chr. Hübner, Projekt für objektive Wettervorhersage, Deutscher Wetterdienst, Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
- Dr. J. van Isacker, Institut Royale Météorologique de Belgique, Av. Circulaire, chez Bruxelles, Uccle 3, Belgien
- E. Knighting, Meteorological Office, Air Ministry, Dunstable, Bedfordshire, England
- Dr. K. Kohlsche, Meteorologischer und Hydrologischer Dienst der Deutschen Demokratischen Republik, Potsdam, Telegrafenberg
- O. Lien, Det Norske Meteorologiske Institutt, Blindern, Oslo, Nils Henrik Abels Vei 40, Norwegen
- S. R. I. Lindqvist, Flygvapnet, Stockholm 80, Schweden
- Prof. Dr. R. Mügge, Universitätsinstitut für Meteorologie und Geophysik, Frankfurt/Main, Feldbergstraße 47
- J. Namias, U. S. Weather Bureau, Washington 25, D. C., USA
- R. Pône, La Météorologie Nationale, 1, Quai Branly, Paris 7^e, Frankreich
- Dr. K. Rawer, S. P. J. Marine, Freiburg i. Br., Erwinstraße 34

Dr. H. Reiser,	Projekt für objektive Wettervorhersage, Deutscher Wetterdienst, Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
Prof. Dr. H. Reuter,	Meteorologische Zentralanstalt, Wien XIX, Hohe Warte, Österreich
Dr. G. Reymann,	Deutscher Wetterdienst, Abt. S., Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
Dr. L. Roux,	Verteidigungsministerium, Bad Godesberg, Kölner Straße 89/91, Gartenhaus
Dr. G. Schmidt,	Geophysikalisches Institut der Karl-Marx-Universität, Leipzig, Schillerstraße 6
Dr. H. Schweitzer,	Deutscher Wetterdienst, Abt. Z., Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
Dr. J. Smagorinsky,	Acting Chief Circulation Research Section, Chief, U. S. Weather Bureau, Washington 25, D. C., USA
Dr. E. Süßenberger,	Bundesverkehrsministerium, Bonn a. Rhein
Dr. P. D. Thompson, Lt. Col.,	U. S. Weather Bureau, Washington 25, D. C., USA
Dr. R. Wegeleben,	Deutscher Wetterdienst, Abt. Z., Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103
A. Wiin-Nielsen,	Institute of Meteorology, University of Stockholm, Stockholm K, Lindhagensgatan 124/V, Schweden (on leave from Meteorological Institute, Copenhagen)
Dr. F. Wippermann,	Deutscher Wetterdienst, Abt. F., Frankfurt/Main, Schaumainkai 101-103

Als Verfasser bzw. Mitverfasser sind außerdem aufgeführt:

D. Djurić,	Institute of Meteorology, University of Stockholm, Stockholm K, Lindhagensgatan 124/V, Schweden (on leave from University of Belgrade)
S. Fujiwara,	Japan Meteorological Agency, Tokyo, Japan
K. Gambo,	Geophysical Institute, Tokyo University, Tokyo, Japan (Present affiliation: Meteorological Research Institute Mabashi, Suginami, Tokyo)
J. Kopáček,	Meteorological Institute, Charles' University, Praha II, U Karlova 3, Tschechoslowakei
T. Murakami,	Meteorological Research Institute Mabashi, Suginami, Tokyo, Japan
N. Saito,	Tokyo District Meteorological Observatory, Tokyo, Japan
N. Veková,	Meteorological Institute, Charles' University, Praha II, U Karlova 3, Tschechoslowakei
O. Zikmunda,	Meteorological Institute, Charles' University, Praha II, U Karlova 3, Tschechoslowakei

Some Estimates of Nongeostrophic Effects Calculated from a Vertically Integrated Nongeostrophic Model

by

Louis Berkofsky

(with 3 figures in the text)

Abstract

By making certain assumptions concerning the variation of temperature and geostrophic deviations with height, it is possible to derive a system of twodimensional nongeostrophic flow equations. By assuming analytic initial conditions, it is possible to obtain solutions in closed form to the one-dimensional nonlinear equations. Initial height tendencies for geostrophic and nongeostrophic flow may then be compared.

Zusammenfassung

Mit Hilfe gewisser Annahmen über die Änderung der Temperatur und der geostrophischen Windabweichung mit der Höhe ist es möglich, ein System von zweidimensionalen nichtgeostrophischen Gleichungen für das Strömungsfeld abzuleiten. Mit Hilfe analytisch vorgegebener Anfangsbedingungen ist es möglich, Lösungen für die ein-dimensionalen nicht-linearen Gleichungen in geschlossener Form anzugeben. Die Geopotentialtendenzen des Ausgangsfeldes für geostrophische und nicht-geostrophische Strömung können dann miteinander verglichen werden.

1. Introduction

It is well known that most numerical prediction work done in recent years has been based upon the use of the geostrophic approximation. The two main advantages to be gained from the use of this approximation are

- a) the geostrophic approximation acts as a filter to eliminate the gravity waves from the fluid model being studied;
- b) the equations are greatly simplified.

Very recently, several investigators (1), (2), (3), have been studying nongeostrophic models. An important consequence of these studies is the establishment of the "balance condition" as a filter for the gravity waves. This condition, which obtains from neglecting the divergence terms in the divergence equation, serves the same purpose as, and in fact is a generalization of, the geostrophic approximation. The advantages to be gained from the use of this approximation are

- a) nongeostrophic effects may be included;
- b) the equations remain valid at low latitudes.

However, as might be expected, the equations become more complicated than the quasi-geostrophic equations, so that the problem of numerical integration is greatly magnified.

From experience with quasi-geostrophic models, it has been found (4) that the solutions given by vertically integrated equations may be extrapolated to any other

desired levels to yield reasonably accurate forecasts. The extrapolations are carried out by means of the "modelling approximations", which constrain the vertical structure of the fluid in some fashion. The computation problem for obtaining forecasts at many levels is therefore greatly simplified, for it is not necessary to solve the flow equations at each level for which a forecast is desired. It therefore seems reasonable to formulate a nongeostrophic baroclinic vertically integrated model. In addition to the computational advantages to be gained from such a model, it will also be possible to make direct comparisons between non-geostrophic forecasts and quasi-geostrophic forecasts computed from the thermotropic model (5).

In what follows, we shall derive a system of simple baroclinic nongeostrophic flow equations, based on certain assumptions regarding the nature of the geostrophic deviations and the thermal structure of the fluid. In the effort to assess the importance of nongeostrophic effects, we shall then solve the one-dimensional nonlinear forms of the equations, given analytical initial conditions.

2. The Modelling Approximations

In order to obtain two-dimensional mean flow (vertically integrated) equations, one integrates the appropriate equations with respect to pressure throughout the depth of the atmosphere, and then introduces modelling approximations. The latter represent constraints on the vertical structure of the fluid such that parameters at any level may be made to depend upon parameters at a specific level. To illustrate how such modelling approximations might be formulated in the nongeostrophic case, we consider that the horizontal wind vector may be represented as the sum of an irrotational vector and a nondivergent vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \psi + \nabla \varphi \quad [1]$$

where $\mathbf{v} = \mathbf{i} u + \mathbf{j} v$, u, v are the horizontal velocity components positive eastward and northward respectively, \mathbf{i}, \mathbf{j} are unit vectors in the east and north directions, ∇ is the horizontal del-operator in a pressure surface.

The expression [1] may be written

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_{ag} = \mathbf{k} \times \nabla \frac{\Phi}{f} + \mathbf{k} \times \nabla \psi' + \nabla \varphi \quad [2]$$

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times \nabla \frac{\Phi}{f} = \text{geostrophic wind} \quad [2a]$$

$$\mathbf{v}_{ag} = \mathbf{k} \times \nabla \psi' + \nabla \varphi = \text{geostrophic deviation}$$

where $\Phi = gz$ is the geopotential, g is gravitational acceleration, z is contour height of a pressure surface, ψ' is the deviation of ψ from the geopotential, f is the Coriolis parameter.

The hydrostatic equation is

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{RT}{p} \quad [3]$$

where p is pressure, T is temperature, R is the gas constant for dry air.

The mean value with respect to pressure throughout the depth of the atmosphere is defined as

$$\bar{(\quad)} = \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} (\quad) dp \quad [4]$$

where p_0 is surface pressure.

Integration of [3] with respect to p yields

$$\phi = -R \int_p^T dp + f(x, y, t) \quad [5]$$

where $f(x, y, t)$ is an arbitrary function. If we apply [4] to [5] and subtract the result from [5], we get

$$\phi = \bar{\phi} + R \left(\int_p^T dp - \int_p \bar{dp} \right) \quad [6]$$

If we make use of [2] and [6] in [1], apply [4] to the result and subtract the latter from [1], we obtain

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \bar{\psi} + \mathbf{k} \times \nabla \left[(\psi' - \bar{\psi}') + \left(\int_p^T dp - \int_p \bar{dp} \right) \right] + \nabla \varphi \quad [7]$$

where

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{RT}{f} \\ \bar{\psi} &= \frac{\bar{\phi}}{f} + \bar{\psi}' \end{aligned} \right\} \quad [8]$$

In order to be able to express the wind in terms of integrated variables, we must first introduce modelling approximations into [7]. To do this, we assume that

$$\left. \begin{aligned} \psi' (x, y, p, t) &= \bar{\psi}' (x, y, t) \quad [a] \\ \nabla \tau (x, y, p, t) &= B(p) \nabla \bar{\tau} (x, y, t) \quad [b] \\ \nabla \varphi (x, y, p, t) &= C(p) \nabla \varphi_0 (x, y, t) \quad [c] \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

where φ_0 is the value of φ at $p = p_0$.

The assumption [9a] means that the deviation of ψ from the geopotential is invariant with height. As a consequence, ψ satisfies the hydrostatic equation, apart from a constant factor. For

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{\partial \phi}{\partial p} f + \frac{\partial \psi'}{\partial p}$$

But $\frac{\partial \psi'}{\partial p} = \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial p} = 0$, due to [9a], so that

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = - \frac{\tau}{p} \quad [10]$$

whence

$$\psi = \bar{\psi} + \left(\int_p^T dp - \int_p \bar{dp} \right) \quad [11]$$

Assumption [9b] means that the isotherms are parallel at all levels along a given vertical, although the temperature gradient may vary in intensity with elevation. This assumption is the basis for the formulation of the thermotropic model. As will be seen, [9b] as applied to the thermotropic model means that the wind shear cannot turn with elevation, but in the present model a turning of the shear is permitted due to nongeostrophic effects.

Assumption [9c] states that the divergent wind may be expressed as a certain fraction of its value at the ground. It also states that the lines of equal φ are parallel at all levels along a given vertical, although the intensity of the horizontal gradient of φ may vary with elevation. $C(p)$ is defined such that $\bar{C} = 0$. This must be so to be consistent with the hypothesis, made later on, that the mean divergence be equal to zero. ($\nabla^2 \bar{\varphi} = 0$). In other words, we assume that the mean wind is non-divergent.

When the assumptions [9] are introduced into [7], we obtain for the wind

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla [\bar{\psi} + B_1(p)\bar{\tau}] + C(p)\nabla\varphi_0 \quad [12]$$

and for the absolute vorticity

$$\eta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{v} + f = \nabla^2 [\bar{\psi} + B_1(p)\bar{\tau}] + f \quad [13]$$

where

$$B_1(p) = \int_p^T \frac{B}{p} dp - \int_p \frac{B}{p} dp \quad [14]$$

and \mathbf{k} is a unit vector in the vertical.

It will be recognized that if we neglect all ageostrophic terms in [12] and [13], we have exactly the expressions for the wind and vorticity in the thermotropic model.

If we differentiate [12] with respect to p , we find

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} = - \frac{B}{p} \mathbf{k} \times \nabla \bar{\tau} + \frac{\partial C}{\partial p} \nabla \varphi_0 \quad [15]$$

which shows that the wind shear may turn with elevation due to the presence of the nongeostrophic wind vector $\nabla \varphi_0$. In the thermotropic model, however,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p} = - \frac{B}{p} \mathbf{k} \times \nabla \bar{\tau} \quad [16]$$

which is the thermal wind relation, which shows that the wind shear cannot turn with elevation. Indeed, the only way in which such a turning of the shear may be introduced into a geostrophic model is to consider a more general modelling approximation, i. e. one on the stability. In that case, one is led to a three-parameter model (6).

3. The Physical Model

Since one of the aims of this study is to compare results obtained from a nongeostrophic model with those obtained from a quasi-geostrophic model, the physical model to be considered will be one which bears a close resemblance to a known quasi-geostrophic model. The thermotropic model (5) is a vertically integrated quasi-geostrophic model, from which sixty twenty-four hour forecasts have been made at GRD. The vorticity equation for this model was derived by neglecting certain terms in the unintegrated vorticity equation at the very outset. For example, the terms which represent the vertical advection of vorticity and the "twisting" effect were neglected, as was the relative vorticity in the divergence term. It should be emphasized that there is no formal difficulty in including these effects, but we shall here retain these simplifications to derive nongeostrophic flow equations which may be directly comparable with the quasi-geostrophic equations, to that the nongeostrophic effects may be clearly brought out. We also assume that the hydrostatic law holds, that the flow is frictionless and adiabatic, and that the vertical structure of the flow is that described in the previous section.

The vorticity equation in the (x, y, p, t) system is

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta - f \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad [17]$$

where $\omega = \frac{dp}{dt}$.

The adiabatic equation is

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tau + \sigma \omega = 0 \quad [18]$$

where $\sigma = \frac{\tau}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p}$, $\Theta =$ potential temperature. The

continuity equation is

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad [19]$$

The hydrostatic equation may be written

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{f \tau}{p} \quad [20]$$

The balance equation, obtained by setting the divergence equal to zero in the divergence equation, is

$$-f\zeta + \nabla f \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{v} + 2(\nabla v \times \nabla u) \cdot \mathbf{k} = -\nabla^2 \bar{\omega} \quad [21]$$

The balance equation is included here in order to close the system. It will be seen that it need never be solved after the initial instant in order to determine the flow. In this sense, the balance equation is regarded in the same way as the hydrostatic equation, the introduction of which implies that the flow is always in hydrostatic equilibrium. The introduction of the balance equation implies that the flow always maintains the balance given by [21].

The boundary conditions on ω are taken to be

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0 \text{ at } p = 0 \\ \omega &= 0 \text{ at } p = p_0 \end{aligned} \right\} \quad [22]$$

These conditions imply that the mean divergence is zero. If we had set $\omega = \omega_0$ at $p = p_0$, then the effect of irregular terrain could have been introduced, and the mean divergence would have been different from zero. While there is no formal difficulty in including this effect, it will be omitted from the present development for purposes of comparison with the quasi-geostrophic model.

The vertically integrated vorticity equation is

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v} \cdot \nabla \eta} = 0 \quad [23]$$

If we introduce [12] and [13], we obtain

$$\nabla^2 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\psi} + f) + \overline{B_1^2} J(\bar{\tau}, \nabla^2 \bar{\tau}) + \overline{B_1 C} \nabla \varphi_0 \cdot \nabla (\nabla^2 \bar{\tau}) = 0 \quad [24]$$

[24] is the integrated vorticity equation, which may be solved as a Poisson equation for $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$ provided that the initial values of $\bar{\psi}$, $\bar{\tau}$, φ_0 are known. It will be noted that, if we set the ageostrophic components $\bar{\psi}'$ and φ_0 both equal to zero, the resulting equation is exactly the vorticity equation for geostrophic thermotropic flow. The development terms are represented by $\overline{B_1^2} J(\bar{\tau}, \nabla^2 \bar{\tau})$ which is the advection of thermal vorticity by the thermal wind, and $\overline{B_1 C} \nabla \varphi_0 \cdot \nabla (\nabla^2 \bar{\tau})$, which is the advection of thermal vorticity by the surface divergent wind.

The vertically integrated adiabatic equation is

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + J(\bar{\psi}, \bar{\tau}) + \overline{BC} \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \bar{\tau} + \sigma \bar{\omega} = 0 \quad [25]$$

where we have assumed $\sigma = \text{constant}$. This assumption was made to be consistent with that made in the thermotropic model. It may be shown that $\sigma = \text{constant}$ fixes $B(p)$ in [9b], while if the former constraint is removed, one is led to an entirely new model.

The vertically integrated continuity equation is

$$\nabla^2 \varphi_0 = \frac{\bar{\omega}}{pC} \quad [26]$$

Further, since $\omega = -\int_0^p C(p') dp' \nabla^2 \varphi_0$,

$$\omega = G(p) \bar{\omega}$$

where

$$G(p) = -\int_0^p \frac{C(p') dp'}{pC} \quad [27]$$

It now remains to derive an equation for $\bar{\omega}$. For this purpose, we return to the vorticity and adiabatic equations [17] and [18]. We differentiate [17] with respect to p , take the Laplacian of [18], multiply by appropriate factors and add. The result is an equation in ω , which may be vertically integrated, and gives, upon the introduction of the various modelling approximations, the

following equation in $\bar{\omega}$:

$$\nabla^2 \bar{\omega} - \frac{f}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial p^2} \right) \bar{\omega} = \left. \begin{aligned} & J(\bar{\psi}, \nabla^2 \bar{\tau}) + J(\bar{\tau}, \nabla^2 \bar{\psi} + f) \\ & \frac{1}{\sigma} \left\{ -\nabla^2 J(\bar{\psi}, \bar{\tau}) + 2 \left[\left(\frac{\overline{MB}}{p} \right) - 1 \right] J(\bar{\tau}, \nabla^2 \bar{\tau}) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial p} \right) \nabla \varphi_0 \cdot \nabla (\nabla^2 \bar{\psi} + f) \right. \\ & \quad \left. + \left[\left(\frac{\overline{NB}}{p} \right) - \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial p} \right) + \overline{BC} \right] \nabla \varphi_0 \cdot \nabla (\nabla^2 \bar{\tau}) \right\} \\ & \quad \left. - \overline{BC} \nabla^2 (\nabla \varphi_0 \cdot \nabla \bar{\tau}) \right\} \quad [28] \end{aligned} \right\}$$

where

$$\left. \begin{aligned} M(p) &= \int_0^p B(p') dp' \\ N(p) &= \int_0^p p' \frac{\partial C}{\partial p'} dp' \end{aligned} \right\} \quad [29]$$

The system [24], [25], [26], [28] represents a set of four equations in the four unknowns $\bar{\psi}$, $\bar{\tau}$, φ_0 , $\bar{\omega}$. Given initial values of these quantities, $\bar{\tau}$ and $\bar{\psi}$ may be predicted, and new values of φ_0 and $\bar{\omega}$ may then be computed. Initially, $\bar{\omega}$ and φ_0 may be calculated from iterative solutions of [26] and [28], if $\bar{\tau}$ and $\bar{\psi}$ are known. $\bar{\tau}$ is known from observations. Hence $\bar{\psi}$ will have to be calculated, and this may be done by solving the integrated balance equation

$$-f \nabla^2 \bar{\psi} - \beta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right] = -\nabla^2 \bar{\Phi} - 2 \overline{B_1^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial y^2} \right] \quad [30]$$

In the derivation of [30], terms involving φ_0 were neglected. This assumption is unnecessary, but its use as first approximation simplifies the calculations considerably. It is to be noted that, after the initial instant, $\bar{\psi}$ and $\bar{\tau}$ may be predicted by [24] and [25], so that [30] need never be solved again, unless one wishes to calculate the predicted geopotential at any time step. It is of interest to note that the integrability condition in order for [30] to be elliptic in character, and hence solvable as a boundary-value problem, is

$$\frac{\nabla^2 \bar{\Phi}}{f} - \frac{1}{f^2} \nabla f \cdot \nabla \bar{\Phi} > \frac{2 \overline{B_1^2}}{f} \left[\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{f}{2}$$

If we approximate the second term on the left geostrophically, then

$$\frac{\nabla^2 \bar{\Phi}}{f} - \frac{1}{f^2} \nabla f \cdot \nabla \bar{\Phi} > \frac{2 \overline{B_1^2}}{f} \left[\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{f}{2} \quad [30a]$$

Bolin (7) has found that the integrability condition for the barotropic case, which is the same as [30a], but with the $\bar{\tau}$ terms excluded, is not satisfied at about 3–5% of the total area on an ordinary 500 mb chart. It may be that the inclusion of the baroclinic effects will render [30a] a sufficiently strong inequality so that it is satisfied everywhere. If this turns out to be so, then the problem of numerically integrating [30] may be simplified, since the convergence rate will undoubtedly be greater than when the inequality is weak. This hypothesis is now being tested.

The imposition of the balance condition [30] implies that gravity waves have been filtered from the model. For the balance condition is obtained by assuming that the divergence is small compared to the vorticity, in the large scale motions of the atmosphere. Gravity waves, on the other hand, are characterized by the fact that the divergence is large compared with the vorticity. An analysis of the linearized one-dimensional equations for the present model reveals that only long waves may be propagated in this system.

The fact that gravity waves are excluded from the present model may be shown by the following considerations. The complete divergence equation is

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla D + D^2 - f \zeta + \nabla f \cdot \mathbf{k} \times \mathbf{v} + 2(\nabla v \times \nabla u) \cdot \mathbf{k} = -\nabla^2 \Phi \quad [30b]$$

It has been shown (3) that an ω equation may be derived by making use of [30b], [17], [18] and [19]. This equation contains time derivatives of ω , and hence is capable of propagating gravity waves. This circumstance arose due to the presence of $\frac{\partial D}{\partial t}$ in [30b]. In a vertically integrated model in which the mean divergence is zero, the term $\frac{\partial D}{\partial t}$ disappears. Hence it is impossible for time derivatives of ω to arise in the ω equation. If we further neglect the very small terms $\mathbf{v} \cdot \nabla D + D^2$, we are led to the balance equation [30] for this model.

We may summarize the solving procedure for the system in the following way:

- [a.] Given $\bar{\Phi}$, $\bar{\tau}$, solve [30] for $\bar{\psi}$.
- [b.] With these values of $\bar{\tau}$, $\bar{\psi}$, solve [28] for $\bar{\omega}$, setting $\varphi_0 = 0$.
- [c.] Solve [26] for φ_0 .
- [d.] Return to [28], using the φ_0 computed in [c.] to obtain a better approximation for $\bar{\omega}$.
- [e.] Return to [c.]. Continue this process until a convergent value of $\bar{\omega}$ is obtained.
- [f.] Solve [25] for $\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t}$.
- [g.] Solve [24] for $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$.
- [h.] Iterate to get new fields of $\bar{\tau}$ and $\bar{\psi}$.
- [i.] Return to [b.], using the convergent value of φ_0 computed in [e.] at the previous time step, as a first approximation.

4. Analytical Calculations

In order to study the effects of geostrophic deviations, we shall consider one-dimensional nonlinear flow, with analytical initial conditions. We shall assume $\bar{\psi}$ and $\bar{\tau}$ fields, as perturbations on basic flows, at $t = 0$. If we use these fields to solve [30] for $\bar{\Phi}$ at $t = 0$, we shall then be able to calculate $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t}$, $\bar{\omega}$, φ_0 for four cases, which we list below:

- [a.] $\varphi_0 \neq 0$, $\bar{\psi}' \neq 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{k}x \nabla (\bar{\psi} + B_1 \bar{\tau}) + C \nabla \varphi_0$
- [b.] $\varphi_0 = 0$, $\bar{\psi}' \neq 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{k}x \nabla (\bar{\psi} + B_1 \bar{\tau})$
- [c.] $\varphi_0 \neq 0$, $\bar{\psi}' = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{k}x \nabla (\frac{\bar{\Phi}}{f} + B_1 \bar{\tau}) + C \nabla \varphi_0$
- [d.] $\varphi_0 = 0$, $\bar{\psi}' = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{k}x \nabla (\frac{\bar{\Phi}}{f} + B_1 \bar{\tau})$ (geostrophic case)

In all cases, we shall keep the fields of $\bar{\psi}$ and $\bar{\tau}$ the same. Corresponding to this field of $\bar{\psi}$, there exist two fields of $\bar{\Phi}$, depending upon whether $\bar{\psi}$ is or is not zero. When $\bar{\psi} = 0$, we have geostrophic initial conditions of geopotential, corresponding to cases [c.] and [d.]. When $\bar{\psi}' \neq 0$, we have nongeostrophic initial conditions of geopotential, corresponding to cases [a.] and [b.].

At any time t , the $\bar{\psi}$ and $\bar{\tau}$ fields will be given by

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= -Uy + a \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \sin \frac{\pi y}{D} \\ \bar{\tau} &= \frac{dx_0}{dy} y + b \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \sin \frac{\pi y}{D} \end{aligned} \right\} \quad [31]$$

where $U = \text{constant}$, $\frac{dx_0}{dy} = \text{constant}$, $L = 2D$, $c = \text{constant}$.

We have written [31] in two-dimensional form in order to be able to solve the balance equation [30] without sacrificing the nonlinearity. That is to say, the nonlinear terms of [30] disappear when this equation is specialized to one dimension. We shall solve [30] as a two-dimensional Poisson equation for $\bar{\Phi}$, and then specialize the result to a particular y .

If we assume that the motion takes place in the (x, y) plane between the rigid lateral walls $y = 0$, $y = D$, then

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} &= -U = \frac{1}{f} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \text{ at } y = 0, D \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} &= -fU + \frac{f\pi a}{D} \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \text{ at } y = 0 \\ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} &= -fU - \frac{f\pi a}{D} \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \text{ at } y = D \end{aligned} \right\} \quad [32]$$

The solution of the balance equation satisfying the above boundary conditions is

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(x, y, t) &= \left(\frac{a^2 + b^2 B_1^2}{4} \right) \left[\frac{\pi^2}{D^2} \cos \frac{4\pi}{L} (x-ct) + \frac{4\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi y}{D} \right] \\ &+ a f \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \sin \frac{\pi y}{D} - f U y \\ &+ \frac{\beta U y^2}{2} - \frac{\beta a D}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \cos \frac{\pi y}{D} \end{aligned} \quad [33]$$

In the case where $\bar{\psi}' \neq 0$, $\bar{\Phi} = f(\bar{\psi} - \bar{\psi}')$,

$$\begin{aligned} f\bar{\psi}' &= - \left(\frac{a^2 + b^2 B_1^2}{4} \right) \left[\frac{\pi^2}{D^2} \cos \frac{4\pi}{L} (x-ct) + \frac{4\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi y}{D} \right] \\ &- \frac{\beta U y^2}{2} + \frac{\beta a D}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \cos \frac{\pi y}{D} \end{aligned} \quad [34]$$

In the case where $\bar{\psi}' = 0$, $\bar{\varphi} = f\psi$,

$$\bar{\Phi} = -fUy + a f \sin \frac{2\pi}{L} (x-ct) \sin \frac{\pi y}{D} \quad [35]$$

At a fixed y and $t = 0$, [33] represents the initial geopotential field for cases [a.] and [b.], while [35] represents the initial geopotential field for cases [c.] and [d.].

In seeking solutions for the one-dimensional forms of [24], [25], [26], [28], we have neglected, as a first approximation, the φ_0 terms in the ω equation. This is equivalent to saying that the wind is nondivergent. We have done so here only in the ω equation, and nowhere else, in order to avoid mathematical complications in determination of φ_0 . Such a procedure will of course lead to an error in ω , and hence an error in φ_0 , $\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t}$ and $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}$. But at least we will be able to obtain rough estimates of nongeostrophic effects in this way.

The one-dimensional forms of [24], [25], [26], [28], are, therefore:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \right) + \beta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} - \bar{B}_1 \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x^2} + \bar{B}_1 C \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x^2} = 0 \quad [36]$$

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} + \bar{B} C \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} + \sigma \bar{\omega} = 0 \quad [37]$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} = \frac{\omega}{pC} \quad [38]$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} - \frac{f}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial p^2} \right) \bar{\omega} = \frac{1}{\sigma} \left(\beta \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\bar{M} \bar{B}}{p} \right) - 1 \right) \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial x^2} \quad [39]$$

The initial conditions are obtained by setting $t = 0$, $y = D/2$ in [31], i. e.,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= -Uy + a \sin \frac{2\pi x}{L} \\ \bar{\tau} &= \frac{dx_0}{dy} y + b \sin \frac{2\pi x}{L} \end{aligned} \right\} \quad [40]$$

We first solve [39], which becomes

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} - a, \bar{\omega} = K \cos \frac{2\pi x}{L} \quad [41]$$

where

$$\left. \begin{aligned} a, &= \frac{f}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial p^2} \right) \\ K &= \frac{2\pi}{L\sigma} \left\{ \frac{8\pi^2}{L^2} \frac{dr_0}{dy} [a + b \left(\frac{MB}{p} - 1 \right) + b\beta] \right\} \end{aligned} \right\} \quad [42]$$

The solution of [41] subject to the condition that ω be periodic in x , is

$$\omega = - \frac{K}{a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad [43]$$

The solution for φ_0 , obtained by substituting [43] into [38], and requiring that φ_0 be periodic in x , is

$$\varphi_0 = \frac{KL^2}{4\pi^2 pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad [44]$$

The solution for $\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t}$ obtained from [37], is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} &= \left[\frac{\sigma K}{a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} - \frac{2\pi a}{L} \frac{dr_0}{dy} - \frac{2\pi b}{L} U \right] \cos \frac{2\pi x}{L} + \\ &+ \frac{BCbK}{2pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} \sin \frac{4\pi x}{L} \end{aligned} \quad [45]$$

To obtain the solution for the geopotential tendency from [36], we write

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = f \frac{\partial \psi}{\partial t} - f \frac{\partial \psi'}{\partial t} \quad [46]$$

We may estimate $-f \frac{\partial \psi'}{\partial t}$ for inclusion as a nonhomogeneous term on the right side of [36]. From [34], at $t = 0$, $y = D/2$,

$$-f \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{L D^2} c \sin \frac{4\pi x}{L} \quad [47]$$

The phase speed c may be obtained by the usual method of investigating the linearized system corresponding to equations [36] through [39]. We obtain a quadratic frequency equation, whose solutions correspond to long waves. For purposes of estimating c at $t = 0$, the substitution of [31] into the linearized form of [36] leads to the sufficiently accurate expression for the propagation of stable waves

$$c \cong U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \quad [48]$$

whence

$$-f \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{L D^2} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \sin \frac{4\pi x}{L} \quad [49]$$

Equation [36] becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right) &= \frac{2\pi a f}{L} \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 U - \beta - \frac{b}{a} \bar{B}_1^2 \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{dr_0}{dy} \right] \cos \frac{2\pi x}{L} \\ &- \frac{f \bar{B}_1 C b K}{2pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} \sin \frac{4\pi x}{L} + \frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{L D^2} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \frac{4\pi x}{L} \end{aligned} \quad [50]$$

The solution of [50], subject to the condition that $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}$ be periodic in x , is

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right)_0 + f \left(\frac{a\beta L}{2\pi} + \frac{2\pi b \bar{B}_1^2}{L} \frac{dr_0}{dy} - \frac{2\pi a U}{L} \right) \left(\cos \frac{2\pi x}{L} - 1 \right) \\ &+ f \left\{ \frac{\bar{B}_1 C b K}{2pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} + \frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{f L D^2} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \right\} \sin \frac{4\pi x}{L} \end{aligned} \quad [51]$$

where $\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right)_0$ is the value of $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}$ at $x = 0$.

$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right)_0$ is obtained from [33], using c from [48]:

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \right)_0 = - \frac{2\pi a f c}{L} = - \frac{2\pi a f}{L} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \quad [52]$$

Finally

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} &= - \frac{2\pi a f}{L} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \cos \frac{2\pi x}{L} \\ &+ f \left\{ \frac{\bar{B}_1 C b K}{2pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} + \frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{f L D^2} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \right\} \sin \frac{4\pi x}{L} \end{aligned} \quad [53]$$

We may now summarize the results:

Case [a]

$$\varphi_0 \neq 0, \bar{\psi}' \neq 0, \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla (\psi + B_1 \tau) + C \nabla \varphi_0$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} \left(x, \frac{D}{2}, 0 \right) &= - \frac{fUD}{2} + \frac{\beta UD^2}{8} + a f \sin \frac{2\pi x}{L} + \\ &\quad \left(\frac{a^2 + b^2 \bar{B}_1^2}{4} \right) \frac{\pi^2}{D^2} \left(\cos \frac{4\pi x}{L} - 1 \right) \end{aligned} \quad [54]$$

$$\omega = - \frac{K}{a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad [43]$$

$$\varphi_0 = \frac{KL^2}{4\pi^2 pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad [44]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} &= \left[\frac{\sigma K}{a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} - \frac{2\pi a}{L} \frac{dr_0}{dy} - \frac{2\pi b}{L} U \right] \cos \frac{2\pi x}{L} + \\ &\quad \frac{\bar{B}_1 C b K}{2pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} \sin \frac{4\pi x}{L} \end{aligned} \quad [45]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} &= - \frac{2\pi a f}{L} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \cos \frac{2\pi x}{L} \\ &+ f \left\{ \frac{\bar{B}_1 C b K}{2pC [a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2]} + \frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{f L D^2} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \right\} \sin \frac{4\pi x}{L} \end{aligned} \quad [53]$$

Case [b]

$$\varphi_0 = 0, \bar{\psi}' \neq 0, \mathbf{v} = \mathbf{k} x \nabla (\psi + B_1 \tau)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} \left(x, \frac{D}{2}, c \right) &= - \frac{fUD}{2} + \frac{\beta UD^2}{8} + a f \sin \frac{2\pi x}{L} + \\ &\quad \left(\frac{a^2 + b^2 \bar{B}_1^2}{4} \right) \frac{\pi^2}{D^2} \left(\cos \frac{4\pi x}{L} - 1 \right) \end{aligned} \quad [54]$$

ω, φ_0 solutions given by [43], [44].

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t} = \left[\frac{\sigma K}{a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} - \frac{2\pi a}{L} \frac{dr_0}{dy} - \frac{2\pi b}{L} U \right] \cos \frac{2\pi x}{L} \quad [55]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} &= - \frac{2\pi a f}{L} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \cos \frac{2\pi x}{L} \\ &+ \frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{L D^2} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \sin \frac{4\pi x}{L} \end{aligned} \quad [56]$$

Case [c]

$$\varphi_0 \neq 0, \bar{\psi}' = 0, \mathbf{v} = \mathbf{k} x \nabla \left(\frac{\Phi}{f} + B_1 \tau \right) + C \nabla \varphi_0$$

$$\bar{\Phi} \left(x, \frac{D}{2}, 0 \right) = - \frac{fUD}{2} + a f \sin \frac{2\pi x}{L} \quad [57]$$

ω, φ_0 solutions given by [43], [44].

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = -\frac{2\pi af}{L} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \cos \frac{2\pi x}{L} + \frac{f \bar{B}_1 C b K}{8 p C \left[a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \right]} \sin \frac{4\pi x}{L} \quad [58]$$

Case [d]

$$\varphi_0 = 0, \psi' = 0, \mathbf{v} = \mathbf{kx} \nabla \left(\frac{\Phi}{f} + B_1 \tau \right)$$

$$\Phi \left(x, \frac{D}{2}, 0 \right) = -\frac{fUD}{2} + a f \sin \frac{2\pi x}{L} \quad [57]$$

ω, φ_0 solutions given by [43], [44].

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{2\pi af}{L} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) \cos \frac{2\pi x}{L} \quad [59]$$

5. Numerical Calculations

To find the latitude corresponding to the value of $y = D/2$, we use the approximation

$$y \approx \frac{r}{\cos \phi_0} (\sin \phi - \sin \phi_0) \quad [60]$$

where r = radius of the earth, Φ_0 = latitude of southern boundary of region ($\Phi = \Phi_0$ corresponds to $y = 0$). See (8). Then, for $y = D/2$, $\Phi_0 = 30^\circ$ N, $D = 2000$ km, $r = 6371$ km,

$$\Phi \approx 40^\circ \text{ N}$$

To determine a , we let $u_{\max} = v_{\max} = 50$ m/sec, and solve for a form

$$a = L/2\pi v_{\max} = .3182 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

We shall use $b = a$, so that the initial temperature perturbation is the same as the perturbation of the stream field. We use $U = 2 \times 10^3$ cm/sec, $\frac{dr_0}{dy} = -3 \times 10^3$ cm/sec (corresponding to a northward temperature gradient of 1° per 100 km).

σ is calculated from

$$\sigma = -\frac{R^2 T}{f g p} (\Gamma - \gamma)$$

where Γ = adiabatic lapse rate, γ = actual lapse rate, taken to be 6° C per km. With $\Gamma = .98^\circ$ C $\times 10^{-4}$ cm $^{-1}$ and $p = 500$ mb, $T = 245^\circ$ K, $\sigma = -1.6751 \times 10^9$ cm 2 sec $^{-1}$ mb $^{-1}$.

To determine $B(p)$ and $B_1(p)$, we make use of the fact that the assumption $\sigma = \text{constant}$ fixes $B(p)$ in the following way (6):

$$B(p) = (1 + K) \left(\frac{p}{p_0} \right)^K$$

whence

$$B_1(p) = \frac{1}{K} \left[1 - (1 + K) \left(\frac{p}{p_0} \right)^K \right]$$

We shall assume that the divergence varies linearly with pressure, i. e.,

$$C(p) = \frac{2p}{p_0} - 1$$

whence ω varies parabolically with pressure

$$G(p) = -\frac{6p}{p_0} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right)$$

We may summarize the numerical values used:

- $\Gamma = 0.98 \times 10^{-4}$ deg cm $^{-1}$
- $\gamma = 0.60 \times 10^{-4}$ deg cm $^{-1}$
- $R = 2.87 \times 10^6$ cm 2 sec $^{-2}$ deg $^{-1}$
- $g = 980$ cm sec $^{-2}$
- $p = 5 \times 10^2$ mb
- $T = 245$ deg A
- $f = .9375 \times 10^{-4}$ sec $^{-1}$
- $\sigma = -1.6751 \times 10^9$ cm 2 sec $^{-1}$ mb $^{-1}$

- $\beta = 1.754 \times 10^{-13}$ cm $^{-1}$ sec $^{-1}$
- $L = 4 \times 10^8$ cm
- $D = 2 \times 10^8$ cm
- $U = 2 \times 10^3$ cm sec $^{-1}$
- $\frac{dr_0}{dy} = -3 \times 10^3$ cm sec $^{-1}$
- $a = b = .3182 \times 10^{12}$ cm 2 sec $^{-1}$
- $p_0 = 10^3$ mb
- $\bar{B}C = .1259$
- $B_1C = -.4371$
- $B_1^2 = .6345$
- $pC = .1667 \times 10^3$ mb
- $\left(\frac{MB}{p} \right) - 1 = -.1827$
- $p \frac{\partial^2 G}{\partial p^2} = -6 \times 10^{-3}$ mb $^{-1}$
- $a = 3.3580 \times 10^{-16}$ cm $^{-2}$
- $K = .3232 \times 10^{-17}$ cm $^{-2}$ sec mb

$$\frac{K}{a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} = .0555 \times 10^{-1} \text{ mb sec}^{-1}$$

$$\frac{KL^2}{4\pi^2 p C \left[a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \right]} = .1350 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

$$c \cong U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} = 3.1926 \times 10^3 \text{ cm sec}^{-1}$$

$$-\frac{2\pi af}{L} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) = -1.4961 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$$

$$\left[\frac{\sigma k}{a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} - \frac{2\pi a}{L} \frac{dr_0}{dy} - \frac{2\pi b}{L} U \right] = .0430 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$$

$$\frac{BC b K}{2 p C \left[a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \right]} = .0067 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-3}$$

$$\frac{\pi^3 (a^2 + b^2 \bar{B}_1^2)}{L D^2} \left(U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} - \bar{B}_1^2 \frac{b}{a} \frac{dr_0}{dy} \right) = 1.0232 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$$

$$\frac{f \bar{B}_1 C b k}{8 p C \left[a + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \right]} = -.0542 \times 10^3 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-3}$$

We shall express the height tendencies in 100's ft day $^{-1}$, and the temperatures in deg day $^{-1}$. Thus

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = .00289 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (100\text{'s ft/day})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = .2822 \times 10^{-5} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (\text{deg/day})$$

In order to express the initial heights Z as perturbations (in 100's ft), we shall omit terms involving the basic current from this calculation.

Then the equations, in numerical form, are:

Case [a]:

$$\varphi_0 \neq 0, \psi' \neq 0, \mathbf{v} = \mathbf{kx} \nabla (\psi + B_1 \tau) + C \nabla \varphi_0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -4.3237 \cos \frac{2\pi x}{L} + 2.8004 \sin \frac{4\pi x}{L} \quad (100\text{'s ft day}^{-1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -12.1346 \cos \frac{2\pi x}{L} + 1.8907 \sin \frac{4\pi x}{L} \quad (\text{deg day}^{-1})$$

$$Z(x, \frac{D}{2}, 0) = 9.9869 \sin \frac{2\pi x}{L} + .8530 (\cos \frac{4\pi x}{L} - 1) \quad (100\text{'s ft})$$

Case [b]:

$$\varphi_0 = 0, \psi' = 0, \mathbf{v} = \mathbf{kx} \nabla (\bar{\psi} + B_1 \tau)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -4.3237 \cos \frac{2\pi x}{L} + 2.9570 \sin \frac{4\pi x}{L} \quad (100\text{'s ft day}^{-1})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -12.1346 \cos \frac{2\pi x}{L} \quad (\text{deg day}^{-1})$$

$$Z(x, \frac{D}{2}, 0) = 9.9869 \sin \frac{2\pi x}{L} + .8530 (\cos \frac{4\pi x}{L} - 1) \quad (100\text{'s ft})$$

Case [c]:

$$\varphi_0 \neq 0, \bar{\psi}' = 0, \mathbf{v} = \mathbf{k}x\nabla\left(\frac{\bar{\phi}}{f} + B_1\tau\right) + C\nabla\varphi_0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -4.3237 \cos \frac{2\pi x}{L} - 1566 \sin \frac{4\pi x}{L} \quad (100\text{'s ft day}^{-1})$$

$$Z(x, \frac{D}{2}, 0) = 9.9869 \cos \frac{2\pi x}{L} \quad (100\text{'s ft})$$

Case [d]:

$$\varphi_0 = 0, \bar{\psi}' = 0, \mathbf{v} = \mathbf{k}x\nabla\left(\frac{\bar{\phi}}{f} + B_1\tau\right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -4.3237 \cos \frac{2\pi x}{L} \quad (100\text{'s ft day}^{-1})$$

$$Z(x, \frac{D}{2}, 0) = 9.9869 \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (100\text{'s ft})$$

All Cases

$$\bar{\omega} = -0.555 \times 10^{-1} \cos \frac{2\pi x}{L} \text{ mb sec}^{-1}$$

$$\varphi_0 = 1.350 \times 10^{12} \cos \frac{2\pi x}{L} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

6. Discussion of Results

We have obtained rough estimates of the height tendencies for varying degrees of departure of the initial conditions from geostrophic conditions, all corresponding to the same initial stream field. As previously mentioned, there are two initial geopotential fields corresponding to the initially assumed stream field. These are shown in Figure 1. The solid line is the nongeostro-

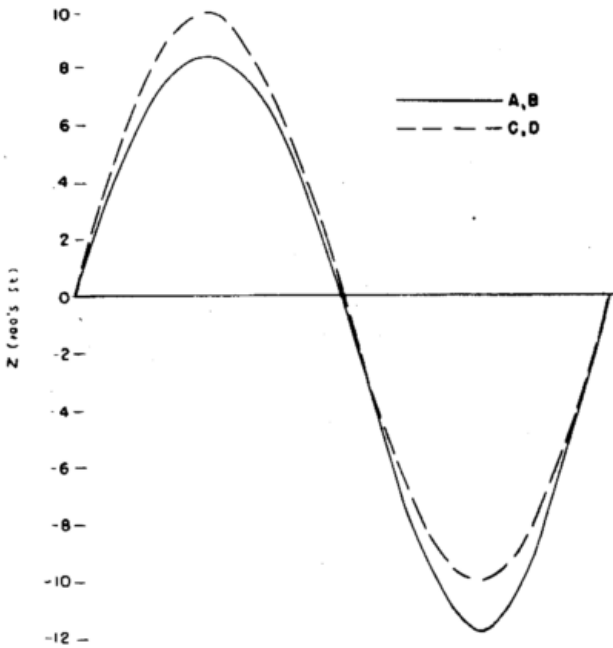


Fig. 1 Initial height distributions

phic height field, the dashed line is the geostrophic height field. Corresponding to each of these two fields of contour height, there may or may not be initial fields of φ_0 . Thus there are four possible combinations of initial conditions corresponding to the same stream field. To each of these conditions corresponds a method of determining the wind field, which we have listed as Cases [a] — [d] in Section 4. It is not intended to use these representations to determine the wind field in the present study, but they are listed simply to show the type of wind field to which each of the tendencies corresponds.

What should actually have been done would have been to assume an initial geopotential field, and solve

the balance equation as a Monge-Ampere equation for the stream function. This approach is actually the one to be used in forecasting, and would have been more palatable from the point of view of comparisons. Due to the mathematical difficulties, however, the present approach was used.

Nevertheless, several interesting results are brought out in this study. Figure 2 shows the height tendencies,

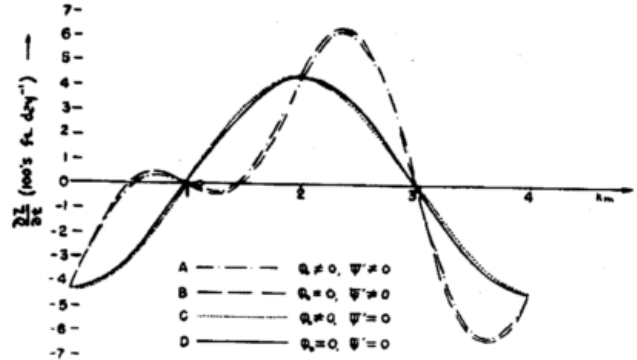


Fig. 2 Height tendencies

in hundreds of feet per day, for each of the four cases listed above. The solid line is Case [d], which corresponds to a geostrophically computed tendency for geostrophic initial conditions. When the initial φ_0 field is included in the calculations, so that the wind becomes divergent, then the tendency is given by the dotted line, Case [c]. There is hardly any difference between this case and Case [d]. The initial height field is the same in both cases, but Case [c] represents a slightly nongeostrophic wind field, due to the presence of the divergent part of the wind. The dashed line is the tendency field for Case [b]. Here the initial height field is nongeostrophic, but the wind field is nondivergent. The dash-dotted line is the tendency field for Case [a], in which the initial height field is nongeostrophic, but the wind field is divergent. Again, the presence of the divergent part of the wind makes very little difference in the tendency compared with that computed from Case [b].

On the other hand, there are marked differences between the tendencies for Cases [a] and [b], and those for Cases [c] and [d]. If we assume for the moment that Cases [a] and [b] are identical, as are Cases [c] and [d], then it becomes clear that the greatest differences in computed height tendencies arise when the latter are computed from nongeostrophic initial heights, corresponding to a nondivergent nongeostrophic wind field, as compared with those computed from geostrophic initial heights, corresponding to a nondivergent geostrophic wind field.

From these results we may draw the following conclusions, at least insofar as the model under discussion is concerned:

- a) The height tendency is hardly affected at all if calculated from an initial divergent wind field, rather than from an initial nondivergent wind field.
- b) The height tendency is significantly affected if calculated from an initial nondivergent nongeostrophic wind field.

Thus it appears that the introduction of the expression

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \psi \quad [61]$$

for the wind field, instead of

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \frac{\bar{\phi}}{f} \quad [62]$$

where ψ is obtained from the balance equation, should

lead to greater geostrophic departures than if one introduces

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \frac{\phi}{f} + \nabla \varphi \quad [63]$$

instead of [62]. This means that the solution of the continuity equation to obtain φ is unnecessary. In the present case, this would mean that, in order to obtain non-geostrophic forecasts which differed markedly, from geostrophic forecasts, it would be sufficient to solve the system [24], [25], [28] (with the φ_0 terms omitted), and [30] to obtain initial ψ fields.

It should be recalled, however, that the above results are based on calculations in which the φ_0 terms were neglected from the equation [28]. This scheme may have led to underestimates of φ_0 , and hence underestimates of its effect on the height tendencies. What should really be done is to solve [26] and [28] iteratively, starting with $\varphi_0 = 0$, until a convergent value of φ_0 is obtained. Until this is done, the above conclusions about the effects of φ_0 cannot be considered final.

We have also calculated the temperature tendency. It is clear from equation [37] that one can only distinguish between the cases when the initial field is divergent or not, insofar as calculation of the temperature tendency is concerned. In both cases, however, the initial wind field is nongeostrophic. Thus Figure 3 shows the tempe-

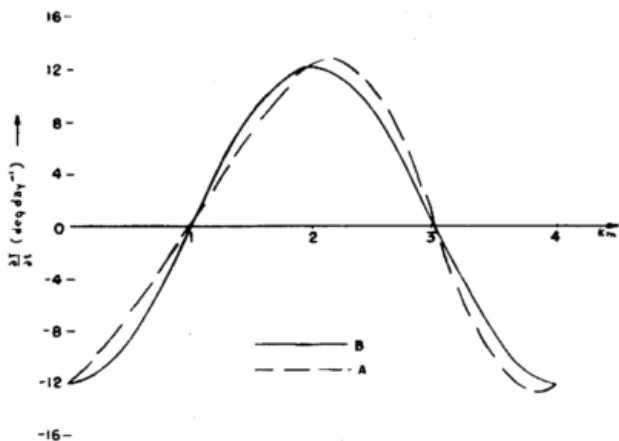


Fig. 3 Temperature tendencies

temperature tendencies corresponding to Case [a] (dashed line), and Case [b], solid line. It is evident that the in-

clusion of the divergent part of the wind in the initial nongeostrophic field can make a maximum difference of 1.8° C per day, due to a phase shift. No comparisons are possible for Cases [c] and [d], due to the nature of the equation for the temperature tendency. The maximum temperature difference is of the order of the radiational temperature change in the free atmosphere, and so may have greater significance than the difference between the height tendencies for the corresponding cases. That is to say, it may be possible that an initial nondivergent nongeostrophic wind field may lead to greater errors in temperature forecasts than in height forecasts. But this speculation must be considered further, using more accurate values of φ_0 , and perhaps calculating forecasts from actual initial conditions.

References

- (1) Charney, J.: The Use of the Primitive Equations of Motion in Numerical Prediction. *Tellus* 7, 22—27 (1955)
- (2) Bolin, B.: Numerical Forecasting With the Barotropic Model. *Tellus* 7, 27—50 (1955)
- (3) Thompson, P. D.: A Theory of Large-Scale Disturbances in Nongeostrophic Flow. Unpublished Manuscript, Joint Numerical Weather Prediction Unit (1955)
- (4) Berkofsky, L. and Seager, G. B. Jr.: Forecast Height Changes at Various Levels Computed From the Thermotropic Model, *Bull. Amer. Meteor.* 37, 218—223 (1956)
- (5) Thompson, P. D. and Gates, W. L.: A Test of Numerical Prediction Methods Based on the Barotropic and Two-Parameter Baroclinic Models. *J. Meteor.* 13, 127—141 (1956)
- (6) Berkofsky, L.: A Three-Parameter Baroclinic Numerical Prediction Model. *J. Meteor.* 13, 102—111 (1956)
- (7) Bolin, B.: An Improved Barotropic Model and some Aspects of Using the Balance Equation for Three-dimensional Flow. *Tellus* 8, 61—75 (1956)
- (8) Flohn, H. and Collaborators: Research on Objective Weather Forecasting. Final Report, Contract No. AF 61 (514)—434, Part C, 7 (1954)

Zur Anwendung der Fjörtoftschen Methode bei der Vorhersage von Höhenwetterkarten

von

Stanislav Brandejs, Jaroslav Kopáček, Nina Věková und Otakar Zikmunda

(mit 5 Abbildungen und 3 Tabellen im Text)

Fjörtoft (2) schreibt die barotrope Vorticity-Gleichung in folgender vereinfachter Form

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \bar{v} \cdot \nabla_p \zeta \quad [1]$$

In der Gleichung [1] ist die absolute Vorticity

$$\zeta = z - \bar{z} - S(\varphi),$$

$$z = \frac{1}{4} (z_{x+d,y} + z_{x-d,y} + z_{x,y+d} + z_{x,y-d}),$$

$$S(\varphi) = \int \frac{\Omega^2 d^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g k^2(\varphi)} d\varphi$$

und

$$\bar{v} = v + \bar{s} = -g\lambda^{-1} \nabla_p z \times \bar{t} - g\lambda^{-1} \nabla_p S(\varphi) \times \bar{t} \quad [2]$$

z bedeutet die geometrische Höhe des äquivalent-barotropen Niveaus (der isobarischen Fläche 50 cb), d die Maschenweite des benutzten Gitternetzes, Ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, φ die geographische Breite, $k(\varphi)$ den Koeffizienten der elementaren Längenverzerrung, g die Schwerebeschleunigung, λ den Coriolis'schen Parameter und \bar{t} den vertikalen Einheitsvektor des kartesischen Koordinatensystems.

Die Funktion $S(\varphi)$ ist von der Zeit t unabhängig und ihre Form ist für verschiedene Kartenprojektionen verschieden. Das $S(\varphi)$ -Feld für Lambert'sche konforme Kegelprojektion (längentreu auf dem 30° und 60° Breitengrad) ist auf der Abbildung 1 veranschaulicht.

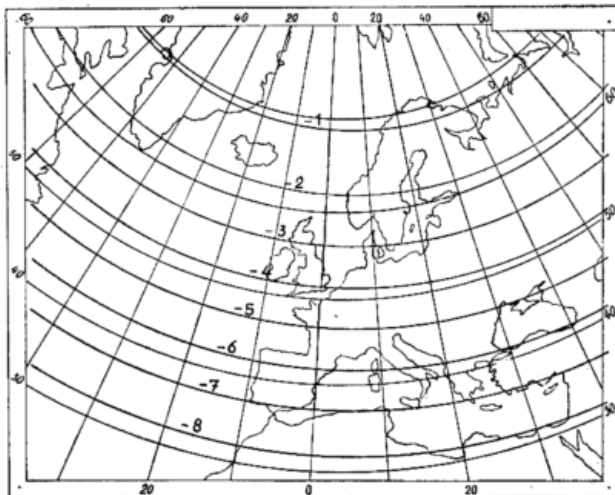


Abb. 1
Das $S(\varphi)$ -Feld.

Aus dem Vergleich des $S(\varphi)$ -Feldes mit dem räumlich gemittelten Feld der geometrischen Höhe z ist ersichtlich, daß die Advektion der absoluten Vorticity ζ vorwiegend durch die räumlich gemittelte Strömung erfolgt. Bei geeigneter Wahl der Maschenweite d ist die räumlich gemittelte Strömung mit der Zeit weniger

veränderlich als das Feld der geometrischen Höhe z . Wählen wir zum Beispiel $d = 12^\circ$ Längengraden auf dem 60° n. Br., dann sind nach Fjörtoft die vierundzwanzigstündigen Veränderungen des Vektors \bar{v} vernachlässigbar, und dieser kann praktisch als zeitlich konstant angesehen werden.

Die zeitliche Invarianz des räumlich gemittelten Translationsfeldes ermöglicht uns, die Gleichung [1] in einem einzigen Zeitschritt zu lösen. Die Lösung der Gleichung [1] erfolgt im Grunde in drei Etappen. Während der ersten Etappe verlagern wir die Isolinien ζ^t im geostrophisch approximierter Strömung \bar{v}^{*t} und bestimmen die neue Lage dieser Isolinien im Zeitpunkt $t + \Delta t$. In weiteren Etappen berechnen wir aus bekannten Feldern ζ^t und $\zeta^{t+\Delta t}$ die lokalen Zeitänderungen der absoluten Vorticity im Intervall Δt und durch die Lösung des Differenzanalogons der Poisson'schen Gleichung [1]

$$\Delta z - \bar{\Delta z} = \Delta \zeta$$

ermitteln wir das isallohypstische Feld der gewählten absoluten Topographie und dadurch auch das prognostische Feld von z in der Zeit $t + \Delta t$.

Alle in obenerwähnten Etappen auftretenden Operationen (einschließlich der Berechnung der Anfangsfelder von ζ und \bar{v}^*) lassen sich mit Vorteil graphisch durchführen, und zwar gleichzeitig für das ganze Vorhersagegebiet. Die graphische Lösung der Prognosegleichung [1] ist technisch sehr einfach, verhältnismäßig schnell und dabei auch genau. Die Berechnung des isallohypstischen Feldes dauert selbst in komplizierten Fällen höchstens drei Stunden und die Genauigkeit läßt sich nach unseren Erfahrungen vollauf mit der Genauigkeit der numerischen Integration vergleichen.

Im Meteorologischen Institut der Karls-Universität wurden mittels der Fjörtoft'schen Methode dreizehn zwölfstündige Prognosen der absoluten Topographie der 50 cb-Fläche und die gleiche Anzahl analoger vierundzwanzigstündiger Prognosen berechnet. Bei graphischer Berechnung dieser Prognosen haben wir die exakte Lösung der Gleichung [1] durch die Beziehung

$$\Delta z = \Delta \zeta + 3 \Delta \zeta$$

approximiert. Diese Beziehung gilt nach Fjörtoft vor allem für Wellenlängen von etwa 8d. Andere in der Fjörtoft'schen Arbeit erwähnten approximativen Lösungen wurden systematisch nicht untersucht.

In zwei in den Tabellen 1 und 2 mit Stern bezeichneten Fällen wurde bei der Berechnung des prognostischen Feldes die vereinfachte Gleichung [1]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \bar{v} \cdot \nabla_p (z - \bar{z}) \quad [3]$$

angewandt. Beim Vergleich der nach den Gleichungen [1] und [3] berechneten isallohypstischen Felder hat es sich gezeigt, daß die Vernachlässigung des Terms

$$v \cdot \nabla_p S(\varphi) \quad \text{und} \quad - \bar{s} \cdot \nabla_p \zeta$$

keinen Einfluß auf die Prognosegüte hatte. Trotz der

geringen Anzahl vergleichener Fälle sind wir der Meinung, daß es praktisch in der Regel möglich sein wird, auch mit vereinfachter Gleichung [3] erfolgreich zu arbeiten. Durch Anwendung dieser Gleichung wird sich die Anzahl der bei der Konstruktion von Anfangsfeldern ζ und v^* notwendigen graphischen Operationen verringern und die Berechnung des gesuchten prognostischen Feldes einigermaßen beschleunigen.

Die Qualität einzelner Prognosen ist objektiv durch die Werte einiger statistischer Parameter ausgedrückt,

die in den Tabellen 1, 2 und 3 angeführt sind. In diesen Tabellen bedeutet r den Korrelationskoeffizienten zwischen der beobachteten (x) und der berechneten (y) zwölf- bzw. vierundzwanzigstündigen Tendenz von z ,

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}},$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum (x-y)^2}{n}} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\varepsilon}{\sigma_x}$$

Tab. 1
Zwölfstündige Vorhersagen

	1953	r	x	y	ε	σ_x	σ_y	η
29. I., 0300 — 1500 GMT		0,60	14	5	65	38	79	1,71
30. I., 0300 — 1500 GMT		0,36	10	-16	69	69	44	1,00
30. I., 1500 — 31. I., 0300		0,53	-29	6	75	91	90	0,82
31. I., 0300 — 1500 GMT		0,89	9	2	70	121	108	0,56
31. I., 1500 — 1. II., 0300		0,68	-22	-6	91	95	128	0,96
1. II., 0300 — 1500 GMT		0,56	20	7	54	66	51	0,82
1955								
15. I., 0300 — 1500 GMT		0,80	6	-25	72	61	104	1,17
15. I., 0300 — 1500 GMT*)		0,76	6	14	62	61	104	1,00
16. I., 0300 — 1500 GMT		0,74	0	-5	52	63	79	0,83
17. I., 0300 — 1500 GMT		0,66	-26	1	86	56	106	1,52
18. I., 0300 — 1500 GMT		0,62	10	18	62	52	84	1,20
21. I., 0300 — 1500 GMT		0,77	21	2	42	56	62	0,74
22. I., 0300 — 1500 GMT		0,72	20	32	45	64	64	0,70
23. I., 0300 — 1500 GMT		0,73	35	13	51	65	67	0,78
23. I., 0300 — 1500 GMT*)		0,76	35	12	58	65	21	0,88

Tab. 2
Vierundzwanzigstündige Vorhersagen

	1953	r	x	y	ε	σ_x	σ_y	η
29. — 30. I., 0300 GMT		0,44	22	10	98	61	109	1,60
30. — 31. I., 0300 GMT		0,54	-20	-4	101	122	60	0,83
30. — 31. I., 1500 GMT		0,48	-21	20	154	168	130	0,91
31. I. — 1. II., 0300 GMT		0,60	-13	25	151	178	156	0,85
31. I. — 1. II., 1500 GMT		0,48	4	-17	160	141	180	1,14
1. — 2. II., 0300 GMT		0,48	18	6	111	115	105	0,97
1955								
15. — 16. I., 0300 GMT		0,70	6	-4	85	94	119	0,90
15. — 16. I., 0300 GMT*)		0,75	6	9	85	94	130	0,90
16. — 17. I., 0300 GMT		0,81	-9	-9	73	109	122	0,67
17. — 18. I., 0300 GMT		0,72	-41	25	118	90	140	1,31
18. — 19. I., 0300 GMT		0,62	15	31	83	79	106	1,04
21. — 22. I., 0300 GMT		0,74	29	37	65	88	100	0,73
22. — 23. I., 0300 GMT		0,60	48	48	94	124	105	0,76
23. — 24. I., 0300 GMT		0,74	27	3	83	98	115	0,85
23. — 24. I., 0300 GMT*)		0,72	27	-1	110	98	151	1,13

Aus den Tabellen 1 und 2 ist ersichtlich, daß in der Periode vom 29. Januar — 1. Februar 1953 die Güte der graphischen Prognosen recht unterschiedlich war. Fast unmittelbar nacheinander folgten in dieser Periode die schlechtesten und die besten Prognosen der ganzen untersuchten Serie. Der durchschnittliche Korrelationskoeffizient der zwölfstündigen Prognosen betrug in dieser Periode 0,60, der der vierundzwanzigstündigen 0,50. In der Periode vom 15. — 23. Januar 1955 hat sich die

Qualität einzelner Prognosen wesentlich verbessert. Die Korrelationskoeffizienten einzelner Prognosen waren in diesem Zeitabschnitt ziemlich hoch, in allen Fällen war $r \geq 0,60$. Der durchschnittliche Korrelationskoeffizient betrug dabei 0,72 für die zwölfstündigen, 0,71 für die vierundzwanzigstündigen Prognosen. Einige der besten Prognosen der ganzen untersuchten Serie sind auf den Abbildungen 2a, b und 3a, b veranschaulicht.

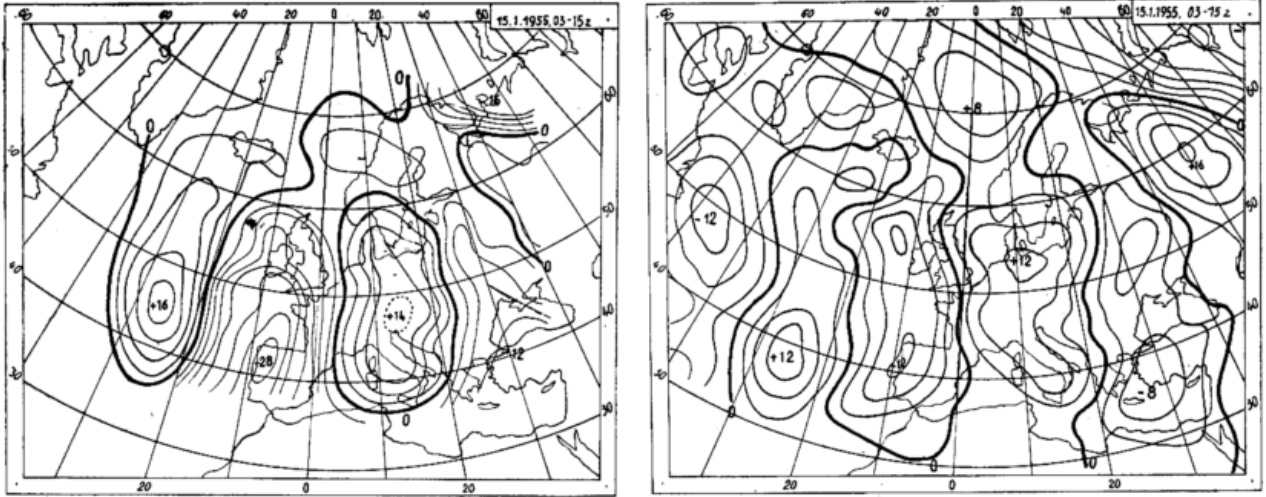


Abb. 2

Zwölfstündige Isallohysen vom 15. I. 1955, 0300 — 1500 GMT

a) prognostische,

b) beobachtete.

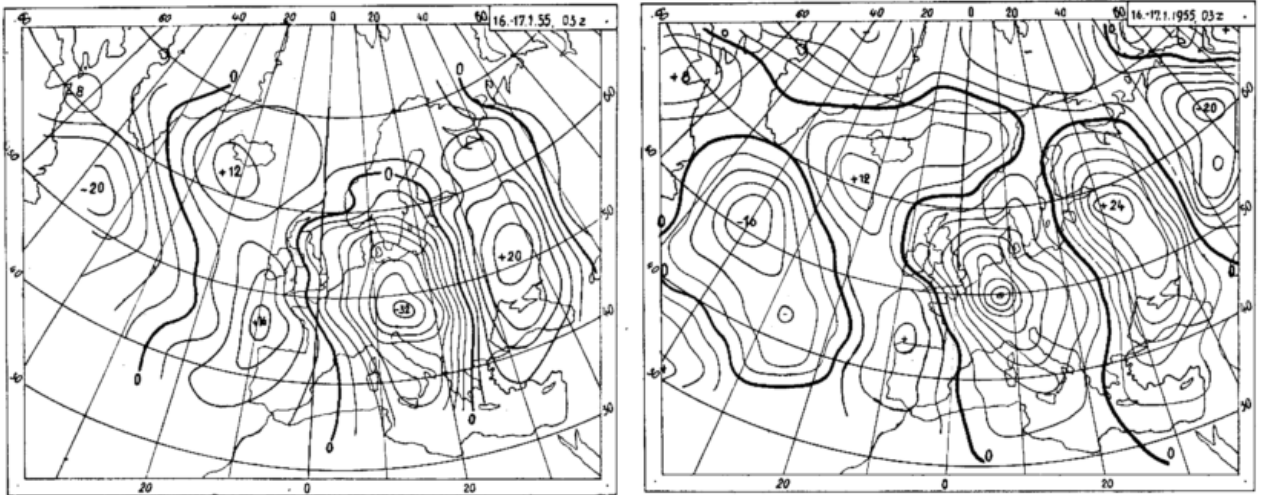


Abb. 3

Vierundzwanzigstündige Isallohysen vom 16. — 17. I. 1955, 0300 GMT

a) prognostische,

b) beobachtete.

Tab. 3

1953	r	x	y	ϵ	σ_x	σ_y	η
30. I., 0300 — 1500 GMT							
G	0,36	10	-16	69	69	44	1,00
N	0,61	21	-20	70	74	60	0,95
30. I., 1500 — 31. I., 0300							
G	0,53	-29	6	75	91	90	0,82
N	0,86	-13	-9	48	89	79	0,53
31. I., 0300 — 31. I., 1500							
G	0,89	9	2	70	121	108	0,56
N	0,90	9	-22	61	116	89	0,53
31. I., 1500 — 1. II., 0300							
G	0,68	-22	-6	91	95	128	0,96
N	0,86	-13	-42	53	88	90	0,60

In der Tabelle 3 werden die Ergebnisse der zwölfstündigen graphischen Prognosen mit den zwölfstündigen isallohptischen Feldern verglichen, die durch lineare Interpolation aus den Werten momentaner Tendenzen in zwei aufeinander folgenden synoptischen Terminen berechnet wurden. Die Berechnung der letztgenannten Felder wurde ausführlich von Bolin und Charney (1) beschrieben. Aus der Tabelle 3 und aus

den Abbildungen 4a, b, c ist ersichtlich, daß die Güte der numerisch berechneten Felder wesentlich größer war als die der graphischen Prognosen. Beim Vergleich beider Felder muß man jedoch bedenken, daß die numerisch ermittelten Felder nicht als Prognosen angesehen werden können. Bei echten numerischen Prognosen wäre der Unterschied in der Qualität beider Felder wesentlich geringer.

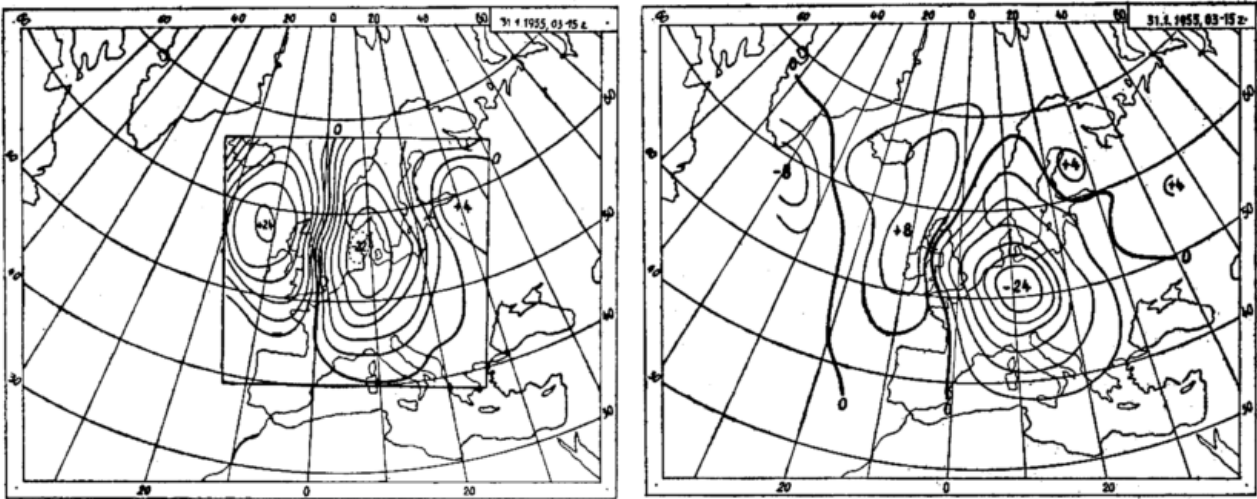
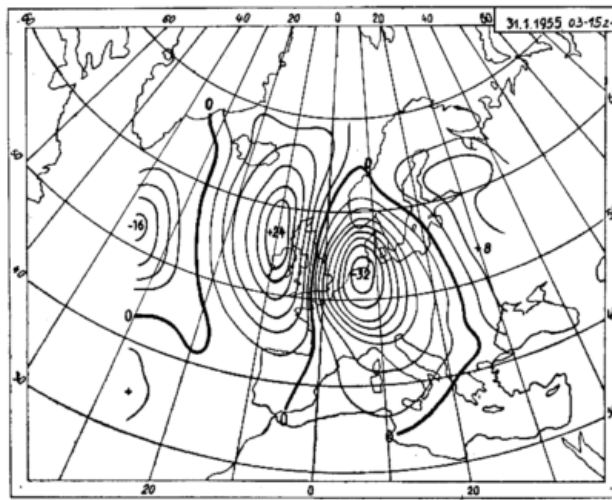


Abb. 4

Zwölfstündige Isallohypsen vom 31. I. 1953, 0300 — 1600 GMT
 a) graphische Prognose, b) numerische „Prognose“



c) beobachtete.

Zikmunda (3) hat bewiesen, daß die Fehler der barotropen Prognosen mit den Bodendruckänderungen eng zusammenhängen. Aus der Theorie geht nämlich hervor, daß

$$\nabla p^2(x-y) = \text{konst.} \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad [4]$$

wo p_0 den Bodendruck bedeutet. Beim Vergleich von Fehlern graphischer Prognosen mit den Bodendruckänderungen wurde in fast allen Fällen eine ziemlich gute Übereinstimmung der Konfiguration beider Felder festgestellt. Im Einklang mit der Formel [4] waren die Gebiete positiver Fehler identisch mit den Gebieten des

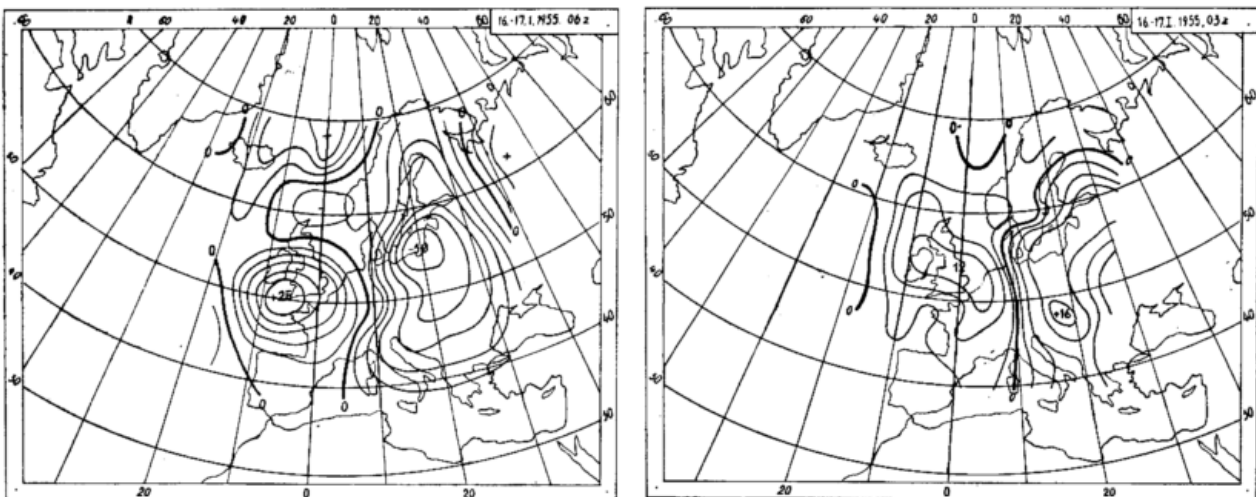


Abb. 5

a) Bodendruckänderungen vom 16. — 17. I. 1955, 0600 GMT
 b) Fehler der vierundzwanzigstündigen graphischen Prognose vom 16. I. 1955, 0300 GMT.

Druckfalles, die Gebiete negativer Fehler mit den Kernen des Bodendruckanstiegs. Aus der Übereinstimmung beider Felder (siehe Abbildung 5a, b) läßt sich schließen, daß die größten Fehler graphischer Prognosen durch vereinfachende Voraussetzungen des barotropen Modells verursacht wurden. Die Anwendung des graphischen Integrationsverfahrens hat also die Qualität der barotropen Prognosen keineswegs verschlechtert.

Literatur

- (1) Bolin, B. and Charney, J. G.: Numerical tendency computations from the barotropic vorticity equation. *Tellus* 3, 248—257 (1951)
- (2) Fjörtoft, R.: On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation. *Tellus* 4, 179 — 194 (1952)
- (3) Zikmunda, O.: Ein Beitrag zur Methodik der kurzfristigen Wettervorhersage. Unveröff. Mitteilung, 1956.

Transport der inneren und kinetischen Energie in der Atmosphäre

von

Marijan Čadež

1. Einleitung

Die Bewegung der Luft in der Atmosphäre steht in engem Zusammenhang mit dem Transport der inneren und kinetischen Energie. Das Problem des Transportes dieser Energieformen in der Atmosphäre ist in letzter Zeit in der Literatur häufig diskutiert worden (Starr (1), Van Mieghem (2), (3), Miller (4), Kuo (5), Kao (6), Spar (7), Čadež (8), (9), (10) u. a.). Trotzdem ist offenbar, daß in dieser Hinsicht noch verschiedene Probleme ungelöst sind, wie z. B. das Problem der Geschwindigkeit, mit welcher diese Energieformen in der Atmosphäre transportiert werden. Ich habe im Jahre 1945 gezeigt, daß sich die innere und kinetische Energie in der Atmosphäre von Luftteilchen zu Luftteilchen mit der Geschwindigkeit der Kompressionswellen, d. h. mit Schallgeschwindigkeit, fortpflanzt und daß diese Geschwindigkeit in der Atmosphäre etwas ähnliches bedeutet wie die Lichtgeschwindigkeit im Universum.

Der Transport der kinetischen Energie kann von dem Transport der inneren Energie nicht getrennt betrachtet werden. So ist z. B. der Gesamttransport der beiden Energieformen mit dem Vektor $pv - p =$ Luftdruck, $v =$ Windgeschwindigkeitsvektor — eng verbunden. Mit diesem Vektor können wir aber nicht eindeutig die Richtung der Strömung der inneren und kinetischen Energie bestimmen. Beide Energieformen strömen nämlich an irgendeinem Punkt in der Atmosphäre in alle möglichen Richtungen fort, was mit den entsprechenden Luftbewegungen in Zusammenhang steht.

2. Die Übertragung der inneren und kinetischen Energie mit der Schallgeschwindigkeit

Die fundamentale Eigenschaft der Atmosphäre, daß in ihr die innere und kinetische Energie von Luftteilchen zu Luftteilchen mit Schallgeschwindigkeit übertragen wird, habe ich zuerst im Zusammenhang mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, d. h. bei der Betrachtung der Wärmezu- und -abfuhr bemerkt. Wir können sehen, daß die Arbeit pdV , die von den Luftteilchen während der Vergrößerung des Volumens V um dV gegen den äußeren Druck geleistet wird, gleich der Vergrößerung der inneren und teils auch kinetischen Energie der umgebenden Luft ist. Diese Vergrößerung manifestiert sich als die „Wellenenergie“, d. h. die Energie des Impulses, die sich zusammen mit der erzeugten Verdichtung der Luft — Impuls — von den Luftteilchen mit Schallgeschwindigkeit in die umgebende Atmosphäre entfernt (Abb. 1 und 2 in (9)). Ähnlich entsteht um ein Luftteilchen, dessen Volumen verkleinert wird, eine Verdünnung der Luft. Auch mit dieser wird die innere und teils auch die kinetische Energie mit Schallgeschwindigkeit übertragen, nur in diesem Fall erfolgt die Übertragung der inneren Energie in die entgegengesetzte Richtung, d. h. aus der Umgebung in das Teilchen (Abb. 3 und 4 in (9)). Die übertragene Energie aus der Umgebung auf das Teilchen wird der Arbeit $-pdV$ gleich.

Die Zu- und Abfuhr der Wärme ist mit der Übertragung der inneren und kinetischen Energie mit Schall-

geschwindigkeit eng verbunden. Bedeutet das nicht, daß die Übertragung der inneren und kinetischen Energie mit Schallgeschwindigkeit, d. h. mit der Geschwindigkeit der Kompressionswellen eine fundamentale Eigenschaft der Materie ist?

Denken wir uns in der Atmosphäre eine vollkommen elastische Membrane ohne Gewicht, die überall normal auf den Stromlinien steht und die sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie die benachbarte Luft bewegt. Die Luft wirkt von der Hinterseite auf die Vorderseite der Membrane pro Flächeneinheit mit der Kraft p und leistet pro Zeit- und Flächeneinheit die Arbeit pv . Stellen wir uns jetzt vor, daß die Luft hinter der Membrane entfernt wird und daß so die Bewegung der Luft, die sich unmittelbar vor der Membrane befindet, vollkommen von uns abhängt und daß die Arbeit pv von uns geleistet wird.

Irgendeine Verschiebung der Membrane hat eine entsprechende Verschiebung der Luft, die sich unmittelbar vor der Membrane befindet, zur Folge. Diese Störung kann man im ersten Moment nur in unmittelbarer Nähe der Membrane beobachten, und sie wird sich zusammen mit der übertragenen Energie von der Membrane her in die umgebende Luft mit einer ganz bestimmten Geschwindigkeit fortpflanzen. Diese Geschwindigkeit kann nur die Geschwindigkeit der Kompressionswellen, d. h. die Schallgeschwindigkeit sein, da jede Verschiebung der Membrane unbedingt eine entsprechende Änderung des Volumens der Luft zur Folge hat.

Durch jede Verschiebung der Membrane wird unmittelbar nur die Geschwindigkeit der Luftmoleküle beeinflusst. Deswegen kann nur die innere und kinetische Energie der Luft in entsprechendem Betrage verändert werden und der oben erwähnte Vektor pv kann nichts anderes bedeuten als den Gesamttransport der inneren und kinetischen Energie durch die Flächeneinheit pro Zeiteinheit auf der vorderen Seite der Membrane.

Jeden Teil der Membrane können wir auf beliebige Weise verschieben, um eine endliche Geschwindigkeit der benachbarten Luft zu erhalten. Unter dem Geschwindigkeitsvektor v der Luft in einem beliebigen Punkt der Membrane, die nur noch eine mathematische Fläche darstellen soll, müssen wir also die Summe aller Verschiebungen $d_1r, d_2r, \dots - r =$ Ortsvektor — der Luft, die an diesem Punkt in der Zeiteinheit erfolgen, verstehen. Es ist

$$[1] \quad v = \frac{1}{\Delta t} \sum d_i r,$$

wobei sich das Summenzeichen auf alle Verschiebungen bezieht, die im Zeitintervall Δt stattfinden.

Eine jede Verschiebung $d_i r$ steht mit dem entsprechenden Impuls - Verdichtung oder Verdünnung - und dem Transport $d_i \Phi$ der inneren und kinetischen Energie in Richtung der Verschiebung im Zusammenhang. Es ist nämlich

$$[2] \quad d_i \Phi = (p_0 + \delta_i p_0) d_i r, \text{ wobei } p = p_0 + \delta_i p_0$$

ist (δp_0 = Veränderung des Luftdruckes, die durch den Impuls erzeugt ist). Der Teil $(p_0 + \frac{1}{2} \delta p_0) d_{iR}$ bedeutet den Transport der inneren und der Teil $\frac{\delta p_0}{2} d_{iR}$ den Transport der kinetischen Energie. Der Hauptteil des Transportes der inneren Energie — $p_0 d_{iR}$ — ist immer in die Richtung der Fortpflanzung des Impulses gerichtet, doch die kinetische Energie strömt in dieselbe Richtung, nur wenn sich der Impuls als eine Verdichtung fort-pflanzt. Im Falle der Verdünnung pflanzt sie sich näm-lich in entgegengesetzte Richtung fort.

Nach dem Dargelegten sehen wir, daß durch die be-wegte Fläche die innere Energie in alle möglichen Rich-tungen immer nach der vorderen Seite transportiert wird, daß aber die kinetische Energie sowohl auf die eine wie auf die andere Seite transportiert werden kann. Der Vektor pv gibt uns daher nicht den Fluß der Ener-gie in einer bestimmten Richtung, sondern nur den Ge-samttransport der inneren und kinetischen Energie von der Hinterseite auf die Vorderseite an, der in allen mög-lichen Richtungen mit Schallgeschwindigkeit erfolgt.

Den Vektor pv deutet man oft als Fluß der kineti-schen Energie in Bewegungsrichtung der Luft. Diese Deutung hat z. B. Prof. van Mieghem (2) zu dem Schluß geführt, daß die Geschwindigkeit dieses Flusses

$$[3] \quad c_a = \frac{pv}{\frac{v^2}{2} \rho}, \quad \rho = \text{Luftdichte,}$$

ist. Da das Quadrat der Schallgeschwindigkeit

$$[4] \quad c^2 = \frac{\kappa p}{\rho}$$

— κ = Quotient zwischen den spezifischen Wärmen der Luft — ist, gilt

$$[5] \quad c_a = \frac{2}{\kappa} \frac{c^2}{v}$$

Dieses Resultat steht im Widerspruch mit obigen Aus-führungen, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit viel größer ist als die Schallgeschwindigkeit. Die Schallge-schwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit des Flusses der kinetischen Energie könnten wir auch aus einer Glei-chung bekommen, die analog der Gleichung [3] ist, aber nur für den speziellen Fall, daß der Geschwindigkeits-vektor v nur durch einen Impuls — Verdichtung oder Verdünnung — erzeugt wird. In diesem Fall ist nämlich der Fluß der kinetischen Energie durch den Vektor

$$[6] \quad \Phi_k = \frac{\delta p}{2} v$$

gegeben und anstatt der Gleichung [3] bekommen wir die Gleichung

$$[7] \quad c'_a = \frac{\frac{\delta p}{2} v}{\frac{v^2}{2} \rho}$$

Wenn wir in Betracht ziehen, daß

$$[8] \quad \delta p = \pm \rho cv$$

ist (10), so sehen wir, daß die Fortpflanzungsgeschwin-digkeit der kinetischen Energie tatsächlich die Schall-geschwindigkeit ist:

$$[9] \quad c'_a = \pm c$$

3. Die Energiegleichung des offenen Systems

Wie leicht zu zeigen ist, können wir die Energieglei-chung eines offenen Systems in der Form

$$[10] \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_D (U+P+K) \rho d\tau = \frac{dQ}{dt} + \int_{\sigma} p v_n d\sigma + \int_{\sigma} (U+P+K) \rho v_n d\sigma$$

schreiben — U, P, K = innere (zusammen mit der Ener-gie der Wärmestrahlung), gravitationspotentielle bzw. kinetische Energie der Einheitsmasse, $\frac{dQ}{dt}$ = dem Sy-

stem zugeführte Wärme pro Zeiteinheit, v_n = Normal-komponente des Bewegungsvektors auf der Oberfläche σ des Systems und zählt positiv, wenn nach innen ge-richtet, p, ρ = Luftdruck und Dichte der Luft, $d\tau$ = Vo-lumenelement, $d\sigma$ = Oberflächenelement des Systems -. Das Volumenintegral bezieht sich auf ein System mit unbeweglicher Oberfläche σ . Die Oberflächenintergrale beziehen sich auf die Oberfläche des Systems. In dieser Gleichung ist auch die Reibung berücksichtigt, da wir die Reibungskräfte als zusätzliche Gradientkräfte deu-ten können; die erzeugte Wärme ist in $\frac{dQ}{dt}$ berücksich-tigt.

Aus der Gleichung [10] sehen wir, daß die totale Än-derung des Energieinhalts des Systems, d. h. der Summe aus innerer (U), kinetischer (K) und gravitationspoten-tieller Energie (P) gleich dem Fluß der Energien durch die Oberfläche ist. Dieser Fluß besteht aus folgenden Anteilen:

1. Wärmezufuhr durch Strahlung, Wärmeleitung usw.
2. Zufuhr der inneren und kinetischen Energie mit Schallgeschwindigkeit,
3. Zufuhr der inneren, kinetischen und gravitations-potentiellen Energie mit der Windgeschwindigkeit.

Der zweite Teil verdient unsere besondere Aufmerk-samkeit, da er in der Tat die mechanische Energie dar-stellt, die dem System zugeführt wird. Dieser Transport wird gewöhnlich als Transport der kinetischen Energie und als Quelle der kinetischen Energie des Systems un-richtig gedeutet. Er bedeutet in der Tat in der Haupt-sache die Quelle der gravitationspotentiellen Energie des Systems, die weitere Transformationen der Energie in dem System bedingt. Das Bild von diesem Mechanis-mus ist das Folgende (9). Die Umwandlung der Energie $\int_{\sigma} p v_n d\sigma$ in die gravitationspotentielle Energie des Systems ($\Delta_1 P$) hat die Umwandlung der inneren Energie — einschließlich Kondensationswärme — des Systems die während der Aufwärtsbewegungen frei wird ($\Delta_1 U$), in die gravitationspotentielle Energie des Systems ($\Delta_2 P$) zur Folge. Diese Umwandlung verursacht wieder, wegen der erzeugten Luftdruckgradienten in horizontaler Richtung, eine neue Umwandlung der Energie in dem System, und zwar der inneren Energie ($\Delta_2 U$) in die kinetische Energie der Winde (K):

$$\int_{\sigma} p v_n d\sigma \rightarrow \Delta_1 P + \dots \dots \dots$$

$$\Delta_1 U \rightarrow \Delta_2 P + \dots \dots \dots$$

$$\Delta_2 U \rightarrow K + \dots \dots \dots$$

Die Windgeschwindigkeit auf der Oberfläche des Sys-tems ist gleich der Summe von zwei verschiedenen Partialgeschwindigkeiten: von der einen, die wegen des Transportes der inneren Energie von außen nach innen besteht und von der anderen, die die Folge des Trans-portes dieser Energie von dem System in die umgeben-de Atmosphäre ist. Von den Prozessen im System und in der umgebenden Atmosphäre ist abhängig, wie groß die eine und die andere Partialgeschwindigkeit ist und wie groß der Gesamttransport der inneren und kinetischen Energie über die Grenze des Systems ist.

Literatur

- (1) Starr, V.: Applications of Energy Principles to the General Circulation. Compendium of Meteorology Boston 1951, 568.
- (2) Van Mieghem, J.: Les équations générales de la mécanique et de l'énergétique des milieux turbulents en vue des applications à la météorologie. Mem. Inst. Roy. Météor. de Belgique 34 (1949)

- (3) —: Energy Conversions in the Atmosphere on the Scale of the General Circulation. *Tellus* 4, 334 (1952)
- (4) Miller, J.: Energy Equations. *Compendium of Meteorology* Boston 1951, 483.
- (5) Kuo, H. L.: A Note on the Kinetic Energy Balance of the Zonal Wind System. *Tellus* 3, 205 (1951)
- (6) Shih-Kung Kao: The Meridional Transport of Kinetic Energy in the Atmosphere. *J. Meteor.* 10, 352 (1953)
- (7) Spar, J.: Synoptic Studies of the Potential Energy in Cyclons. *J. Meteor.* 7, 48 (1950)
- (8) Čadež, M.: *Impulzna teorija gibanja*. Ljubljana 1945.
- (9) —: O pretvaranju energije u atmosferi (Sur la transformation de l'énergie dans l'atmosphère). *Mem. Serv. Hydrometeor. Yougoslavie* No 2 (1949)
- (10) —: Über die Strömung der inneren und kinetischen Energie in der Atmosphäre. *Gerlands Beitr. Geophys.* 63, 130 (1953)

Preliminary Report on Computation of Trajectories by Means of Electronic Computers

by

Dušan Djurić and Aksel Wiin-Nielsen

Abstract

With the use of recently developed electronic computers it is now possible to compute air trajectories by a systematization of already known methods. Because of the high calculation speed of which these computers are capable, it is possible to work out a large number of trajectories and, in the case of the trajectories computed from the observed data, to obtain a good interpolation between subsequent maps.

The following method, chosen from several possibilities, has been used in such calculations here:

We assume that the wind is horizontal and in every point determined by the corresponding geopotential field of an isobaric surface. In such a wind field we consider the displacement of an arbitrary chosen field. Each point in the field is determined by two coordinates (*a*, *b*). These coordinates are considered as individually conserved during the motion of the air particles. The local change of the coordinates is then expressed by the following formulas:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{a} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{b}. \quad [1]$$

Until now we have used only the geostrophic approximation. In this case the formulas take the following form:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \frac{m^2}{f} \mathbf{j}(\mathbf{a}, \Phi), \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \frac{m^2}{f} \mathbf{j}(\mathbf{b}, \Phi), \quad [2]$$

where *f* is the Coriolis parameter, Φ geopotential and *m* the map magnification factor. The finite difference form of these equations was solved using a grid size $\Delta s = 300$ km on 50° N and the region as large as the one used in the barotropic forecasts made in Stockholm (Bolin (1), Fig. 1). The time step was limited by the criterion for numerical stability.

The initial rectangular coordinates were taken as the individual coordinates. After a certain time (normally 12 h) the computed *a* and *b* fields were plotted on the same map. The isolines of *a* and *b* values were drawn and they showed the final position of the initially rectangular grid. By finding the intersections between the two sets of lines it is easy to find the final position of the particles. With an appropriate density of the isolines it is possible to follow any particle wanted. The trajectory can be found by connecting the initial and final position of the particle. The curvature of the path can be found with good approximation by considering the curvature of the contour lines on the corresponding synoptic maps.

For the use of the formulas [2] it is necessary to know the geopotential field in each time step. The determination of the geopotential field is different in the following two cases:

1. Forecasted trajectories.
2. Diagnostic trajectories.

In the first case the geopotential field is obtained from a numerical forecast. In this only the barotropic model was used. The trajectory computation is made simultaneously with the barotropic forecast. In the barotropic forecast the solution of the equations [2] is included in each time step.

In the second case the geopotential field is obtained by a parabolic interpolation between three subsequent synoptic maps. The following interpolation formula was used:

$$\Phi(t) = \frac{t^2 + t}{2} \Phi_{12} + (1 - t^2) \Phi_0 + \frac{t^2 - t}{2} \Phi_{-12}, \quad [3]$$

where *t* is the time (only between Φ_0 and Φ_{12}) and Φ_{-12} , Φ_0 and Φ_{12} are subsequent geopotential fields.

Using the BESK computer 17 minutes additional time is needed to compute trajectories together with the forecast. The total time needed to compute 12 h trajectories from observed data is ca. 20 minutes.

The isolines drawn for *a* and *b* give a good impression of the deformation field. As a measure of deformation the increase of the circumference of the initial squares was used. These squares were determined by the neighbouring isolines *a* and *b*. This measure should not be used after too long periods, because this would mean too great a space and time smoothing along the trajectories. The increase of the area of the initial squares due to the change in the Coriolis parameter and the map magnification factor with the latitude can be neglected along short trajectories. As expected, the deformation is largest near the hyperbolic points in the contour field, especially if the wind is strong in this region.

A study of deformation can be useful in investigating the effects of the truncation errors in numerical forecasting. In the case of strong deformation, there is a great probability that the truncation errors can be large.

Because of relatively large deformation in the *a* and *b* fields it is necessary to start from a new rectangular grid after each 12 hours.

The computation of trajectories and deformation suffers from the following errors:

1. Errors due to the basic assumptions:
 - 1.1 influence of vertical motion,
 - 1.2 departure from the geostrophic wind.
2. Errors in drawing the *a* and *b* fields.
3. Computational errors:
 - 3.1 truncation errors,
 - 3.2 errors due to the various boundary conditions.

Reference

- (1) Bolin, B.: Numerical Forecasting with the Barotropic Model. *Tellus* 7, 27—49 (1955)

Zusammenfassung

Mit Hilfe kürzlich entwickelter Elektronen-Rechenmaschinen ist es nunmehr möglich, Trajektorien durch Systematisierung von bereits bekannten Methoden zu berechnen. Infolge der hohen Rechengeschwindigkeit dieser Maschinen gelingt es, eine große Anzahl von Trajektorien zu bestimmen und, wenn diese Trajektorien aus beobachteten Daten gewonnen werden, eine gute Interpolation zwischen aufeinanderfolgenden Karten zu erhalten.

Aus verschiedenen Methoden für solche Rechnungen wurde hier die folgende ausgewählt:

Wir nehmen an, daß der Wind horizontal und in jedem Punkt durch das Geopotentialfeld einer isobaren Fläche bestimmt ist. In einem derartigen Windfeld betrachten wir die Verlagerung eines willkürlich gewählten Feldes. Jeder Punkt dieses Feldes wird durch zwei Koordinaten (a , b) bestimmt. Diese Koordinaten werden als konservative Eigenschaft während der Bewegung der Luftteilchen aufgefaßt. Die lokale Änderung dieser Koordinaten wird dann durch die folgenden Formeln ausgedrückt:

$$[1] \quad \frac{\partial a}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla a \quad \frac{\partial b}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla b.$$

Bis jetzt haben wir nur die geostrophische Approximation benutzt. In diesem Falle nehmen die Formeln die Form

$$[2] \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{m^2}{f} J(a, \Phi), \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \frac{m^2}{f} J(b, \Phi)$$

an, wobei f den Coriolisparameter, Φ das Geopotential und m den Verzerrungsfaktor der Kartenprojektion bedeutet. Die Differenzenform dieser Gleichungen wurde durch Benutzung einer Maschenweite $s = 300$ km in 50° N gelöst, in einem Gebiet, welches dem Stockholm barotropen Vorhersagen entspricht (Bolin (1), Fig. 1). Der Zeitschritt war durch das Kriterium für numerische Stabilität begrenzt.

Die kartesischen Koordinaten des Ausgangsfeldes wurden als individuelle Koordinaten (Numerierungskoordinaten) gewählt. Nach Ablauf einer gewissen Zeit (gewöhnlich 12 Std.) wurden die a - und b -Felder auf die gleiche Karte eingetragen. Die Isolinien der a - und b -Werte wurden ausgezogen und zeigten die Endposition des anfänglich rechtwinkeligen Gitters. Durch Bestimmung der Schnittpunkte der beiden Kurvensysteme ist es leicht, die Endposition der Teilchen anzugeben. Bei angemessener Dichte der Isolinien ist es möglich, jedem gewünschten Partikel zu folgen. Die Trajektorie kann durch Verbindung der Anfangs- und Endposition der Partikel gefunden werden. Die Krümmung der Bahn kann in guter Approximation bestimmt werden, wenn man die Krümmung der Isohypsen der zugehörigen synoptischen Karten in Betracht zieht.

Für die Verwendung der Formeln [2] ist es notwendig, das Geopotentialfeld nach jedem Zeitschritt zu kennen. Die Bestimmung des Geopotentialfeldes unterscheidet sich in folgenden beiden Fällen:

1. Prognose-Trajektorien.

2. Diagnose-Trajektorien.

Im ersten Falle wurde das Geopotentialfeld durch eine numerische Vorhersage gewonnen. Hierbei wurde nur das barotrope Modell benutzt. Die Trajektorien-Berechnung wird simultan mit der barotropen Vorhersage durchgeführt. In die barotrope Vorhersage ist die Lösung der Gl. [2] zu jedem Zeitschritt einbegriffen.

Im zweiten Falle wird das Geopotentialfeld durch parabolische Interpolation dreier aufeinanderfolgender synoptischer Karten bestimmt. Die folgende Interpolationsformel wurde benutzt:

$$[3] \quad \Phi(t) = \frac{t^2 + t}{2} \Phi_{12} + (1 - t^2) \Phi_0 + \frac{t^2 - t}{2} \Phi_{-12},$$

worin t die Zeit (nur zwischen Φ_0 und Φ_{12}) und Φ_{-12} , Φ_0 und Φ_{12} die aufeinanderfolgenden Geopotentialfelder bedeuten.

Bei Benutzung der BESK-Rechenmaschine werden nur zusätzlich 17 Minuten benötigt, um die Trajektorien zusammen mit der Vorhersage zu gewinnen. Die Gesamtzeit, um zwölfstündige Trajektorien aus beobachteten Daten zu berechnen, beträgt etwa 20 Minuten.

Die Isolinien für a und b vermitteln eindrucksvoll die Deformation des Feldes. Als Maß der Deformation wurde die Zunahme des Umfanges des anfänglichen Quadrates benutzt. Diese Quadrate wurden aus den benachbarten a - und b -Isolinien bestimmt. Dieses Maß sollte nicht für zu lange Zeitabläufe benutzt werden, da es einer zu großen räumlichen und zeitlichen Glättung entlang der Trajektorien entsprechen würde. Die Zunahme der Fläche der anfänglichen Quadrate, welche auf die Änderung des Coriolisparameters und des Verzerrungsfaktors mit der geostrophischen Breite zurückzuführen ist, kann entlang kurzer Trajektorien vernachlässigt werden. Wie erwartet, ist die Deformation in der Nähe hyperbolischer Punkte des Isohypsenfeldes am größten, besonders, wenn der Wind in diesem Bereich stark ist.

Ein Studium der Deformation kann sich für die Untersuchung des Effekts des Verfahrensfehlers in der numerischen Vorhersage als nützlich erweisen. Im Falle starker Deformation besteht eine große Wahrscheinlichkeit, daß der Verfahrensfehler (truncation error) groß ist.

Wegen der relativ starken Deformation der a - und b -Felder ist es notwendig, nach jeweils 12 Std. mit einem neuen rechtwinkeligen Gitter zu beginnen.

Die Berechnung der Trajektorien und der Deformation krankt an folgenden Fehlern:

1. Fehler infolge der Grundvoraussetzungen:
 - 1.1 Einfluß der Vertikalbewegung,
 - 1.2 Abweichung vom geostrophischen Wind.
2. Fehler beim Zeichnen der a - und b -Felder.
3. Rechenfehler:
 - 3.1 Verfahrensfehler (truncation errors),
 - 3.2 Fehler infolge verschiedener Randbedingungen.

Automation of 500 mb Forecasts through Successive Numerical Map Analyses

by

B o R. D ö ö s

Abstract

During the autumn of 1954 the meteorological section of the Royal Swedish Air Force in cooperation with the Meteorological Institute of the University of Stockholm undertook a series of routine computations of barotropic forecasts. The results of these computations (B o l i n 1955) demonstrated the desirability of making such forecasts over a longer period. For this reason 72 forecasts were computed during December 1954 — May 1955. These routine computations of barotropic forecasts were resumed in the Autumn of 1955. In the computations the analysis of the 500 mb surface was also computed numerically. The method of analysis has been presented previously (B e r g t h o r s s o n - D ö ö s (1)).

References

- (1) Bergthorsson, P, and Döös, B. R.: Numerical weather map analysis. *Tellus* 7, 329—340 (1955)
- (2) Döös, B. R.: Automation of 500 mb Forecasts through Successive Numerical Map Analyses. *Tellus* 8, 76—81 (1956)

Zusammenfassung

Während des Herbstes 1954 wurden von der Meteorologischen Abteilung der Königlich-Schwedischen Luftwaffe in Zusammenarbeit mit dem Meteorologischen Institut der Universität Stockholm eine Reihe von barotropen Routine-Vorhersagen berechnet. Die Ergebnisse dieser Berechnungen (B o l i n 1955) ließen es wünschenswert erscheinen, diese Vorhersagen während einer längeren Periode durchzuführen. Aus diesem Grunde wurden 72 Vorhersagen von Dezember 1954 bis Mai 1955 berechnet. Diese Routine-Vorhersagen mit dem barotropen Modell wurden im Herbst 1955 wieder aufgenommen. Auch die Analyse der 500-mb-Fläche wurde numerisch durchgeführt. Die Analysen-Methode wurde kürzlich beschrieben (B e r g t h o r s s o n — D ö ö s).

Vergleich verschiedener dreidimensionaler Modelle der Atmosphäre mittels Lösungen linearisierter Gleichungen

von

Winhart Edelmann

(mit 1 Abbildung und 2 Tabellen im Text)

1. Grundgleichungen und Annahmen der einzelnen Modelle

Es ist das Ziel der theoretischen Meteorologie, eine möglichst gute Beschreibung der atmosphärischen Prozesse auf mathematisch-physikalischer Grundlage zu finden und diese dann praktisch anzuwenden auf das Problem der numerischen Wettervorhersage. Um diesem Ziel näher zu kommen, sind in den letzten Jahren einige Modelle geschaffen worden, welche von der geostrophischen Approximation des Windes keinen Gebrauch mehr machen. In diesem Vortrag soll versucht

werden, die verschiedenen Modelle zu vergleichen und dabei möglichst einige charakteristische Unterschiede zu erkennen. Dabei sollen ausschließlich nur die linearisierten Modellgleichungen betrachtet werden. Über den Einfluß der nichtlinearen Terme wissen wir bisher nur wenig.

Zunächst betrachten wir die Grundgleichungen und Annahmen der einzelnen dreidimensionalen Modelle der Atmosphäre, welche symbolisch in Tabelle 1 zusammengestellt sind:

Tab. 1

3-dimensionale Modelle.

Modelle	Wind	Grundgleichungen			Anfangsfelder	Lärmwellen
geostroph. Advektionsmodell ($\sigma \equiv 0$)	\mathfrak{V}_g	V	—	0	Φ	—
geostroph. Modell mit Stabilität	\mathfrak{V}_g	V	—	$\sigma\omega$	Φ	—
Modell mit geostroph. Stromfunktion	\mathfrak{V}_h	V	—	$\sigma\omega$	Φ	—
Thompson-Modell	\mathfrak{V}_n	V	B	$\sigma\omega$	Φ	—
nichtgeostroph. Advektionsmod. ($\sigma \equiv 0$)	\mathfrak{V}_n	V	D	σ	Φ, ω, ω_t	T
Lärm-Modell	\mathfrak{V}_n	V	D	$\sigma\omega$	Φ, ω, ω_t	T, $i\sigma$
Hollmann-Modell	\mathfrak{V}_n	V	D	$\sigma(1 + \frac{Q^2}{f^2})\omega$	Φ, ω, ω_t	T
ω^* -Modell	\mathfrak{V}_n	V	D	$\sigma\omega^*$	Φ, ω, ω_t	T

$\mathfrak{V}_g = \frac{1}{f} \mathfrak{f} \times \nabla \Phi$	V = Vorticitygleichung	$\sigma = \Phi_{pp} + \frac{1}{\kappa p} \Phi_p =$ statische Stabilität
$\mathfrak{V}_h = \frac{1}{f} \mathfrak{f} \times \nabla \Phi + \nabla \chi$	D = Divergenzgleichung	$Q = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{V} \cdot \nabla$
$\mathfrak{V}_n = \mathfrak{f} \times \nabla \psi + \nabla \chi$	B = Balance-equation	T = Trägheitswellen
$\Phi_{pt} + \mathfrak{V} \cdot \nabla \Phi_p + \sigma\omega = 0$ (Adiabatengleichung)		$i\sigma =$ interne Gravitationswellen

Die geostrophischen Modelle (ohne und mit Stabilität) benutzen natürlich den geostrophischen Wind $\mathfrak{V}_g = \frac{1}{f} \mathfrak{f} \times \nabla \Phi$. Das Modell mit der geostrophisch approximierten Stromfunktion läßt außerdem noch divergente Windkomponenten zu: $\mathfrak{V}_h = \frac{1}{f} \mathfrak{f} \times \nabla \Phi + \nabla \chi$. Die restlichen Modelle machen Gebrauch von einem ganz allgemeinen nichtgeostrophischen Wind $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{f} \times \nabla \psi + \nabla \chi$.

Sämtliche Modelle verwenden die Vorticitygleichung (V); die vier letzten in Tabelle 1 benutzen außerdem die vollständige Divergenzgleichung (D); das Thompson-Modell schließlich rechnet mit der „balance equation“ (B), welche aus der Divergenzgleichung durch Vereinfachungen hervorgeht.

Bezüglich des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik bzw. der Adiabatengleichung $\Phi_{pt} + \mathfrak{V} \cdot \nabla \Phi_p + \sigma\omega = 0$

gibt es bemerkenswerte Unterschiede. An Stelle der exakt gültigen Stabilität $\sigma = \Phi_{pp} + \frac{1}{\kappa p} \Phi_p$ arbeiten die Advektionsmodelle mit der Stabilität $\sigma \equiv 0$. Bei den beiden letzten Modellen der Tabelle 1 wird der Term $\sigma\omega$ abgeändert: Es wird eine Größe $\sigma \frac{Q^2}{f} \omega$ (nach G. Hollmann) bzw. $\sigma(\omega^* - \omega)$ (nach K. Hinkelmann) hinzuaddiert. Dies bedeutet physikalisch, daß man fiktive, d. h. in Wirklichkeit nicht vorhandene Wärmequellen annimmt. (Dabei ist Q der Operator $Q = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{B} \cdot \nabla$, und ω^* ist eine von ω verschiedene Vertikalgeschwindigkeit, welche aus einer 4. Gleichung berechnet werden muß. Diese gewinnt man, indem man aus der geostrophischen approximierten Vorticitygleichung und der Adiabatangleichung die Größe Φ_t eliminiert.) Man kann zeigen, daß durch die Annahme jener fiktiven Wärmequellen die internen Gravitationswellen (iG), welche das Lärm-Modell beschreibt, ausgefiltert werden. Wir kommen darauf später noch zurück.

Bei den ersten 4 Modellen genügt die Kenntnis eines einzigen Anfangsfeldes (Φ z. Zt. $t = 0$), um die ver-

schiedenen Felder zu einem späteren Zeitpunkt zu berechnen. Sie sind frei von jeder Art von meteorologischem Lärm. — Bei den letzten 4 Modellen dagegen ist die Kenntnis dreier Anfangsfelder (Φ , ω , ω_t zur Zeit $t = 0$) erforderlich, um den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt eindeutig zu bestimmen. Sie beschreiben auch Trägheitswellen (T), das Lärm-Modell außerdem noch interne Gravitationswellen. Die externen Gravitationswellen werden bekanntlich ausgefiltert durch die Verwendung der unteren Randbedingung $\omega|_{p=p_0} = 0$, welche gleichwertig ist mit $\int_0^{p_0} \nabla \cdot \mathfrak{B} dp = 0$. Darauf wollen wir jetzt nicht näher eingehen.

Wie man sofort erkennt, gehen mit dem Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$ das Lärm-, Hollmann- und ω^* -Modell ins nichtgeostrophische Advektionsmodell über.

Nun wollen wir die linearisierten Gleichungen dieser Modelle betrachten. Wir nehmen einen stationären, zonalen Grundstrom an und überlagern diesem eine kleine Störung. Für die Störgrößen erhält man die in Tabelle 2 zusammengestellten Differentialgleichungen:

Tab. 2

Die linearisierten Modellgleichungen

Vorticitygleichung:	$Q \zeta = f \omega_p$
Divergenzgleichung:	$-Q \omega_p + \bar{u}_p \omega_x = f(\zeta - \zeta^*)$
Balance-equation:	$\zeta = \zeta^*$
Adiabatangleichung:	$0 = Q \zeta_p^* - \bar{u}_p \zeta_x + \begin{cases} 0 & \text{(Advektionsmodell)} \\ \frac{1}{f} \nabla^2 (\bar{\sigma} \omega) & \text{(Hollmann-Modell)} \\ \frac{1}{f} \nabla^2 (\bar{\sigma} [1 + \frac{Q^2}{f^2}] \omega) & \text{(Hollmann-Modell)} \\ \frac{1}{f} \nabla^2 (\bar{\sigma} \omega^*) & \text{(\omega^*-Modell)} \end{cases}$
ω^* - Gleichung:	$\omega^*_{pp} + \frac{1}{f^2} \nabla^2 (\bar{\sigma} \omega^*) = \frac{2}{f} \bar{u}_p \zeta_x^*$

Dabei ist $\bar{\sigma}$ die statische Stabilität des Grundzustandes und $\zeta = f \cdot \nabla \times \mathfrak{B}$ die Vorticity. Zur Abkürzung benutzen wir den Operator $Q = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}$ und die Bezeichnung $\zeta^* = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi$. Bei geostrophischer Approximation des Windes ist also $\zeta = \zeta^*$. Der Einfachheit halber benutzen wir einen konstanten Coriolisparameter $f = \text{const.}$. Falls die Grundströmung baroklin ist ($u(p) \neq \text{const.}$), soll die Störung nicht von y abhängen. — Man erkennt sofort: Unter den eben genannten Voraussetzungen besitzen das Thompson-Modell und das Modell mit der geostrophischen Stromfunktion dieselben linearisierten Gleichungen wie das geostrophische Modell. Wir brauchen sie daher nicht weiter zu betrachten. Dagegen unterscheiden sich die letzten 4 Modelle ganz wesentlich vom geostrophischen. Dieser Unterschied soll jetzt an Hand von Lösungen der linearisierten Gleichungen studiert werden.

2. Lösungen für barotrope Grundströmung

Zuerst beschäftigen wir uns mit dem einfachsten Fall, einer barotropen Grundströmung: $\bar{u} = \text{const.}$ oder $\bar{u}_p = 0$.

Hier lassen sich geschlossene Lösungen in Hülle und

Fülle finden. Es interessieren nur solche, die für ω die obere und untere Randbedingungen erfüllen: $\omega|_{p=0} = 0$, $\omega|_{p=p_0} = 0$.

Für das geostrophische Advektionsmodell kann man sofort die allgemeinste Lösung angeben:

$$\zeta = G(x - \bar{u}t, y, p) \\ \omega = 0$$

Dabei ist G eine völlig willkürliche Funktion von 3 Argumenten. Die Bedeutung dieser Lösung ist leicht zu erkennen: Eine irgendwie geformte Störung des Druckfeldes oder des geostrophischen Windfeldes bewegt sich mit der Geschwindigkeit der Grundströmung \bar{u} fort, ohne dabei ihre Form zu ändern. Die Vertikalgeschwindigkeit ω nimmt auf keinen Fall an der Störung teil.

Für das geostrophische Modell mit Stabilität erhält man genau die gleiche Lösungsmannigfaltigkeit, wenn man zusätzlich fordert, daß ω auch auf den seitlichen Wänden eines endlichen Integrationsgebietes verschwindet, oder periodisch in x und y ist, oder in unendlicher Entfernung endlich bleiben soll.

Man kann auch für das nichtgeostrophische Advektionsmodell die allgemeinste Lösung angeben. Nach einiger Rechnung findet man

$$\zeta^* = N_1(x - \bar{u}t, y, p)$$

$$\omega = \cos ft \left\{ N_2(x - \bar{u}t, y, p) + \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) N_2(x - \bar{u}t, y, 0) - \frac{p}{p_0} N_2(x - \bar{u}t, y, p_0) \right\}$$

$$+ \sin ft \left\{ N_3(x - \bar{u}t, y, p) + \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) N_3(x - \bar{u}t, y, 0) - \frac{p}{p_0} N_3(x - \bar{u}t, y, p_0) \right\}$$

$$\zeta = N_1(x - \bar{u}t, y, p)$$

$$+ \sin ft \left\{ \frac{\partial}{\partial p} N_2(x - \bar{u}t, y, p) + \frac{1}{p_0} [N_2(x - \bar{u}t, y, 0) - N_2(x - \bar{u}t, y, p_0)] \right\}$$

$$- \cos ft \left\{ \frac{\partial}{\partial p} N_3(x - \bar{u}t, y, p) + \frac{1}{p_0} [N_3(x - \bar{u}t, y, 0) - N_3(x - \bar{u}t, y, p_0)] \right\}$$

Dabei sind N_1, N_2, N_3 völlig willkürliche Funktionen von 3 Argumenten. Die Bedeutung auch dieser Lösung ist leicht zu erkennen. Eine irgendwie geformte Störung N_1 des Druckfeldes (ζ^*) bewegt sich mit der Geschwindigkeit \bar{u} der Grundströmung, ohne dabei ihre Form zu ändern. Das Windfeld (ζ) zeigt genau die entsprechende Störung, so als ob der Wind geostrophisch wäre. Das Vertikalgeschwindigkeitsfeld (ω) wird durch die Störung N_1 überhaupt nicht beeinflusst. Dies alles entspricht genau dem geostrophischen Modell. — Interessant ist die Tatsache, daß ω und ζ weitere Störungen N_2, N_3 zeigen, an welchen das Druckfeld (ζ^*) nicht teilnimmt. Sie bewegen sich ebenfalls mit der Geschwindigkeit \bar{u} . Ihre Intensität schwingt aber (wegen der Faktoren $\cos ft, \sin ft$) mit der Periode eines „Pendeltages“. Das sind reine Trägheitsschwingungen!

Das Wesen der Trägheitsschwingungen kann man sehr schön studieren, indem man die Geschwindigkeitskomponenten u, v ausrechnet und einfache spezielle Funktionen für N_2, N_3 wählt. Man findet, daß jedes einzelne Luftteilchen (außer der geostrophisch bedingten Bewegung) zusätzlich auf einem mehr oder weniger großen Trägheitskreis umläuft. Die Vertikalbewe-

gungen stellen sich dabei so ein, daß immer gerade die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Diejenigen Lösungen, welche keine Trägheitswellen zeigen, stimmen mit der geostrophischen Lösung überein. Das gilt nebenbei nur für eine barotrope Grundströmung. Wir werden später an einem Beispiel sehen, daß eine trägheitswellenfreie Lösung bei barokliner Grundströmung von der geostrophischen Lösung abweicht.

Für das Hollmann-Modell und das ω^* -Modell erhält man die gleiche Lösungsmannigfaltigkeit wie für das nichtgeostrophische Advektionsmodell, wenn man zusätzlich fordert, daß ω bzw. auch ω^* periodisch in x und y sein soll, oder in unendlicher Entfernung endlich bleiben soll. Die Annahme der „fiktiven Wärmequellen“ im 1. Hauptsatz bewirkt gerade, daß der Einfluß der Stabilität bei barotroper Grundströmung völlig herausfällt.

Bei dem Lärm-Modell gelingt es nicht mehr, die allgemeine Lösung in geschlossener Form darzustellen. Der Einfluß der Stabilität macht sich bemerkbar. Durch Fourier-Ansatz findet man im Fall konstanter Stabilität $\bar{\sigma} = s^2$:

$$\nabla^2 \Phi = f \zeta^* = \sum_{\mu} \sum_{\varrho} \sum_{\nu} \frac{s^2 (\varrho^2 K^2 + \nu^2 l^2) p_0^2}{\mu^2 \pi^2} a_{\mu \varrho \nu} \cdot \cos \frac{\mu \pi}{p_0} p \cdot \cos \varrho K (x - \bar{u}t) \cdot \cos \nu l y \cdot \cos \sqrt{f^2 + \frac{s^2 (\varrho^2 K^2 + \nu^2 l^2) p_0^2}{\mu^2 \pi^2}} t$$

+ ähnliche Ausdrücke mit $\sin \dots \dots \sin \dots \dots \sin \dots \dots$
+ $f L(x - \bar{u}t, y, p)$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \sum_{\mu} \sum_{\varrho} \sum_{\nu} \sqrt{f^2 + \frac{s^2 (\varrho^2 K^2 + \nu^2 l^2) p_0^2}{\mu^2 \pi^2}} a_{\mu \varrho \nu} \cos \frac{\mu \pi}{p_0} p \cdot \cos \varrho K (x - \bar{u}t) \cdot \cos \nu l y \sin \sqrt{f^2 + \frac{s^2 (\varrho^2 K^2 + \nu^2 l^2) p_0^2}{\mu^2 \pi^2}} t$$

+ ähnliche Ausdrücke mit $\sin \dots \dots \sin \dots \dots \cos \dots \dots$

$$\zeta = \sum_{\mu} \sum_{\varrho} \sum_{\nu} - f a_{\mu \varrho \nu} \cos \frac{\mu \pi}{p_0} p_0 \cos \varrho K (x - \bar{u}t) \cdot \cos \nu l y \cdot \cos \sqrt{f^2 + \frac{s^2 (\varrho^2 K^2 + \nu^2 l^2) p_0^2}{\mu^2 \pi^2}} t$$

+ ähnliche Ausdrücke mit $\sin \dots \dots \sin \dots \dots \sin \dots \dots$
+ $L(x - \bar{u}t, y, p)$

Dabei ist L wieder eine völlig willkürliche Funktion ihrer 3 Argumente. Sie stellt, ähnlich wie vorhin, den geostrophischen Anteil der Lösung dar. Hinzu kommen aber noch andere Lösungen, welche von den ∞^3 willkürlichen Konstanten $a_{\mu \varrho \nu}, \dots$ abhängen. Diese Lösungen sind Schwingungen, wie man an den Faktoren $\cos \sqrt{f^2 + \frac{s^2 (\varrho^2 K^2 + \nu^2 l^2) p_0^2}{\mu^2 \pi^2}} t$ sofort erkennt. Im Grenzfall $s \rightarrow 0$ sind es reine Trägheitswellen; wir erhalten dann die gleiche Lösung wie beim nichtgeostrophischen Advektionsmodell. Im allgemeinen Fall $s \neq 0$ erscheinen die Trägheitswellen gekoppelt mit sogenannten internen Gravitationswellen. Die Schwingungen sind um

so rascher, je größer die Stabilität s^2 ist, je kleinräumiger die horizontale Ausdehnung der Störung ist (große ϱ und ν), und je größer die vertikale Ausdehnung der Störung ist (kleine μ). — Das Wesen und den Mechanismus der internen Gravitationswellen kann man sehr schön am Grenzfall $f = 0$ studieren, weil sie dann nicht mit Trägheitswellen vermischt auftreten. — Die mitunter als Wogenwolken sichtbar werdenden Schwingungen in der freien Atmosphäre lassen sich leicht als interne Gravitationswellen deuten. Ihre Phasengeschwindigkeit ist praktisch fast der Grundströmung \bar{u} gleich. Bei einer Wellenlänge von einigen Tausend Kilometern dagegen hat die Phasengeschwindig-

keit die Größenordnung von 100 m/sec. — Leider können wir jetzt nicht länger bei der Diskussion der Lösungen für die barotrope Grundströmung $\bar{u} = \text{const.}$ verweilen.

3. Geschlossene Lösungen für barokline Grundströmung

Nun wollen wir Störungen in einer baroklinen Grundströmung $\bar{u}(p) \neq \text{const.}$ betrachten. Hier fängt jetzt der große Jammer an! Wir haben nicht mehr Differentialgleichungen mit konstanten, sondern mit variablen Koeffizienten zu lösen. Das bedeutet, daß es ziemlich aussichtslos ist, zu allgemeinen zeitabhängigen

Integralen zu gelangen. Der Einfachheit halber wollen wir ein lineares Geschwindigkeitsprofil $\bar{u} = a + bp$ annehmen und voraussetzen, daß die Störgrößen nur von x, p, t , nicht aber von y abhängen mögen. Selbst für diesen einfachen Fall kennen wir bisher keine geschlossenen Lösungen für das Lärm-, Hollmann- und ω^* -Modell. Nur für das geostrophische Modell und das nichtgeostrophische Advektionsmodell sind ganz spezielle zeitabhängige Integrale bekannt. Diese wollen wir zunächst etwas genauer ansehen.

Für das geostrophische Advektionsmodell findet man die Lösung

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \beta K t \cos K(x - \bar{u}t) \\ &\quad - \sin \beta K t \sin K(x - \bar{u}t) \frac{u - \bar{u}}{\beta} \\ \omega &= \cos \beta K t \sin K(x - \bar{u}t) \cdot \frac{K}{f u_p} [(u^0 - \bar{u})^2 - (u - \bar{u})^2] \\ &\quad + \sin \beta K t \cos K(x - \bar{u}t) \cdot \frac{K}{f u_p \beta} [\beta^2 (u - u^0) + \frac{1}{3} (u^0 - \bar{u})^2 - \frac{1}{3} (u - \bar{u})^2] \end{aligned}$$

$$\text{Dabei ist } \bar{u} = \frac{1}{p^0} \int_0^{p_0} \bar{u} dp,$$

$$u^0 = \bar{u}(0), \quad u_0 = \bar{u}(p_0), \quad \Delta \bar{u} = u^0 - u_0$$

$$\beta = \frac{\Delta \bar{u}}{\sqrt{12}}$$

Diese Lösung stellt eine rein sinusförmige Welle dar, welche (wegen der Linearität der Gleichungen) zu allen Zeiten rein sinusförmige Gestalt behält, und welche mit der Geschwindigkeit \bar{u} der mittleren Grundströmung wandert. Als wesentliche Eigenschaft dieser baroklinen Wellenlösung kommt hinzu, daß sich ihre Amplitude im Laufe der Zeit ändert, im Gegensatz zu den Lösungen in barotroper Grundströmung! Der Faktor

$\cos \beta k t$ oder $\sin \beta k t$ bzw. die Größe $\beta k = \frac{k \Delta \bar{u}}{\sqrt{12}}$ ist ein Maß für die zeitliche Amplitudenänderung oder „Ent-

wicklung“ der Störung. Die Entwicklung der Störung wird Null für barotrope Grundströmung ($\Delta \bar{u} = 0$). Sie ist umso größer, je barokliner die Grundströmung ist, d. h. je größer $\Delta \bar{u}$ ist. Kurze Wellen (k groß) zeigen stärkere Entwicklung als lange Wellen (k klein). Im Grenzfall sehr kurzer Wellen kommt es zur sogenannten „Ultraviolett-Katastrophe“, d. h. zu unbegrenzt rascher Entwicklung.

Wie sieht nun die Lösung für das nichtgeostrophische Advektionsmodell aus? Man findet nach ziemlich mühsamer Rechnung:

$$\begin{aligned} \xi^* &= \cos \alpha K t \cos K(x - \bar{u}t) \left[\frac{\alpha K}{f} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha^2 + (u - \bar{u})^2 - \frac{f^2}{K^2}}{2 f \alpha} - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha^2 + (u^0 - \bar{u})^2 - \frac{f^2}{K^2}}{2 f \alpha} \right] \\ &\quad + \sin \alpha K t \sin K(x - \bar{u}t) \left[\frac{K}{f} (\bar{u} - u^0) + \frac{1}{4} \ln \frac{(u - \bar{u} - \frac{f}{K})^2 + \alpha^2}{(u - \bar{u} + \frac{f}{K})^2 + \alpha^2} - \frac{1}{4} \ln \frac{(u^0 - \bar{u} - \frac{f}{K})^2 + \alpha^2}{(u^0 - \bar{u} + \frac{f}{K})^2 + \alpha^2} \right] \\ \xi &= \cos \alpha K t \cos K(x - \bar{u}t) \left[\frac{\alpha f}{K} \cdot \frac{(u - \bar{u})^2 + \alpha^2 + \frac{f^2}{K^2}}{[(u - \bar{u})^2 - \alpha^2 - \frac{f^2}{K^2}]^2 + 4 \alpha^2 (u - \bar{u})^2} \right] \\ &\quad + \sin \alpha K t \sin K(x - \bar{u}t) \left[\frac{(u - \bar{u}) f}{K} \cdot \frac{(u - \bar{u})^2 + \alpha^2 - \frac{f^2}{K^2}}{[(u - \bar{u})^2 - \alpha^2 - \frac{f^2}{K^2}]^2 + 4 \alpha^2 (u - \bar{u})^2} \right] \\ \omega &= \cos \alpha K t \sin K(x - \bar{u}t) \left[\frac{f}{2 K u_p} \left\{ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha^2 + (u - \bar{u})^2 - \frac{f^2}{K^2}}{2 f \alpha} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha^2 + (u^0 - \bar{u})^2 - \frac{f^2}{K^2}}{2 f \alpha} \right\} \right] \\ &\quad + \sin \alpha K t \cos K(x - \bar{u}t) \left[\frac{u - u^0}{u_p} + \frac{f}{4 K u_p} \left\{ \ln \frac{(u - \bar{u} - \frac{f}{K})^2 + \alpha^2}{(u - \bar{u} + \frac{f}{K})^2 + \alpha^2} - \ln \frac{(u^0 - \bar{u} - \frac{f}{K})^2 + \alpha^2}{(u^0 - \bar{u} + \frac{f}{K})^2 + \alpha^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Dabei ist } \alpha K = f \sqrt{-\frac{1}{4} \xi^2 - 1 + \frac{\xi}{T_g \xi}}$$

$$\xi = \frac{K}{f} \Delta \bar{u}$$

Diese Lösung ist wieder eine zu allen Zeiten rein sinusförmige Welle mit der Wellenlänge $L = \frac{2\pi}{k}$, welche mit der Geschwindigkeit der mittleren Grundströmung \bar{u} wandert. Sie hat die gleiche Bauart wie die Lösung für das geostrophische Advektionsmodell (siehe oben). Nur die Abhängigkeit von der p-Koordinate ist hier sehr viel verwickelter. Doch das soll uns jetzt nicht weiter interessieren.

Es fällt auf, daß diese spezielle nichtgeostrophische Lösung keine Trägheitsschwingungen beschreibt. (Es treten nämlich keine Faktoren mit $\cos ft$ oder $\sin ft$ auf.) Im Falle einer barotropen Grundströmung stimmen solche schwingungsfreien Lösungen immer mit Lösungen des geostrophischen Modells überein. Das ist hier anders:

Für die Entwicklung der Störung sind jetzt die Faktoren $\text{Cos } \alpha k t$, $\text{Sin } \alpha k t$ bzw. die Größe

$$\alpha k = f \cdot \sqrt{-\frac{1}{4} \left(\frac{k \Delta \bar{u}}{f}\right)^2 - 1 + \frac{k}{f} \frac{\Delta \bar{u}}{\text{Tg} \frac{k}{f} \Delta \bar{u}}}$$

verantwortlich. Sie unterscheidet sich in ganz bemerkenswerter Weise von der entsprechenden Größe βk des geostrophischen Modells (vgl. Abb. 1).

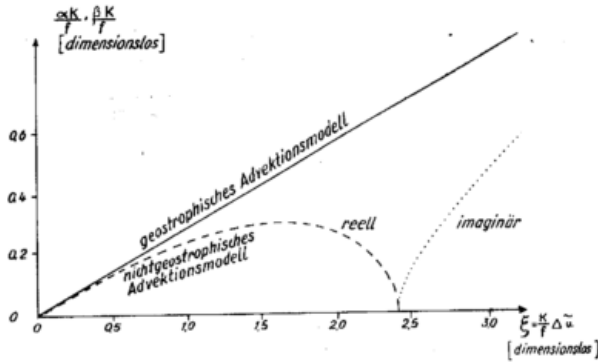


Abb. 1
Die Entwicklungsgrößen αk , βk , in Abhängigkeit von $\Delta \bar{u}$, k und f .

Entwickelt man αk bei festem k und f für kleine $\Delta \bar{u}$ in einer Reihe, so erhält man

$$\alpha k = \frac{k \Delta \bar{u}}{\sqrt{12}} \left(1 - \frac{2}{15} \frac{k^2}{f^2} \Delta \bar{u}^2 \dots\right)$$

Daraus folgt: Je größer die Baroklinität $\Delta \bar{u}$ der Grundströmung ist, umso mehr bleibt die nichtgeostrophische Entwicklung hinter der geostrophischen zurück. Für $\Delta \bar{u} \approx 1,6 \frac{f}{k}$ erreicht die Entwicklung ein Maximum; bei noch größerer Baroklinität nimmt sie wieder ab und verschwindet vollkommen für $\Delta \bar{u} \geq 2,4 \frac{f}{k}$. Der Radikand $-\frac{1}{4} \xi^2 - 1 + \frac{\xi}{\text{Tg} \xi}$ wird dann negativ, und die Welle wandert ohne Amplitudenänderung mit der Phasengeschwindigkeit $c = \bar{u} \pm |\alpha|$. Im Grenzfall sehr großer $\Delta \bar{u}$ wird $|\alpha| = \frac{1}{2} |\Delta \bar{u}|$.

Nun betrachten wir die Größe αk bei festem $\Delta \bar{u}$ und f . Für $k = 0$ (unendlich lange Wellen) findet keine Entwicklung statt. Je größer k wird (je kleiner also die Wellenlänge wird), desto stärker wird auch die Entwicklung. Aber es tritt keine Ultraviolett-Katastrophe auf, wie beim geostrophischen Modell, sondern es existiert eine Wellenlänge mit maximaler Entwicklung bei etwa $k \approx 1,6 \frac{f}{\Delta \bar{u}}$, d. h. $L \approx \frac{2\pi \Delta \bar{u}}{1,6 f}$. Kürzere Wellen haben wieder schwächere Entwicklung, solche mit

$L \geq \frac{2\pi \Delta \bar{u}}{2,4 f}$ zeigen überhaupt keine Entwicklung mehr.

Ist bei einer Störung zur Zeit $t = 0$ ein Gemisch verschiedener langer Wellen vorhanden, so wird nach hinreichend langer Zeit die Störkomponente mit der Wellenlänge maximaler Entwicklung dominieren und die anderen Wellenlängen völlig überwuchern!

Zuletzt betrachten wir noch die Abhängigkeit der Entwicklungsgröße αk vom Coriolisparameter f : Je kleiner f ist, desto größer ist bei gleicher Baroklinität $\Delta \bar{u}$ des Grundstroms die Wellenlänge maximaler Entwicklung, und desto kleiner ist der Betrag des Maximums von αk . Grob gesprochen: Bei gleicher Baroklinität der Grundströmung entwickeln sich in den südlichen Breiten längere Wellen als in den nördlichen Breiten; die Entwicklung geht in den Subtropen langsamer vor sich, als in den Polargegenden!

Auch für das geostrophische Modell mit konstanter Stabilität $\bar{\sigma} = s^2$ kann man noch geschlossene Lösungen finden. Sie zeigen eine merkwürdige Analogie zur Lösung des nichtgeostrophischen Advektionsmodells. Sie haben die Form

$$\zeta = \text{Cos } \gamma k t \cdot \text{cos } k (x - \bar{u}t) \cdot F(p) \dots$$

Dabei ist die Entwicklungsgröße

$$\gamma k = f \cdot \xi \cdot \frac{1}{\eta} \sqrt{-\frac{1}{4} \eta^2 - 1 + \frac{\eta}{\text{Tg} \eta}} \quad \text{mit } \xi = \frac{k \Delta \bar{u}}{f}, \quad \eta = \frac{k s p_0}{f}$$

Der Faktor $\frac{1}{\eta} \sqrt{-\frac{1}{4} \eta^2 - 1 + \frac{\eta}{\text{Tg} \eta}}$ ist $= \frac{1}{\sqrt{12}}$ für $\eta = s = 0$ und nimmt monoton ab für zunehmende Stabilität s . Daraus folgt: Je größer die Stabilität s ist, umso stärker wird die Entwicklung der Störung abgebremst im Vergleich zum Advektionsmodell. Überschreitet die Stabilität eine gewisse Schranke $s \approx \frac{2,4 f}{k p_0}$, so wird der Faktor $\frac{1}{\eta} \sqrt{-\frac{1}{4} \eta^2 - 1 + \frac{\eta}{\text{Tg} \eta}}$ imaginär; es findet überhaupt keine Entwicklung mehr statt.

Auch hier gibt es keine „Ultraviolett-Katastrophe“ mehr. Bei konstantem $\Delta \bar{u}$, s , f und abnehmender Wellenlänge, also wachsendem k erreicht die Entwicklung ein Maximum bei $k \approx \frac{1,6 f}{s p_0}$ und verschwindet vollkommen für Wellenzahlen $k \geq \frac{2,4 f}{s p_0}$. Aus einem willkürlichen Störungsgemisch zur Zeit $t = 0$ wird nach einiger Entwicklungszeit stets die Wellenlänge $L \geq \frac{2\pi s p_0}{1,6 f}$ dominieren. — Auch die Abhängigkeit vom Coriolisparameter ist die gleiche wie beim nichtgeostrophischen Advektionsmodell.

Für die 3 nichtgeostrophischen Modelle mit Stabilität (Lärm-, Hollmann- und ω^* -Modell) darf man vermuten, daß sich die entwicklungs-dämpfenden Einflüsse von nichtgeostrophischem Wind und Stabilität irgendwie zusammensetzen, sei es additiv, multiplikativ oder sonst irgendwie. Man darf weiter vermuten, daß es für jede Stabilität $\bar{\sigma}$ und jede Baroklinität $\Delta \bar{u}$ des Grundfeldes eine bevorzugte Wellenlänge mit maximaler Entwicklung gibt. Diese Vermutungen konnten bisher leider nicht direkt bewiesen werden. Es ist noch nicht gelungen, einen exakten Ausdruck für die Entwicklungsgröße zu finden; es besteht wenig Hoffnung, daß die ziemlich verwickelten Differentialgleichungen überhaupt Lösungen besitzen, die durch elementare Funktionen darstellbar sind. Man kann auch nichts exaktes über die charakteristischen Unterschiede der Entwicklungsgröße zwischen Lärm-, Hollmann- und ω^* -Modell aussagen.

4. Näherungslösungen für barokline Grundströmung

Will man trotzdem etwas über die nichtgeostrophischen Modelle mit Stabilität erfahren, so muß man mit

einem Notbehelf zufrieden sein. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Die Differentialgleichungen in der Variablen p, die man zur Aufstellung der sogenannten Frequenzgleichung zu lösen hat, werden durch Differenzgleichungen approximiert. Diese lassen sich leichter lösen, da sie konstante Koeffizienten haben. Man benutzt also anstelle der dreidimensionalen Modelle eine Näherung etwa durch Zwei- oder Dreischichtenmodelle. Das Ergebnis sind geschlossene Wellenlösungen von der Form $\zeta = \text{Cos } \delta kt \cdot \text{cos } k(x - \bar{u}t) \dots$ usw., welche aber wegen Verwendung des Differenzenverfahrens mit einem sogenannten „Truncation Error“ behaftet sind. Diesbezügliche Untersuchungen sollen in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden.

2. Man wählt sich einen beliebigen, möglichst einfachen Anfangszustand der Atmosphäre, etwa

$$\zeta^*|_{t=0} = A \text{ cos } kx, \sigma(p) = \frac{\alpha^2}{p^2},$$

und berechnet dann, für jedes Modell einzeln, die aufeinanderfolgenden Tendenzen

$$\zeta^*_{t_1}, \zeta^*_{t_2}, \zeta^*_{t_3}, \dots, \omega, \omega_{t_1}, \omega_{t_2}, \dots$$

zur Zeit $t = 0$. Das ist ohne Schwierigkeit möglich, und die Resultate sind exakt gültig. Die einzelnen Tendenzen werden dann zu einer zeitlichen Taylor-Entwicklung zusammengesetzt, etwa

$$\zeta(t) = \zeta(0) + \frac{t}{1!} \zeta^*_{t_1}(0) + \frac{t^2}{2!} \zeta^*_{t_2}(0) + \frac{t^3}{3!} \zeta^*_{t_3}(0) + \dots$$

Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß ihre Lösungen exakt gelten und nicht mit einem räumlichen „Truncation Error“ behaftet sind. Nachteilig ist einmal der ganz unheimliche Rechenaufwand, welcher notwendig ist, um alle Größen bis zur 4. oder 5. zeitlichen Ableitung auszurechnen. Größer noch ist der Nachteil, daß man diese Lösungen nicht für beliebig entfernte Zeitpunkte benutzen kann, sondern wegen der Konvergenz der Taylor-Reihe brauchbare Aussagen gerade nur für die allerersten Stunden der Entwicklung erhält (sofern

man nicht etliche Zeitschritte hintereinander ausführen will). Ein weiterer Nachteil ist die Tatsache, daß solchen Rechnungen stets der Makel des speziellen Beispiels anhaftet, welchem keine allgemeine Bedeutung zukommen braucht. Endlich tritt beim Vergleich der Ergebnisse erschwerend hinzu, daß man bei den nicht-geostrophischen Modellen nicht weiß, welcher Anteil der berechneten Entwicklung nun zur tatsächlichen Entwicklung über längere Zeiträume (d. h. zum Trend) zu rechnen ist, und welchen Anteil man gewissermaßen nur als scheinbare Entwicklung zu betrachten hat, die nur durch das Entstehen von Trägheits- oder internen Gravitationswellen vorgetäuscht wird.

Trotz all dieser Nachteile ist einmal mit unendlicher Mühe und Geduld unserer Rechnerinnen ein solches Beispiel durchgerechnet worden. Ohne auf die einzelnen Schritte der zwar elementaren, aber äußerst langwierigen Rechnung einzugehen, soll zum Abschluß ein Ergebnis angeführt werden, welches wir allerdings noch nicht als endgültig gesichert betrachten dürfen:

a) Die Entwicklung der Störung geht beim Lärm-, Hollmann- und ω^* -Modell langsamer als beim geostrophischen Modell.

b) Die Lösungen des Hollmann-Modells schmiegen sich der geostrophischen Lösung merklich dichter an, als die des ω^* -Modells. Über das Lärm-Modell kann keine Aussage gemacht werden, da das Auftreten interner Gravitationswellen die Anwendung eines Zeitschrittes von einigen Stunden unmöglich macht.

Das sicherste Ergebnis, welches diese Rechnungen liefern, ist jedoch folgendes: Ohne die Hilfe elektronischer, programmgesteuerter Rechenmaschinen ist es unmöglich, auf dem Wege der Tendenzberechnung zu wesentlich vertieften Erkenntnissen über die nicht-geostrophischen Modelle zu kommen.

Wesentlich ausführlichere und detaillierte Untersuchungen über das Thema dieses Vortrages werden in einer späteren Arbeit veröffentlicht.

Zur Bedeutung der numerischen Wettervorhersage für den praktischen Dienst

von

Hermann Flohn

(mit 2 Tabellen im Text)

Versucht man, einen Überblick zu gewinnen über die Ergebnisse der numerischen Vorhersage, soweit sie in systematischen Versuchen und im Routinedienst gewonnen worden sind, so finden wir ein in seinen Grundzügen überzeugendes Bild. Die wesentlichen Resultate sind die folgenden:

1. Bereits das einfachste, zunächst sehr unrealistisch erscheinende Rechenmodell, das barotrope, übertrifft in seiner Leistungsfähigkeit eindeutig die empirisch-ki-

nematischen Methoden der Konstruktion von Vorhersagekarten. Grob gesagt: die 48-stündige Vorhersage mit dem barotropen Modell ist mindestens ebenso gut wie die 24-stündige mit empirischen Methoden, und in 30—50% aller Fälle liefert selbst die 72-stündige Vorhersage noch ein befriedigendes Ergebnis, oder doch wesentliche Hinweise auf die Weiterentwicklung (Herrlin). Das ist besonders bemerkenswert, da eine 72-stündige Vorhersagekarte mit empirischen Methoden zu keinen sinnvollen Ergebnissen führt.

Tab. 1

Ergebnisse von Routinevorhersagen (Stockholm) mit dem barotropen Modell (November — Februar), Korrelationskoeffizienten r in 0.01

$r =$	gut ≥ 65	mäßig 40—64	schlecht < 40	Ausfall	Gesamt- zahl der Fälle	Analyse
24h	34	1	2	—	37	empirisch (konventionell)
48h	22	7	5	3	37	
72h	17	6	4	10	37	
24h	33	3	—	—	36	objektiv
48h	22	4	1	9	36	
72h	12	8	3	13	36	

Andererseits belegen diese Ergebnisse im Gegensatz zu früheren qualitativen Annahmen, daß für 24—48 h der Transport bzw. die Neuverteilung der Wirbelgröße (Vorticity) alle übrigen Faktoren (einschließlich Baroklinie, Heizung und Abkühlung, Vertikalbewegung und Reibung) an Bedeutung überwiegt, und daß die Existenz von Diskontinuitätsflächen (Fronten) für die großräumige Wetterentwicklung nur von untergeord-

neter Bedeutung ist. Beide Befunde sollten dem Praktiker des Wetterdienstes wie dem Lehrer der Meteorologie Anlaß zum Nachdenken und zur Revision seiner Vorstellungen sein; wir benötigen auch im Unterricht eine neue Konzeption der Synoptik auf dieser Grundlage.

2. Die geostrophischen baroklinen Modelle leisten nicht mehr, sondern eher weniger als das barotrope

Tab. 2

Vergleich der Ergebnisse mit verschiedenen Vorhersageverfahren (Korrelationskoeffizienten in 0.01, Index = Vorhersagezeit in h)

	r_{12}	r_{24}	r_{48}	r_{72}
empirische Vorhersage, Boden	.	72	ca. 50	.
" " 500 mb	.	63—65	ca. 50	.
barotropes Modell, empir. Analyse	(90)	74—77	66	60
" " objekt. "	.	84	74	68
" " 8 Umstellungen	.	(73)	(57)	(53)
thermotropes Modell, 1000 mb	68	69	.	.
" " 500 mb	82	80	.	.
geostroph. 4-Schichten-Modell*)	58—67	.	.	.

*) (850—300 mb, nur 1 Iteration für 12h)

Modell; über die Ursachen wird noch bei dieser Tagung eingehend zu diskutieren sein (Hollmann). Neben der Verbesserung des barotropen Modells erscheint die Entwicklung nichtgeostrophischer barokliner Modelle jetzt als die wichtigste Aufgabe.

3. Die für die Rechnung an den leistungsfähigsten Rechenanlagen nötige Zeit (Größenordnung 1 Std.) ist wesentlich geringer als die für die Sammlung des Beobachtungsmaterials, die Analyse und die Bereitstellung der Eingabedaten notwendige Zeitspanne (6—9h). Eine entscheidende Beschleunigung sowie eine gewisse Personaleinsparung kann durch die Methode der objektiven Analyse (Döös) erzielt werden. Diese beruht auf der Korrektur einer 12- oder 24-stündigen Vorhersagekarte mit Hilfe der beobachteten Werte von Geopotential und Wind. Ein systematischer Versuch mit dem barotropen Modell zeigt, daß die Ergebnisse sich nicht verschlechtern, sondern sogar verbessern (vgl. Tab. 1); die objektive Analyse nimmt nur 30—40 Minuten Zeit in Anspruch. Die Notwendigkeit einer objektiven Analyse ergibt sich vor allem für die Mehrschichtenmodelle, die die Änderungen in der Stabilität berücksichtigen: in diesem Falle ist eine dreidimensionale Ausgleichung erforderlich, die von Hand nicht mehr in einem vertretbaren Zeitaufwand geleistet werden kann.

4. Bei Mehrschichtenmodellen nimmt die Qualität der Ergebnisse — offenbar gesetzmäßig — vom Boden her mit der Höhe zu, während bei empirischen Verfahren die Vorhersagekarten für die Höhen schlechter sind als am Boden. Die Ursache dürfte in der fehlenden Berücksichtigung der Reibungseffekte usw. zu suchen sein, also in einem unrealistischen Ansatz der Randbedingungen. Das bedeutet aber, daß wir für die zukünftige Wettervorhersage Verfahren entwickeln müssen, die primär von der Höhenkarte und nicht mehr von der Bodenkarte ausgehen. Wir benötigen also objektiv-statistische Vorhersagemethoden für die üblichen Wetterelemente (Niederschlag, Bewölkung, täglicher Temperaturgang usw.), um die Vorteile der numerischen Vorhersagekarte in der Praxis des Wirtschaftswetterdienstes einführen zu können.

5. Die Bedeutung der Randbedingungen stellt sich immer klarer heraus. Der Einfluß der seitlichen Randbedingungen — der nach einem bekannten Satz von Ertel jede Vorhersage für Teilgebiete der Atmosphäre unmöglich macht — pflanzt sich nur verhältnismäßig langsam fort, d. h. mit ähnlicher Geschwindigkeit wie die Wettervorgänge selbst. Bei einer hemisphärischen Analyse, an deren äquatorialen Begrenzung in 10° oder 20° Breite (Thompson und Gates) nur geringe Druckänderungen auftreten, kann dieser Fehler herabgemindert werden. Besondere Aufmerksamkeit erfordert jedoch die Randbedingung an der Untergrenze der Atmosphäre am Erdboden: hier muß systematisch versucht werden, die Effekte der Orographie, des Unterschiedes zwischen Meer und Land und vielleicht auch konstante Wärmequellen zu berücksichtigen.

6. Gegenüber diesen positiven Ergebnissen muß auch ein negatives erwähnt werden: der mittlere Fehler der vorhergesagten Änderungen des Geopotentials bzw. des Druckes wächst bei den meisten Modellen mit der Zeit an und ist größer als bei den empirischen Verfahren. Das bedeutet auch bei hoher positiver Korrelation eine Verschärfung der Kontraste zwischen Hoch und Tief, d. h. eine scheinbare Antizyklon- bzw. Zyklogenese, die quantitative Höhenwindvorhersagen für 48—72 Stunden merklich fälschen kann. Versuche zur Ausschaltung dieser Fehlerquelle sind im Gange.

Aus diesen Ergebnissen muß man zu dem Schluß kommen, daß eine wirksame Rationalisierung der Vorhersage, d. h. die Entlastung des Meteorologen von

mehr oder weniger handwerklicher Routinetätigkeit, bereits durch die vorliegenden Erfahrungen im praktischen Dienst gesichert ist. Für spezielle Aufgaben des Wetterdienstes (Höhenwindvorhersage im Flugwetterdienst, Kurz- und Mittelfristvorhersage) ergibt sich bereits heute mit dem einfachsten Modell eine effektive Verbesserung gegenüber den empirischen Verfahren. Darüber hinaus bestehen so viele weitere Möglichkeiten der Verbesserung durch einen schrittweisen Abbau unrealistischer Voraussetzungen, daß die Zukunft der Wettervorhersage in der numerischen Vorhersage zu suchen ist.

In diesem Kreis braucht es nicht weiter erörtert zu werden, daß in absehbarer Zukunft, d. h. in den nächsten 5—10 Jahren, die numerische Vorhersage nur angewandt werden kann auf großräumige Probleme, d. h. solche der Regionalsynoptik und der Makrosynoptik, ebenso auch wahrscheinlich der Globalsynoptik (Langfristvorhersage), bei der jedoch noch große Schwierigkeiten überwunden werden müssen. Der Einsatz für kleinräumigere Probleme scheitert nicht an grundsätzlichen Schwierigkeiten, sondern ausschließlich an der gegebenen zeitlich-räumlichen Maschenweite unseres Beobachtungsnetzes, die von ökonomischen Bedingungen diktiert wird; wo ein dichteres Netz gegeben ist — z. B. Vorhersage des „Smogs“ in Los Angeles (Frenkiel) —, können auch solche Fragen behandelt werden.

Von besonderem Interesse sind die Methoden der numerischen Vorhersage in ihrer Anwendung auf neu auftauchende Probleme des praktischen Wetterdienstes, deren Lösung mit empirischen Methoden viele Fehlerquellen enthält und daher unbefriedigend ist. Hierzu zählen

a) Vorhersagekarten für Stratosphärenflüge in 200, 150 bzw. 100 mb. Versuche mit dem einfachen barotropen Modell — das an sich den stratosphärischen Bedingungen angepaßt ist — haben wegen der aerologischen Meßfehler bisher noch keine überzeugenden Resultate geliefert.

b) Die Erstellung der für den Flugwetterdienst erforderlichen zusammengesetzten Vorhersagekarten, die sich nicht auf einen festen Zeitpunkt, sondern auf die längs der Strecke variable Zeit des Flugzeuges beziehen.

c) Vorhersage der großräumigen Vertikalbewegung in der Troposphäre sowie Vorhersage der Niederschläge. Hier liegen bisher nur wenige Einzelfälle vor, wobei japanische und amerikanische Arbeiten eine Prognose der Niederschlagsmengen wagen. Die Ergebnisse sind noch nicht eindeutig, ermutigen aber die weitere Arbeit an diesem praktisch so wichtigen Problem.

d) Vorhersage der wahren Luftbahnen oder Trajektorien, wie sie die Ausbreitung z. B. radioaktiver Aerosole bestimmen. Dieses Problem kann wegen der Nichtstationarität des Druckfeldes mit empirischen Methoden nur unter enormem Arbeitsaufwand gelöst werden, während die numerische Vorhersage keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet, besonders sofern man nicht-geostrophische Modelle zugrunde legen kann.

Die Ergebnisse der Vergleiche zwischen den Trajektorien ausgewogener Ballone und den Höhenkarten (Neiburger und Angell) zeigen, daß die isobarenkrechte Windkomponente im 300-mb-Niveau 15—20% des wahren Windes beträgt; die ageostrophische Komponente (einschl. Krümmungseffekt) beläuft sich sogar auf 30%. Hieraus erhellt besonders eindringlich die Notwendigkeit, von der geostrophischen Approximation abzugehen; wahrscheinlich ist ein Übergang von der Analyse des Druckfeldes auf die des Windfeldes in naher Zukunft notwendig. Auf die weitreichenden Konsequenzen dieser Entwicklung kann hier nicht eingegangen werden.

Über die Herleitung von allgemeinen hydrodynamischen Wirbelsätzen¹⁾

von

Heinz Fortak

Zusammenfassung

Es werden gewisse zeitliche Differentialoperatoren definiert, mit deren Hilfe die zeitlichen Änderungen tensorieller Feldfunktionen untersucht werden können, wenn diese an eine bestimmte materielle Linie, eine materielle Fläche oder an ein materielles Volumen innerhalb der Flüssigkeit gebunden sind. Die Verwendung dieser Differentialoperatoren gestattet die Herleitung allgemeiner hydrodynamischer Wirbelgleichungen, welche frei verfügbare tensorielle Feldfunktionen enthalten, in sehr einfacher und physikalisch einleuchtender Form.

Summary

At first a number of differential operators are defined which are suitable to study the rate of change with regard to the time of any tensor function associated with a given line, an area or a volume of particles in the fluid. The use of these differential operators allows to write general hydrodynamic vorticity equations, containing an available tensor function, in a very simple and physical evident manner.

1. Einleitung

Die in der Meteorologie allgemein verwendete Vorticity-Gleichung im (x, y, z, t) -System wie im (x, y, p, t) -System folgt aus den sog. verkürzten hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. Die Verwendung der verkürzten Gleichungen führt aber nur zu einer Wirbelgleichung für die Vertikalkomponente des absoluten Wirbels. H. Ertel hat sich seit 1942 (1), (2), (3) um allgemeinere hydrodynamische Wirbelsätze bemüht, insbesondere im Hinblick auf die Herleitung von hydrodynamischen Erhaltungssätzen. Die erste Anwendung des Ertelschen Erhaltungssatzes vom Jahre 1942 hat E. Kleinschmidt (4), (5) gegeben. Neuerdings hat H. Ertel durch Einführung einer frei verfügbaren vektoriellen Feldfunktion einen neuen differentiellen Wirbelsatz aufgestellt und ein neues Wirbel-Theorem in Integralform unter Einbeziehung einer frei verfügbaren skalaren Feldfunktion angegeben (6), (7).

Man kann nun in einfachster Weise durch Einführung einer frei verfügbaren tensoriellen Feldfunktion und bei Verwendung von bestimmten materiellen zeitlichen Differentialoperatoren, welche eine konkrete physikalische Bedeutung besitzen, eine große Zahl von differentiellen und integralen hydrodynamischen Wirbelsätzen aufstellen, aus denen alle bisher bekannten Wirbelsätze und Wirbeltheoreme ableitbar sind. Insbesondere ergibt sich die Integralform des Ertelschen Wirbelsatzes vom Jahre 1954 (6) und eine Systematik für die Aufstellung neuer hydrodynamischer Erhaltungssätze.

2. Materielle Zeitableitungen im bewegten Kontinuum

Gegeben sei irgendeine tensorielle Feldfunktion $A = A(x, y, z, t)$. Die individuelle zeitliche Ableitung von A ist dann

$$[1] \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) A \quad ^2)$$

wobei A an eine sich im Kontinuum bewegende Flüssigkeitspartikel gebunden ist.

Es liegt nahe, ähnliche Zeitdifferentiationen zu definieren, wenn A an die Partikel einer materiellen Linie, einer materiellen Fläche (nicht notw. geschlossen) oder an ein materielles Volumen gebunden ist.

Der Dimensionszahl entsprechend werden diese Differentialoperatoren mit

$$\frac{D_1}{Dt}, \frac{D_2}{Dt}, \frac{D_3}{Dt}$$

bezeichnet und durch

$$[2] \quad \frac{d}{dt} \left[\int_1^2 \vec{ds} \cdot A \right] = \int_1^2 \vec{ds} \cdot \frac{D_1 A}{Dt} \quad (\vec{ds} : \text{Linielement})$$

$$[3] \quad \frac{d}{dt} \left[\int_F \vec{df} \cdot A \right] = \int_F \vec{df} \cdot \frac{D_2 A}{Dt} \quad (\vec{df} : \text{Flächenelement})$$

$$[4] \quad \frac{d}{dt} \left[\int_G d\tau A \right] = \int_G d\tau \frac{D_3 A}{Dt} \quad (d\tau : \text{Volumenelement})$$

definiert.

Die physikalische Bedeutung der Differentialoperatoren ist aus [2] bis [4] ersichtlich.

Aus [2] gewinnt man mit $A = \nabla B$ die Relation

$$[5] \quad \nabla \frac{dB}{dt} = \frac{D_1 \nabla B}{Dt}$$

und damit für einen beliebigen Tensor A

$$[6] \quad \frac{D_1 A}{Dt} = \frac{dA}{dt} + (\nabla \vec{v}) \cdot A \quad (\nabla \vec{v} : \text{lokale Dyade}).$$

Setzt man in [3] $A = \nabla \times B$ und wendet den Satz von Stokes an, dann erhält man

$$[7] \quad \nabla \times \frac{D_1 B}{Dt} = \frac{D_2 \nabla \times B}{Dt}$$

und für einen beliebigen Tensor A

$$[8] \quad \frac{D_2 A}{Dt} = \frac{dA}{dt} + (\nabla \cdot \vec{v}) A - (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot A.$$

Aus [4] wird schließlich mit $A = \nabla \cdot B$ nach Anwendung des Satzes von Gauß

$$[9] \quad \nabla \cdot \frac{D_3 B}{Dt} = \frac{D_3 \nabla \cdot B}{Dt}$$

²⁾ In der hier verwendeten vektoriellen Schreibweise bedeutet der Punkt zwischen zwei extensiven Größen das skalare (innere) Produkt und das Kreuz das vektorielle (äußere) Produkt (8).

1) Die Originalarbeit erschien Ende 1956 in Gerlands Beiträgen zur Geophysik 65, 283—294 (1956).

woraus für einen beliebigen Tensor A die Relation

$$[10] \quad \frac{D_3 A}{Dt} = \frac{dA}{dt} + (\nabla \cdot \vec{v}) A$$

folgt.

Die neuen Differentialoperatoren entstehen so durch successive räumliche Differentiationsprozesse aus dem bekannten d/dt .

Alle Differentialoperatoren ($d/dt = D_0/Dt$ eingeschlossen) lassen sich mit Hilfe eines Tensors zweiter Stufe T_n darstellen.

Es ist

$$[11] \quad \frac{D_n A}{Dt} = \frac{dA}{dt} + T_n \cdot A \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

wobei T_n aus dem Einheitstensor I gemäß

$$[12] \quad \frac{D_n I}{Dt} = T_n$$

entsteht.

Es ist im einzelnen

$$\frac{D_0 I}{Dt} = T_0 = 0$$

$$\frac{D_1 I}{Dt} = T_1 = \nabla \vec{v}$$

$$\frac{D_2 I}{Dt} = T_2 = (\nabla \cdot \vec{v}) I - \overset{\wedge}{(\nabla \nabla)}$$

$$\frac{D_3 I}{Dt} = T_3 = (\nabla \cdot \vec{v}) I$$

Von den für die D_n/Dt aufstellbaren Rechenregeln seien hier nur genannt:

$$[13] \quad \frac{D_3 \vec{\xi} \cdot A}{Dt} = \frac{D_2 \vec{\xi}}{Dt} \cdot A + \vec{\xi} \cdot \frac{D_1 A}{Dt}$$

$$[14] \quad \sigma \frac{D_3 \vec{\xi} \cdot A}{Dt} = \frac{d\sigma \vec{\xi} \cdot A}{dt}$$

mit $\sigma = \frac{1}{\rho}$ und bei Verwendung der Kontinuitätsgleichung $\frac{D_3 \rho}{Dt} = 0$.

3. Hydrodynamische Wirbelsätze

Die Rotorbildung der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen in der Form

$$[15] \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - 2(\vec{v} \times \vec{w}) = -\nabla \Phi - \sigma \nabla p$$

liefert bei Einführung des absoluten Wirbels

$$[16] \quad \vec{\xi} = \nabla \times \vec{v} + 2\vec{w}$$

und des Solenoidvektors

$$[17] \quad \vec{N} = \nabla p \times \nabla \sigma$$

die Wirbelgleichung

$$[18] \quad \frac{d\vec{\xi}}{dt} + (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{N}$$

In der hier vorgeschlagenen Schreibweise ist [18] genau

$$[19] \quad \frac{D_2 \vec{\xi}}{Dt} = \vec{N}$$

Die Integration von [19] über eine flüssige Fläche F liefert unter Verwendung von [3] sofort den bekannten Zirkulationssatz von V. Bjerknes in der Form

$$\frac{d}{dt} \left[\int_F d\vec{f} \cdot \vec{\xi} \right] = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{N}$$

Die skalare Multiplikation der Gleichung [19] von rechts mit einem beliebigen Tensor A gibt bei Beachtung von [13]

$$[20] \quad \frac{D_3 \vec{\xi} \cdot A}{Dt} = \vec{\xi} \cdot \frac{D_1 A}{Dt} + \vec{N} \cdot A$$

mit der zugehörigen Integralform

$$[21] \quad \frac{d}{dt} \left[\int_G d\vec{r} \vec{\xi} \cdot A \right] = \int_G d\vec{r} \vec{\xi} \cdot \frac{D_1 A}{Dt} + \int_G d\vec{r} \vec{N} \cdot A$$

Gleichung [20] ist eine Grundform hydrodynamischer Wirbelsätze, aus denen sich besonders bequem eine Reihe wichtiger Spezialfälle ableiten lassen.

Führt man in [20] nacheinander die neuen Feldfunktionen B ein gemäß

$$A = \nabla B, A = I B, A = \sigma B \text{ und } A = \sigma \nabla B,$$

dann erhält man neben [20] (dort A/B)

$$[20] \quad \frac{D_3 \vec{\xi} \cdot B}{Dt} = \vec{\xi} \cdot \frac{D_1 B}{Dt} + \vec{N} \cdot B \quad \left(\frac{D_3}{Dt} \leftrightarrow \frac{D_1}{Dt} \right)$$

$$[22] \quad \frac{D_3 \vec{\xi} \cdot \nabla B}{Dt} = \vec{\xi} \cdot \nabla \frac{dB}{dt} + \vec{N} \cdot \nabla B \quad \left(\frac{D_3}{Dt} \leftrightarrow \frac{d}{dt} \right)$$

$$[23] \quad \frac{D_2 \vec{\xi} \cdot B}{Dt} = \vec{\xi} \cdot \frac{dB}{dt} + \vec{N} B \quad \left(\frac{D_3}{Dt} \leftrightarrow \frac{d}{dt} \right)$$

$$[24] \quad \frac{d}{dt} (\sigma \vec{\xi} \cdot B) = \sigma \vec{\xi} \cdot \frac{D_1 B}{Dt} + \sigma \vec{N} \cdot B \quad \left(\frac{d}{dt} \leftrightarrow \frac{D_1}{Dt} \right)$$

$$[25] \quad \frac{d}{dt} (\sigma \vec{\xi} \cdot \nabla B) = \sigma \vec{\xi} \cdot \nabla \frac{dB}{dt} + \sigma \vec{N} \cdot \nabla B \quad \left(\frac{d}{dt} \leftrightarrow \frac{d}{dt} \right)$$

und dazu für [20], [22] und [23] die entsprechenden Integralformen. Hinter den Wirbelgleichungen sind die durch die Gleichungen gekoppelten Differentialoperatoren in Klammern beigefügt.

Die Ertelschen Wirbelsätze folgen aus den vorstehenden wie folgt:

Mit $B = \psi$ (ψ : skalare Feldfunktion) ist [25] der Satz aus (1), (2), (3), [22] ist nach Integration über ein flüssiges Volumen die zugehörige Integralform, mit $B = \vec{\Psi}$ ($\vec{\Psi}$: Vektor) ist [24] der neue Wirbelsatz aus (6), [20] ist nach Integration die zugehörige Integralform, und schließlich ist mit $B = \psi$ (Skalar) die über eine flüssige Fläche integrierte Gleichung [23] das neue Wirbeltheorem aus (7).

4 Feldgrößen mit bestimmten Invarianzeigenschaften

Eine hydrodynamische Feldgröße kann in verschiedenem Sinne invariant sein. Hier werde die Invarianz gegenüber der Anwendung irgendeines zeitlichen Differentialoperators betrachtet. Für die potentielle Temperatur gilt bei adiabatischen Strömungen

$$[26] \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

für den Vektor $\vec{\Psi} = \vec{v} + \vec{w} \times \vec{r} - \nabla W$ nach Ertel-Rossby (9), (10), in der hier vorgeschlagenen Schreibweise,

$$[27] \quad \frac{D_1 \vec{\Psi}}{Dt} = 0$$

wobei sich die Hamiltonsche Prinzipalfunktion aus der Lagrange-Funktion gemäß

$$L = \frac{dW}{dt} = \frac{v^2}{2} + \vec{w} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) - (\Phi + \int \sigma dp)$$

bestimmt, für den Wirbelvektor selbst bei barotroper Strömung

$$[28] \quad \frac{D_2 \vec{\xi}}{Dt} = 0$$

und schließlich für die hydrodynamische Dichte

$$[29] \quad \frac{D_3 \rho}{Dt} = 0$$

Verschwindet in den Wirbelgleichungen [20] und [22]

bis [25] der zweite Term der rechten Seiten, für den Fall der Barotropie trifft das wegen $\vec{N} = 0$ stets zu, und wählt man dann die Größe B so, daß sie im Sinne $D_1/Dt = 0$ invariant ist, dann ergeben sich die Erhaltungssätze

$$[30] \quad \frac{D_3 \vec{\xi} \cdot \vec{B}}{Dt} = 0,$$

$$[31] \quad \frac{d}{dt} (\sigma \vec{\xi} \cdot \vec{B}) = 0.$$

Nach [30] hat die Größe $\vec{\xi} \cdot \vec{B}$ in diesem Falle die gleiche Invarianzeigenschaft wie die hydrodynamische Dichte.

Für $B = \vec{\Psi}$ ist [31] der Ertel-Rossbysche Erhaltungssatz aus (9), (10) und

$$[32] \quad \frac{d}{dt} \left[\int_G \vec{\xi} \cdot \vec{\Psi} d\tau \right] = 0$$

ist die zugehörige Integralform.

Für Feldfunktionen mit der Invarianzeigenschaft $dB/dt = 0$ ergeben sich dann die Erhaltungssätze

$$[33] \quad \frac{D_3 \vec{\xi} \cdot \nabla B}{Dt} = 0,$$

$$[34] \quad \frac{D_2 \vec{\xi} \cdot \vec{B}}{Dt} = 0,$$

$$[35] \quad \frac{d}{dt} (\sigma \vec{\xi} \cdot \nabla B) =$$

mit den zugehörigen Integralformen.

Literatur

- (1) Ertel, H.: Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. Meteor. Z. 59, 277—281 (1942)
- (2) Ertel, H.: Über das Verhältnis des neuen hydrodynamischen Wirbelsatzes zum Zirkulationssatz von V. Bjerknes. Meteor. Z. 59, 385—387 (1942)
- (3) Ertel, H.: Über hydrodynamische Wirbelsätze. Phys. Z. 43, 526—529 (1942)
- (4) Kleinschmidt jr., E.: Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen. Meteor. Rdsch. 3, 1—6, 54—61 (1950; 4, 89—96 (1951)
- (5) Linke's Meteor. Taschenbuch. Neue Ausgabe. II. Bd. Leipzig 1953, 295—298 (P. Raethjen).
- (6) Ertel, H.: Kanonischer Algorithmus hydrodynamischer Wirbelgleichungen. Sitz.-Ber. Dt. Akad. Wiss. Berlin Kl. Math. u. allgem. Naturwiss. 1954, Nr. 4.
- (7) Ertel, H.: Ein neues Wirbel-Theorem der Hydrodynamik. Sitz.-Ber. Dt. Akad. Wiss. Berlin Kl. Math. u. allgem. Naturwiss. 1954, Nr. 5.
- (8) Lagally, M.: Vektorrechnung. Leipzig 1945.
- (9) Ertel, H. and Rossby, C.-G.: A new conservation-theorem of hydrodynamics. Geofis. pura e appl. 14, 3—4 (1948)
- (10) Ertel, H. und Rossby, C.-G.: Ein neuer Erhaltungssatz der Hydrodynamik. Sitz.-Ber. Dt. Akad. Wiss. Berlin Kl. Math. u. allgem. Naturwiss. 1949, Nr. 1.

Numerical Predictions of the Development of the Cyclone over the Far East and the Associated Precipitation

by

Kanzaburo Gambo, Naosuke Saito, Shigemi Fujiwara and Takio Murakami

(with 22 figures in the text)

Abstract

The authors' attempt is to make clear the mechanism of the rapid intensification of cyclone which passed away from the Japan Sea to the Ochotsk Sea on May 9, 1954. In the first part of this paper, the integral-relaxation method is discussed in order to avoid the error in the calculation of Jacobian. In the middle part, the height change with respect to time is discussed from the two points of view; one is the advection of absolute vorticity, while the other one is the gradient of the vertical p-velocity with respect to pressure p. As the check of the result, the calculated pressure pattern on the earth surface is compared with the observed one, which shows good agreement. In the last part, we make the numerical prediction of precipitation. In this case, we use the simplified equation in order to estimate the amount of precipitation.

Zusammenfassung

Es wird versucht, den Mechanismus der raschen Vertiefung der Zyklone zu verstehen, die am 9. Mai 1954 vom Japanischen nach dem Ochotskischen Meer zog.

Im ersten Teil der Arbeit wird auf das Integrationsverfahren des Relaxierens eingegangen und diskutiert, wie Fehler in der Berechnung der Jakobi-Terme vermieden werden können.

Im mittleren Teil werden die zeitlichen Änderungen der Höhenwerte betrachtet und diese auf die beiden folgenden Einflüsse zurückgeführt:

1. den Transport der absoluten Vorticity,
2. die horizontale Winddivergenz (vertikaler Gradient der Vertikalgeschwindigkeit im p-System).

Zur Nachprüfung der Resultate wird das berechnete Druckfeld an der Erdoberfläche mit dem beobachteten verglichen, wobei gute Übereinstimmung erzielt wurde.

Im letzten Teil wird eine numerische Vorhersage des Niederschlags behandelt. Zur Abschätzung der Größenordnung der Niederschlagsmenge wird eine vereinfachte Gleichung benutzt.

1. Development of cyclone

As may be understood from the equation of absolute vorticity, the height change with respect to time depends upon the two factors, i. e., the horizontal and vertical adventions of absolute vorticity and the divergence of horizontal velocity field. The mathematical expression is

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nabla^{-2} J(\eta, z) - \nabla^{-2} \left(\frac{f}{g} \omega \frac{\partial \eta}{\partial p} \right) + \nabla^{-2} \left(\eta \frac{f}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right) \quad [1.1]$$

Here η , ω and z denote the absolute vorticity, the vertical p-velocity and the height of constant pressure re-

spectively. The symbols J and ∇^{-2} are the so-called Jacobian and the reciprocal expression of ∇^2 -operator respectively. In this equation we neglect the integration constant F , because of taking account of the effect of boundary conditions for $\frac{\partial z}{\partial t}$ in the expression of ∇^{-2} . For example, the relaxation of $J(\eta, z)$ should be carried out under the boundary condition $\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{\text{Boundary}} = [\nabla^{-2} J(\eta, z)]_{\text{Boundary}}$. The equation [1.1] is not correct in a strict sense, because we obtain [1.1] by using the geostrophic approximation in the vorticity equation. The geostrophic approximation would not be an appropriate assumption near the centre of cyclone. The result which will be shown in the later section also demands another expression instead of [1.1] in the domain near the centre of cyclone. However, the geostrophic approximation is the effective tool in a sense of "first approximation", for the estimation of the development of cyclone and the results we obtained express the detailed mechanism how to develop and where the cyclone moves. In this circumstance, we use the equation [1.1] for the discussion of development of cyclone. The short comment for the non-geostrophic problem will be given in section 6.

The equation [1.1] shows that the correct estimation depends upon how to estimate the quantities $\nabla^{-2} J(\eta, z)$, $\nabla^{-2} \left(\frac{f}{g} \omega \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)$ and $\nabla^{-2} \left(\eta \frac{f}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)$ exactly. Since the term of $\nabla^{-2} \left(\eta \frac{f}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)$ is negligible small compared with the other two terms, we do not consider this effect in this paper. The estimation of $\nabla^{-2} J(\eta, z)$ is obtained by the relaxation method of $J(\eta, z)$. The conventional method for the calculation of $\nabla^{-2} J(\eta, z)$ is correct if the wave length we concerned with is large compared with the length of mesh-size we use. Recent progress is forwarded to the exact estimation for $\nabla^{-2} J(\eta, z)$ in the domain where the wavelength is comparable with the mesh-size. (Thompson (10)). Another problem is to estimate the quantity $\nabla^{-2} \left(\eta \frac{f}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)$ exactly. In the conventional methods, $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ is replaced by the difference equation with respect to p-coordinate (Charney and Phillips (2), Hinkelmann (5)), or ω is assumed by the functional form of p (Eady (3), Eliassen (4), Sawyer-Bushby (6), Thompson (9), Bolin (1)).

In connection with these two problems, another method to calculate these two terms will be shown in the following sections.

2. Integral-Relaxation method

Here we consider the problem to solve the equation of $\nabla^{-2} J(\eta, z) = \sigma$. Since σ is regarded as the quantity

$\frac{\partial z}{\partial t}$ in a barotropic atmosphere, we rewrite the equation mentioned above as follows

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} = J(\eta, z) \quad [2.1]$$

or

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nabla^{-2} J(\eta, z) \quad [2.2]$$

In order to simplify the discussion we assume in the following treatments without loss of generality that

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad [2.3]$$

is the boundary condition.

The conventional method for the calculation of $\frac{\partial z}{\partial t}$ is the differential-relaxation method. Because we replace $J(\eta, z)$ as follows

$$J(\eta, z) = \frac{\Delta \eta}{\Delta x} \frac{\Delta z}{\Delta y} - \frac{\Delta \eta}{\Delta y} \frac{\Delta z}{\Delta x} \equiv \sigma_1 \quad [2.4]$$

where Δx and Δy denote the length of mesh-size in x - and y -directions respectively.

After the calculation of [2.4], $\frac{\partial z}{\partial t}$ is obtained from σ_1 by relaxation method. As the other method corresponding with this method, we integrate [2.] with respect to x and y instead of obtaining σ_1 by [2.4]. The integration of [2.1] becomes

$$\iint \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} dx dy = \iint J(\eta, z) dx dy = \oint \eta dz \equiv \sigma_2 \quad [2.5]$$

where \oint is the line-integral.

For the purpose of practical use, we put the integral-domain as shadowed part surrounding the point (x, y) , shown in fig. 1. The numbers in the figure denote the

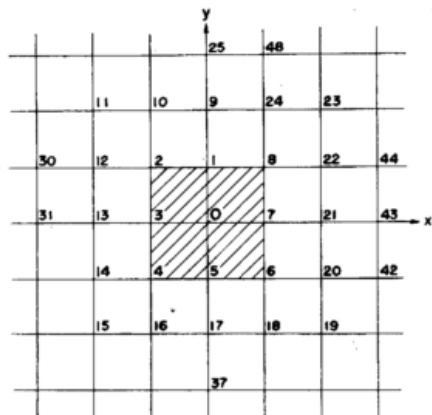


Fig. 1
Point pattern. (x, y) is marked by 0.

mark points of each grid. The point (x, y) is marked by the number 0. In such a case σ_2 is written as follows

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \iint J(\eta, z) dx dy = \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right\} dx dy \\ &= \int_{y_0}^{y_5} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy - \int_{y_1}^{y_4} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &\quad - \int_{x_2}^{x_0} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \int_{x_4}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad [2.6]$$

where x_1 and y_1 denote the values of x and y at the grid of points i respectively.

The approximate value of σ_2 is obtained by the Simpson's rule. For example:

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_5} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy &= \frac{2\Delta y}{6} \left\{ \eta_0 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_0 + 4\eta_1 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_1 + \eta_2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_2 \right\} \\ \int_{x_2}^{x_0} \left(\eta \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx &= \frac{2\Delta x}{6} \left\{ \eta_2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_2 + 4\eta_1 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_1 + \eta_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0 \right\} \end{aligned} \quad [2.7]$$

where

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_s &= \frac{1}{12\Delta y} \left\{ 8(z_{24} - z_7) + (z_0 - z_{48}) \right\}, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_s &= \frac{1}{12\Delta x} \left\{ 8(z_{23} - z_1) + (z_2 - z_{44}) \right\}, \end{aligned} \quad [2.8]$$

Here η_i and z_i represent the values of η and z at the grid of points i respectively.

The value of σ_2 thus obtained is used for the calculation of $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{g}{f} \nabla^2 z$. The integration of $\frac{\partial z}{\partial t} \nabla^2 z$ with respect to x and y is rewritten approximately by the Simpson's rule,

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial z}{\partial t} \nabla^2 z dx dy &= \frac{4\Delta s^2}{36} \left\{ \sum_D \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z + 4 \sum_C \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z + \right. \\ &\quad \left. + 16 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right\} + o(\Delta s^6) \end{aligned} \quad [2.9]$$

where $\Delta s = \Delta x = \Delta y$ and the subscripts D and C denote the summation of $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z$ at the grid of points symbolized by D and C in fig. 2, i. e.,

$$\begin{aligned} \sum_C \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_1 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_3 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_5 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_7, \\ \sum_D \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_2 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_4 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_6 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z \right)_8 \end{aligned}$$

In fig. 2, the point (x, y) is also denoted by the number

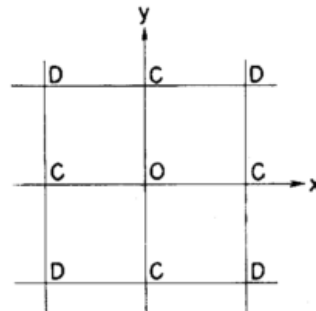


Fig. 2
Point pattern symbolized by C, D, and 0.

0 as same as in fig. 1. If we define H as follows,

$$H = \frac{4\Delta s^2}{36} \left\{ \sum_D + 4 \sum_C + 16 \right\} \quad [2.10]$$

[2.9] is written

$$H \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z = \sigma_2 \quad [2.11]$$

This equation is easily solved by the group relaxation and the value of $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z$ is obtained in the form

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z = H^{-1} \sigma_2 = J(\eta, z) \quad [2.12]$$

where

$$H^{-1} H = 1$$

The convergency of this relaxation is considerably rapid as may be understood from the functional form of H . In order to estimate the accuracy of this method, we calculate $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z$ in a simple form of η and z .

As Thompson used in order to compare his method for the calculation of $\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t}$ with the conventional method, we put

$$\begin{aligned} z &= -\frac{f}{g} U y + A \sin kx, \\ \eta \therefore \zeta &= \frac{g}{f} \nabla^2 z = -\frac{g}{f} A k^2 \sin kx \end{aligned} \quad [2.13]$$

where U and A are constant with respect to space and time, and k is the wave number.

In this case, the exact solution for $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z$ is

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z = UA k^3 \cos kx \quad [2.14]$$

The Jacobian $J_a(\eta, z)$ obtained by the conventional method [2.4] is given by

$$J_a(\eta, z) = \beta AU k^3 \cos kx \quad [2.15]$$

where

$$\beta = \frac{\sin k\Delta s}{k\Delta s} = 1 - \frac{1}{6}(k\Delta s)^2 + O((k\Delta s)^4) \quad [2.16]$$

The ratio of the exact solution [2.14] to the approximate one [2.15] is given by β and this coefficient tends to 1 with decreasing value of wave number k . In this sense, we use β as the parameter of accuracy of the method. On the other hand, the functional form of σ_2 in [2.11] is given by

$$\sigma_2 = A k^3 U \cos kx \left(\frac{\sin k\Delta s}{k\Delta s} \right) \cdot 4\Delta s^2 \quad [2.17]$$

Thus, the solution obtained by [2.12] is given by

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z = J(\eta, z) = \gamma AU k^3 \cos kx \quad [2.18]$$

where

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{3}{2 + \cos k\Delta s} \left(\frac{\sin k\Delta s}{k\Delta s} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{180}(k\Delta s)^4 + O((k\Delta s)^6) \end{aligned} \quad [2.19]$$

The accuracy curves for β and γ with respect to $k\Delta s$

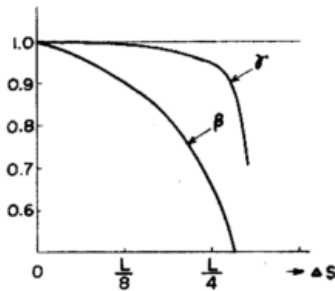


Fig. 3

Accuracy curves for β and γ as a function of Δs . L is the wave length.

are shown in fig. 3. Thompson (10) has also proposed another method for calculating the value of $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z$ and obtained as follows

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z = \delta AU k^3 \cos kx \quad [2.20]$$

where

$$\delta = 1 - \frac{1}{48}(k\Delta s)^4 + O((k\Delta s)^6) \quad [2.21]$$

In order to obtain a more accurate value of $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z$ in the conventional method by [2.4], we take into account the higher order of $J(\eta, z)$ with respect to Δs , i. e., we replace [2.4] in the following way,

$$J(\eta, z) = \left(\frac{\Delta \eta}{\Delta x} \frac{\Delta z}{\Delta y} - \frac{\Delta \eta}{\Delta y} \frac{\Delta z}{\Delta x} \right) \quad [2.22]$$

$$- \frac{\Delta s^2}{3!} \{ (\eta_{xxx}z_y + \eta_{xyy}z_x) - (\eta_{yzz}x_x + \eta_{yyy}z_x) \} + O(\Delta s^4)$$

where

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{(a)_{x-x+\Delta s} - (a)_{x-x-\Delta s}}{2\Delta s}, (a = \eta, z) \text{ and } \alpha_j = \frac{\partial \alpha}{\partial j} (j = x, y)$$

If we replace the second term of the right-hand side of [2.22] by the finite difference equation, we have

$$J(\eta, z) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_o \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_o - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)_o \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_o + O(\Delta s^4) \quad [2.23]$$

where the suffix o denotes the value at the point (x, y) , i. e., the position symbolized by o in fig. 1.

The functional forms of each term are given, for example,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_o &= \frac{1}{12\Delta s} \{ 8(\eta_{17} - \eta_8) + (\eta_{118} - \eta_{211}) \} + O(\Delta s^4), \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_o &= \frac{1}{12\Delta s} \{ 8(z_{17} - z_8) + (z_{117} - z_8) \} + O(\Delta s^4), \end{aligned} \quad [2.24]$$

where the suffix i denotes the value at the grid of points i shown in fig. 1.

In this case, the approximate value of $J(\eta, z)$ tends to approach to the exact solution more closely compared with the solution [2.14]. If we use the same functional forms for η and z given by [2.13], we have from [2.23] the following approximation

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 z = \beta' AU k^3 \cos kx \quad [2.25]$$

where

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{2}{3} \frac{(\sin k\Delta s - \sin 2k\Delta s)}{k\Delta s} \\ &= 1 - \frac{1}{30}(k\Delta s)^4 + O((k\Delta s)^6) \end{aligned} \quad [2.26]$$

From these facts, it may be mentioned that our method has the good accuracy compared with the conventional method. In practical purposes, it might be permitted that the finite difference forms given by [2.8] are replaced as follows

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_2 &= \frac{1}{2\Delta s} (z_{10} - z_8) + O(\Delta s^2), \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_8 &= \frac{1}{2\Delta s} (z_2 - z_4) + O(\Delta s^2). \end{aligned} \quad [2.8']$$

The reason why we use [2.8]' in stead of [2.8] is that the main errors of Jacobian come from the differentiation of η with respect to x and y and the errors due to the spacial differentiation of z are regarded as small as compared with the errors of $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ and $\frac{\partial \eta}{\partial y}$.

By using this method was calculated one example of the instantaneous height tendency with respect to time on the 500-mb surface which is shown in fig. 4. In this

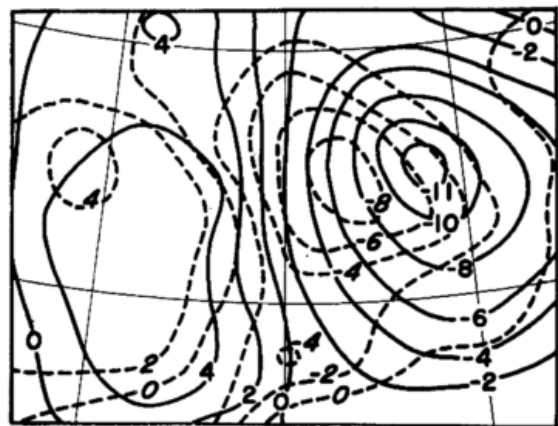


Fig. 4

12-hr barotropic forecast for 500 mb from May 9, 1500 GCT—May 10, 0300 GCT 1954. Computed and observed height changes are shown by dashed and continuous lines respectively. Unit 100 feet.

example, the mesh-size is selected as long as 300 km and this instantaneous height tendency is compared with the observed height change for 12-hr following time corresponding initial map. The initial map shown in fig. 10 is the one at time 15 GCT 9 May 1954, which

will be used for the discussion in the later section. The domain of forecast area and the boundary which we use are shown in fig. 7. The comparison of the results obtained by this method with the conventional method

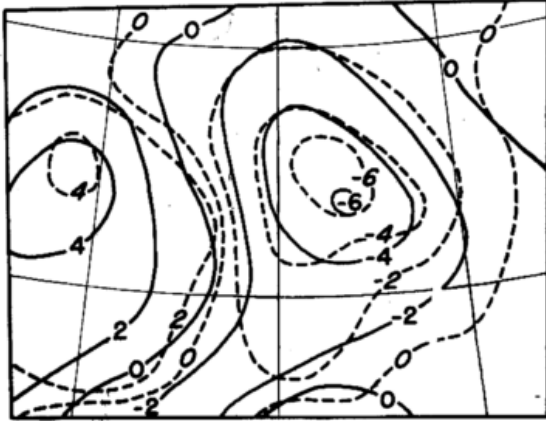


Fig. 5

Instantaneous height changes of the 500 mb surface. Continuous lines denote the result by the conventional method. Unit 100 feet per 1-h. Initial data in both cases were for 1500 GCT 9 May 1954. Dashed lines denote the result by our method.

is shown in fig. 5. Since we cannot calculate step by step with the increasing time with the lack of automatic machine in hand, we do not discuss any more.

3. The differential equation for the vertical p-velocity

It is the purpose of this section to estimate the quantity of the second factor which contributes to the intensification of the cyclogenesis. Since the divergence of the horizontal velocity is connected with the vertical gradient of the vertical p-velocity field, ω -field, by the equation of continuity, we discuss the distribution of the ω -field.

The differential equation for the vertical p-velocity ω is given from the following two equations,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta + \omega \frac{\partial \eta}{\partial p} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad [3.1]$$

$$\omega = -\kappa \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) \right] \quad [3.2]$$

where

$$\kappa = \frac{g}{\left(-\frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \right)}$$

Here η , κ , α and θ are the absolute vorticity, the stability coefficient, specific volume and potential temperature respectively. The first equation [3.1] is the vorticity equation and the second equation [3.2] is obtained from the conservation of potential temperature with respect to time, i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \theta + \omega \frac{\partial}{\partial p} \ln \theta = 0 \quad [3.3]$$

where

$$\ln \theta = \ln \alpha + \frac{c_v}{c_p} \ln p + \text{const.} \quad [3.4]$$

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\alpha}{g} \quad [3.5]$$

Since $\eta = \frac{g}{f} \nabla^2 z + f$ and $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{g}{f} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t}$, we can eliminate $\frac{\partial z}{\partial t}$ from [3.1] and [3.2]. The elimination of $\frac{\partial z}{\partial t}$ becomes as follows

$$\nabla^2 \omega + n^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} - \frac{f\kappa}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial p^2} \omega = + \frac{f\kappa}{g} \left[\frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta) - \frac{g}{f} \nabla^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)) \right] \quad [3.6]$$

$$\equiv F(x, y, p, t) \quad [3.7]$$

where

$$n^2 = \frac{f\eta\kappa}{g} \quad [3.8]$$

Here we assume that κ is only the function of p and is assumed as constant with respect to x, y -coordinates. Since the third term of the left-hand side of [3.6] is negligible small compared with the other two terms for ω , we rewrite [3.6] as follows,

$$\nabla^2 \omega + n^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = F(x, y, p) \quad [3.9]$$

The function F is also rewritten in the form

$$F = + \frac{f\kappa}{g} \left[2 \mathbf{v}_p \cdot \nabla \zeta + \mathbf{v}_p \cdot \nabla f + 2 \left(\frac{g}{f} \right)^2 (J(z_{px}, z_x) + J(z_{py}, z_y)) \right] \quad [3.10]$$

where

$$\mathbf{v}_p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial p}, \quad z_{px} = \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial x}, \quad z_{py} = \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial y}, \quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } z_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

This form of F is convenient for the model research, because we can easily estimate of the order of F . As may be seen in the form of F , the main factor of F is the first term of the right-hand side of [3.10], i.e., the advection of absolute vorticity by the vertical shear of the horizontal velocity. The second and third terms of the right-hand side represent the small effects of the divergence of velocity field.

The ω -field is obtained from [3.9] under the appropriate boundary conditions. Since [3.9] is a linear differential equation for ω , we can separate the effect of the boundary conditions. For example, we consider the case where the boundary conditions are

$$\begin{aligned} (\omega)_{p=0} &= 0 \\ (\omega)_{p=p_0} &= G(x, y) \end{aligned}$$

where p_0 is the level of lower boundary.

In this case we divide ω into two parts,

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad [3.11]$$

Here the differential equations for ω_1 and ω_2 become

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \omega_1 + n^2 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial p^2} &= F \\ (\omega_1)_{p=0} &= (\omega_1)_{p=p_0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad [3.12]$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \omega_2 + n^2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial p^2} &= 0 \\ (\omega_2)_{p=0} &= 0, (\omega_2)_{p=p_0} = G(x, y) \end{aligned} \right\} \quad [3.13]$$

For the sake of simplicity, we assume in the following discussion that the lateral boundary condition is given by

$$[\omega]_{\text{Boundary}} = 0$$

From these equations, the effect of the lower boundary condition such as the topographical effect is expressed by ω_2 and the general solution is obtained by the addition of ω_1 and ω_2 . Therefore we consider in this section the case where

$$(\omega)_{p=0} = 0, (\omega)_{p=p_0} = 0$$

In this sense, it is not difficult to separate the boundary effect from the others.

In order to compare this method for calculating ω from [3.9] with the others, we consider one simple case. As the example, we put the special form of F which F is a linear function of p , i.e.,

$$F = \left\{ a + b \left(\frac{p}{p_0} \right) \right\} e^{ikx + i\mu y} \quad [3.14]$$

where a, b, k and μ are constants.

This case corresponds to that of parameter model, because if we put z in the form

$$z = \bar{z} + A(p) z_T \quad (A(p) \sim p)$$

where \bar{z} and z_T have the same meanings as usually used, we have

$$F = \left\{ a + b \left(\frac{p}{p_0} \right) \right\} e^{ikx + i\mu y}$$

In this case, the solution for ω under the boundary condition [3.12] is given from [3.9] by

$$\omega_1 = \frac{e^{ikx + i\mu y}}{k^2 + \mu^2} \left\{ -\left(a + b \frac{p}{p_0} \right) + \frac{\sin \gamma p}{\sin \gamma p_0} (a + b - a \cos \gamma p_0) + a \cos \gamma p \right\}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{k^2 + \mu^2}}{n} \quad [3.15]$$

where k and μ are the wave numbers we concerned within x - and y -directions respectively.

This equation is approximately expressed as follows

$$\omega = \left\{ a_0 \left(\frac{p}{p_0} \right) + b_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 + c_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^3 + O \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^4 \right) \right\} e^{ikx + i\mu y} \quad [3.16]$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{k^2 + \mu^2} \left\{ b - (\gamma p_0) \left(\frac{a + b - a \cos \gamma p_0}{\sin \gamma p_0} \right) \right\}, \\ b_0 &= \frac{a}{k^2 + \mu^2} \left(\frac{\gamma^2 p_0^2}{2} \right), \\ c_0 &= \frac{1}{k^2 + \mu^2} \left(\frac{\gamma^3 p_0^3}{6} \right) \left(\frac{a + b - a \cos \gamma p_0}{\sin \gamma p_0} \right) \end{aligned}$$

Therefore the parabolic form for ω with respect to p , which is often used in the parameter model, is reasonable. However, the general form for ω must be solved exactly from [3.9]. The numerical example will be given in the later section where we will discuss in detail the vertical distribution of ω .

The other check of the accuracy of this method is given by comparison with the so-called layer model. We start from the finite difference equation for ω ,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \eta_i = \eta \frac{\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}}{\Delta p} \quad [3.17]$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{i+1/2} &= -\frac{\kappa}{\Delta p} \left[\frac{\partial}{\partial t} (z_{i+1} - z_i) + \mathbf{v}_i \cdot \nabla (z_{i+1} - z_i) \right] \\ \omega_{i-1/2} &= -\frac{\kappa}{\Delta p} \left[\frac{\partial}{\partial t} (z_i - z_{i-1}) + \mathbf{v}_i \cdot \nabla (z_i - z_{i-1}) \right] \end{aligned} \right\} \quad [3.18]$$

where the suffix i denotes the value on the level $p = p_i$ shown in fig. 6. Here we regard κ and η of the right-

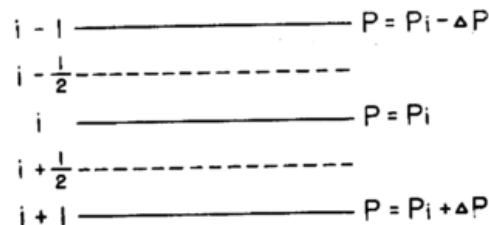


Fig. 6
Location of the level $p = p_i$

hand sides of [3.17] and [3.18] as constants with respect to p for the simplicity. Operating ∇^2 to the addition of $\omega_{i+1/2}$ and $\omega_{i-1/2}$ in [3.18] and $\frac{\partial}{\partial p}$ to [3.17] respec-

tively, we have the similar equation for ω_i with [3.9] in the following form

$$\nabla^2 \omega_i + n^2 \frac{1}{\Delta p^2} \left[\frac{\partial}{\partial p} \omega_{i+1/2} - \frac{\partial}{\partial p} \omega_{i-1/2} \right] = F_i \quad [3.19]$$

where

$$\omega_i = \frac{1}{2} (\omega_{i+1/2} + \omega_{i-1/2}), \quad z_i = \frac{1}{2} (z_{i+1/2} + z_{i-1/2}),$$

$$F_i = (F)_{p=p_i}$$

If we put $\frac{\partial \omega_i}{\partial p}$ in [3.19] as

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial p} = \frac{1}{\Delta p} [\omega_{i+1/2} - \omega_{i-1/2}]$$

instead of putting

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial p} = \frac{1}{2 \Delta p} [\omega_{i+1} - \omega_{i-1}]$$

the equation [3.19] becomes

$$\nabla^2 \omega_i + n^2 \frac{1}{\Delta p^2} [\omega_{i+1} + \omega_{i-1} - 2\omega_i] = F_i \quad [3.20]$$

On the other hand, the term of $\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}$ in [3.9] is written in the following two forms

$$\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial p^2} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta p}{2} \right)^2} [\omega_{i+1/2} + \omega_{i-1/2} - 2\omega_i] \quad [3.21]$$

or

$$\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial p^2} = \frac{1}{\Delta p^2} [\omega_{i+1} + \omega_{i-1} - 2\omega_i] \quad [3.22]$$

Therefore the equation [3.20] is equivalent with the case where we use [3.22]. If we use [3.21], however, the accuracy of our method becomes more better than the case of layer model.

4. Numerical Integration

As one example, we select the case where the weak cyclone over the Japan Sea developed within one day and attacked the Hokkaido, northern part of Japan, causing the heavy damage along its coastal area.

The grid of points chosen for the forecast is shown in fig. 7. The region of validity for a 12-hr forecast is obtained by excluding a border strip, approximately two grid interval in width. This region is also shown in fig. 7.

The surface map at time 1200 GCT 9 May 1954 is shown in fig. 9. As the initial map for the forecast, we selected the map at time 1500 GCT 9 May 1954. Corresponding to this surface map the contour height z on the 500 mb surface at time 1500 GCT 9 May 1954 is shown in fig. 10. The pressure pattern of this surface map was continuing to develop from time 0000 GCT, 9 th to time 0300 GCT, 10 th. In fig. 8 the surface map at time 0000 GCT 9 May 1954 is also shown in order to understand how this storm develops over the northern part of Japan.

In order to make clear the structure in the lower atmosphere, we use the levels, i.e., 1000 mb, 850 mb, 700 mb and 500 mb. The 300 mb map is also used as a checking one. Since $\nabla^{-2} J(\eta, z)$ is easily calculated on each level, we consider only the calculation of $\nabla^{-2} \left(\frac{f\eta}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right)$. As a first approximation we neglect the variation of $f\eta$

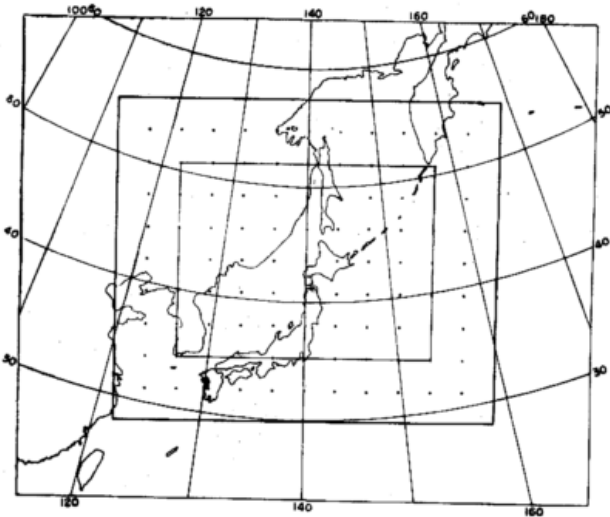


Fig. 7

Location of finite-difference lattice used in barotropic and baroclinic forecast. Large square outlines 13x11 grid used for computations; small square outlines region over which verification was made.

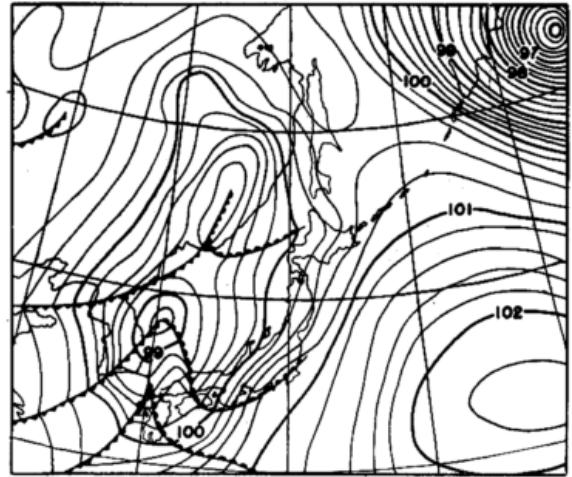


Fig. 8

Surface map for 0000 GCT 9 May 1954. Lines are drawn for every 2 mbs.

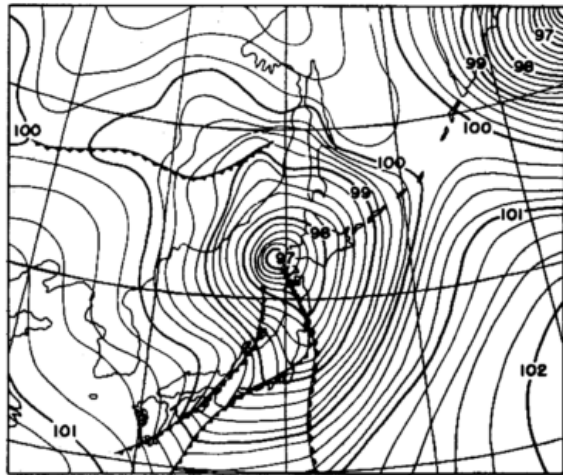


Fig. 9

Surface map for 1200 GCT 9 May 1954. Lines are drawn for every 2 mbs.

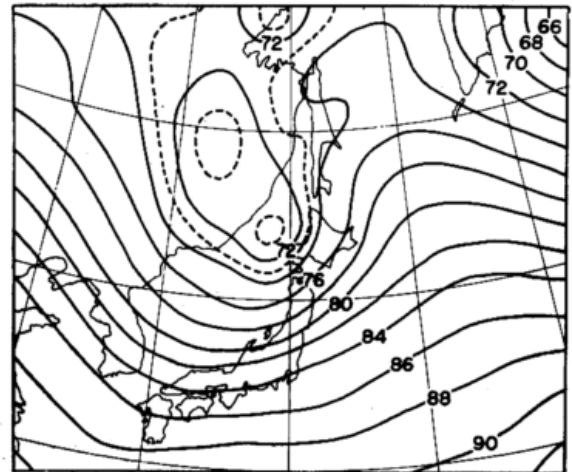


Fig. 10

Contour-field of the 500 mb surface May 9, 1954, 1500 GCT. Lines are drawn for every 200 feet.

with the space, namely

$$\nabla^{-2} \left(\frac{f\eta}{g} \frac{\partial \omega}{\partial p} \right) = \frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right) \quad [4.1]$$

Therefore the height change of the constant pressure with respect to time is given by

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nabla^{-2} J(\eta, z) + \frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad [4.2]$$

Although it is more exact calculation to use the integral-relaxation method mentioned before, we use, for the sake of simplicity, the conventional method for the calculations of $\nabla^{-2} J(\eta, z)$ and $\frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \frac{\partial \omega}{\partial p}$. In such a case, the equation [4.2] is written as follows

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{850} = \nabla^{-2} J_{850}(\eta, z) + \frac{f^2}{2g\Delta p} [\nabla^{-2} \omega_{1000} - \nabla^{-2} \omega_{700}] \quad [4.3]$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{700} = \nabla^{-2} J_{700}(\eta, z) + \frac{f^2}{2g\Delta p} [\nabla^{-2} \omega_{850} - \nabla^{-2} \omega_{550}] \quad [4.4]$$

where $\Delta p = 150$ mb and the suffix j denotes the quantity on j -mb surface, i.e., for example,

$$(\omega)_{850} = (\omega)_{p-850 \text{ mb}}$$

From these two equations, we can see that the height changes $\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{850}$ and $\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{700}$ are easily obtained if we have the informations for ω_{1000} , ω_{850} , ω_{700} and ω_{550} . In order to obtain these quantities for ω , we consider the differential equation for ω , i.e.,

$$\nabla^2 \omega + n^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = \frac{f\alpha}{g} \left[\frac{\partial}{\partial p} (\mathbf{v} \cdot \nabla \eta) - \frac{g}{f} \nabla^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right)) \right] \quad [3.9]$$

As mentioned in the foregoing section, we separate ω into two parts

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

where

$$\nabla^2 \omega_2 + n^2 \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial p^2} = 0, \quad [4.5]$$

$$(\omega_2)_{p=1000 \text{ mb}} = (\omega)_{p=1000 \text{ mb}}$$

Since the solution for [4.5] has the functional form which is the exponential function with respect to p , the effect of ω_2 decreases rapidly with increasing height. This demands that the surface condition does not effect too much upon the middle or upper level, say, 700 mb or 500 mb.

The solution ω_1 is obtained from [3.12] by the relaxation method if F is given on each level. In this paper, however, we are not concerned with the upper level because we are obtaining the instantaneous height change in the lower atmosphere and therefore we put ω_{550} as an approximate value. This approximation causes the small error for the estimation of $(\frac{\partial z}{\partial t})_{550}$ or the values of $(\frac{\partial z}{\partial t})$ on the levels near $p = 550$ mb. However, the approximate upper boundary condition on the surface of $p = 550$ mb does not affect upon the estimation of $(\frac{\partial z}{\partial t})$ on the level near the earth surface. In the case where we repeat the calculation, step by step with increasing time, we must, of course, solve [3.9] under the exact upper boundary condition, i. e. $(\omega)_{p=0} = 0$.

One method to obtain the approximate value of ω_{550} is to use the difference equation used in a case of layer model. For example, we use two-layer model (700 mb and 300 mb) and obtain ω_{550} by usual method. Approximate value of ω_{550} is replaced by ω_{500} thus obtained. It is reasonable thing that multiple layer model more than two gives the better approximation for ω_{500} . In this paper, however, we use the following relation to calculate ω_{550} :

$$\omega_{500} = \frac{\kappa}{\Delta p} \left[\left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{500} - \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{700} \right\} + \mathbf{v}_{500} \cdot \nabla (z_{500} - z_{700}) \right] \quad [4.6]$$

where

$$\omega_{500} = (\omega)_{p=500 \text{ mb}}, \quad \mathbf{v}_{500} = (\mathbf{v})_{p=500 \text{ mb}}, \quad \Delta p = 200 \text{ mb}.$$

Since

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{500} = \nabla^{-2} J_{500}(\eta, z) + \frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{500} \quad [4.7]$$

we replace this equation and [4.4] into [4.6]. Thus, the final form for ω_{500} is given

$$\omega_{500} = \frac{\kappa}{\Delta p} \left[\left\{ \nabla^{-2} J_{500}(\eta, z) - \nabla^{-2} J_{700}(\eta, z) \right\} + \mathbf{v}_{500} \cdot \nabla (z_{500} - z_{700}) \right] + \frac{f^2 \kappa}{g \Delta p} \left[\nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{500} - \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_{700} \right] \quad [4.8]$$

In this equation, we assume that the third term of the right-hand side of [4.8] is regarded as a small quantity compared with the other two terms. In our case, this assumption is roughly checked by using the contour height on the 300 mb surface. If we use this approximation, ω_{500} is easily obtained as follows

$$\omega_{500} = \frac{\kappa}{\Delta p} \left[\left\{ \nabla^{-2} J_{500}(\eta, z) - \nabla^{-2} J_{700}(\eta, z) \right\} + \mathbf{v}_{500} \cdot \nabla (z_{500} - z_{700}) \right] \quad [4.9]$$

This approximate value of ω_{500} is replaced as the upper boundary condition for ω , i. e.,

$$\omega_{500} \doteq \omega_{550} \quad [4.10]$$

The lower boundary condition is

$$\omega_{1000} = 0. \quad [4.11]$$

because we are considering the function of ω_1 .

By using [3.9], the two unknown quantities ω_{700} and ω_{850} are easily obtained under the boundary conditions [4.10] and [4.11] by the relaxation method. Replacement of these quantities gives the height changes of $(\frac{\partial z}{\partial t})_{700}$ and $(\frac{\partial z}{\partial t})_{850}$.

Next we consider the height changes of $(\frac{\partial z}{\partial t})_{700}$ and $(\frac{\partial z}{\partial t})_{850}$ due to the effect of the lower boundary. These quantities are given by

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{850}^B = \frac{f^2}{2g\Delta p} [\nabla^{-2} (\omega_2)_{1000} - \nabla^{-2} (\omega_2)_{700}] \quad [4.12]$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{700}^B = \frac{f^2}{2g\Delta p} [\nabla^{-2} (\omega_2)_{850} - \nabla^{-2} (\omega_2)_{550}] \quad [4.13]$$

where the symbol "B" denotes the height change due to the effect of the lower boundary condition and $\Delta p = 150$ mb. Here $(\omega_2)_{550}$ is negligible small and we neglect this effect upon the value of $(\frac{\partial z}{\partial t})_{700}^B$. Since the differential equation for ω_2 is given by [4.5], we can easily solve if we give the lower boundary condition. As the lower boundary condition, we put the kinematical condition on the earth surface. The kinematical condition on the earth surface is

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)_{p=p_0(x,y)} = \mathbf{v}_H \cdot \nabla H \quad [4.14]$$

where $p = p_0(x, y)$ is the pressure on the earth surface, and \mathbf{v}_H, H are the horizontal velocity on the earth surface, the height of the earth surface respectively.

By rewriting [4.14] into the following form

$$\left[\frac{\partial z}{\partial t} + \mathbf{v}_H \cdot \nabla z + \omega \frac{\partial z}{\partial p} \right]_{p=p_0(x,y)} = \mathbf{v}_H \cdot \nabla H \quad [4.15]$$

we have

$$\left[\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{g}{\alpha} \omega \right]_{p=p_0(x,y)} = \mathbf{v}_H \cdot \nabla H \quad [4.16]$$

Here we use the geostrophic approximation for $\mathbf{V} \cdot \nabla z$.

Since $\frac{\partial z}{\partial t} \ll \frac{g}{\alpha} \omega$, we put as a first approximation

$$(\omega)_{p=p_0(x,y)} : - \frac{\alpha}{g} \mathbf{v}_H \cdot \nabla H \quad [4.17]$$

and also replace this quantity as the boundary condition of ω on the level $p = 1000$ mb. By using this first approximation for $(\omega)_{1000}$, we calculate $(\frac{\partial z}{\partial t})_{p=p_0(x,y)}$ which will be discussed in the next section. The second approximation for $(\omega)_{p=p_0(x,y)}$ is given by replacing this first approximation of $(\frac{\partial z}{\partial t})_{p=p_0(x,y)}$ into [4.16]. According to our result we obtained, this second approximation for $(\omega)_{p=p_0(x,y)}$ is negligible small.

As the numerical example, we use the following constants:

$$\Delta s = 300 \text{ km}, \quad \Delta p = 150 \text{ mb}, \quad \kappa = 5.2 \times 10^2 \text{ mb}^2/\text{m}$$

The grid of points which we use is shown in fig. 7. The numerical value of ∇H is given by

$$\nabla H = \frac{1500 \text{ m}}{100 \text{ km}} = 1.5 \times 10^{-2}$$

This value is given at the place where the grid of points is upon the island or the continent. The value of ∇H nearest the place upon the sea-surface from the island or the continent is given by

$$\nabla H = 7.5 \times 10^{-3}$$

The distribution of ∇H thus assumed is shown in fig. 11. In the figure, the values of upper and lower ranks at each grid of points denote $\frac{\partial H}{\partial x}$ and $\frac{\partial H}{\partial y}$ respectively.

This rough estimation for ∇H is obtained from the mean height of topography over the Far East. It is, however, necessary to use the smaller length of mesh-size more than 300 km, and to solve [3.9] under the exact boundary condition, if the more detailed distribution of ω is required.

On the other hand, since \mathbf{v}_H is the velocity on the earth surface, we assume that \mathbf{v}_H is connected with the velocity on the 1000 mb surface as follows

$$\mathbf{v}_H = \mu \mathbf{v}_{1000} \quad [4.18]$$

where \mathbf{v}_{1000} is the velocity on the 1000 mb surface. As

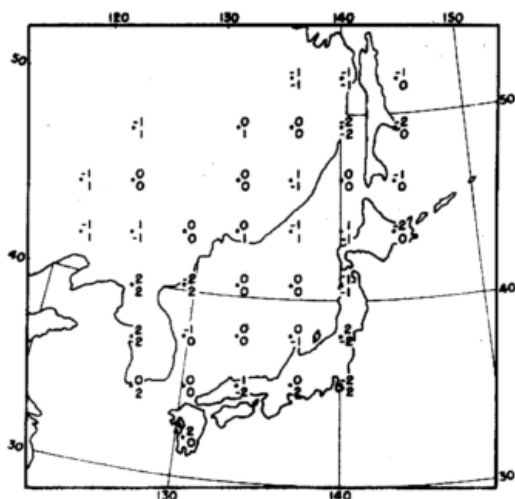


Fig. 11
Distribution of ∇H . Unit 750 m per 100 km.

the average value of μ which is obtained from v_{1000} and v_H , we use

$$\mu = 1.2$$

In fig. 12, the vertical distribution of ω_2 in the case where $v_H \cdot \nabla H$ is the unit function of sin wave as the lower boundary condition of ω_{1000} is shown as a func-

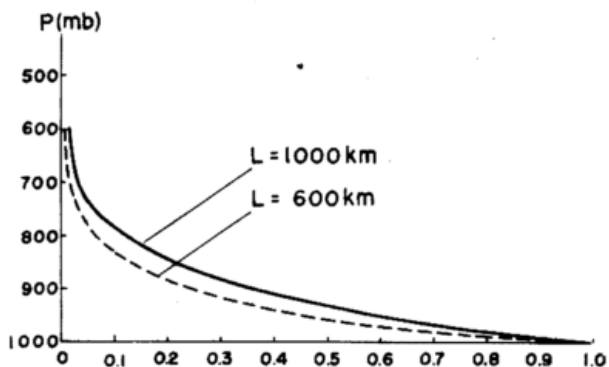


Fig. 12
Vertical distribution of ω L is the wave length.

tion of p and the wave length L . From this curve we see that the damping of ω_2 with respect to p is rapid and the effect of ω_2 upon the upper or middle levels would be negligible small.

5. Results of the calculated height change

Since we have no opportunity to use the automatic-machine, we compare the instantaneous height changes on each level with the observed 12-hr height changes. In figs. 13 and 14, the calculated (dashed line) and observed (continuous line) height changes of 700 mb and 850 mb surfaces are shown respectively. The maximum or minimum domains of the calculated height changes are situated westward from the observed places. It might be mentioned that this discrepancy comes from the problem of so called "time step". The amplitude of the height changes, however, shows comparably good agreement. The observed change of the 700 mb surface is more concentrated into sharp maxima than the computed. This seems to suggest that the divergence effect was larger than that calculated one. As may be understood from the distribution of ω with respect to p near the level $p = 700$ mb, the difference form of [4.4]

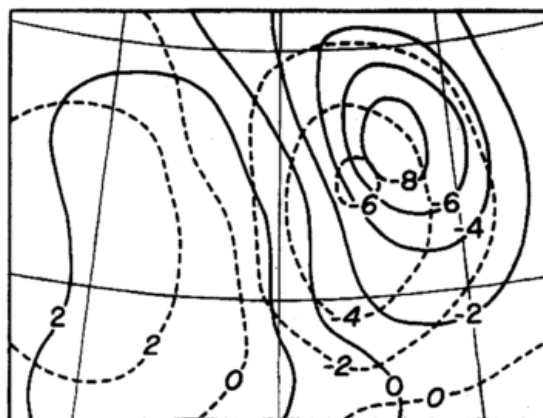


Fig. 13
12-hr baroclinic forecast for 700 mb from May 9, 1500 GCT — May 10, 0300 GCT 1954. Computed and observed height changes are shown by dashed and continuous lines respectively. Unit 100 feet.

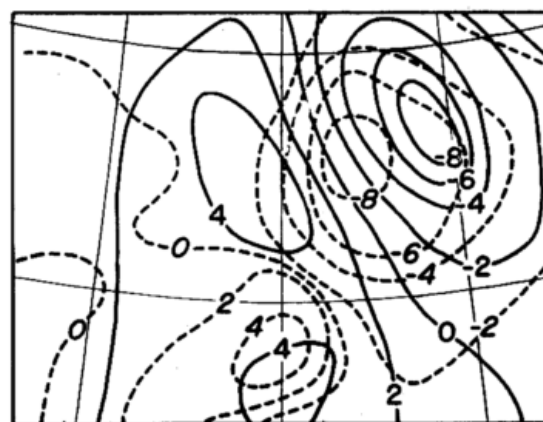


Fig. 14
12-hr baroclinic forecast for 850 mb from May 9, 1500 GCT — May 10, 0300 GCT 1954. Computed and observed height changes are shown by dashed and continuous lines respectively. Unit 100 feet.

for $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ on the 700 mb surface is not enough for the case where $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2}\right)_{700}$ is large. The correct form for $\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_{700}$ is

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_{700} &= \frac{1}{2\Delta p} (\omega_{850} - \omega_{550}) - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial p^3}\right)_{700} \cdot \Delta p^2 + o(\Delta p^4), \\ &= \frac{1}{2\Delta p} \left[\frac{4}{3} (\omega_{850} - \omega_{550}) - \frac{1}{6} (\omega_{400} - \omega_{1000}) \right] + o(\Delta p^4) \end{aligned} \quad [5.1]$$

where $\Delta p = 150$ mb and $\omega_{400} = (\omega)_p = 400$ mb.

Since $\omega_{1000} \approx 0$ and $\omega_{400} \approx \omega_{550}$, we have

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_{700} \approx \frac{1}{2\Delta p} (\omega_{850} - \omega_{550}) \quad [5.2]$$

In this sense, the computed value of $\nabla^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)$ by [4.4] is less estimated than the correct one and the result shows that the computed height change is smaller than the observed one near the center of cyclone. In this example, moreover, we used the approximate boundary on the 550 mb surface and the value of ω_{400} is not available. Therefore, we do not check the height change of the 700 mb surface any more. On the other hand, the height change of the 850 mb surface is not affected too much from the approximate boundary on the 550 mb surface and the finite difference form of [4.3] has a good accuracy because ω is an approximately linear function of p near the level $p = 850$ mb.

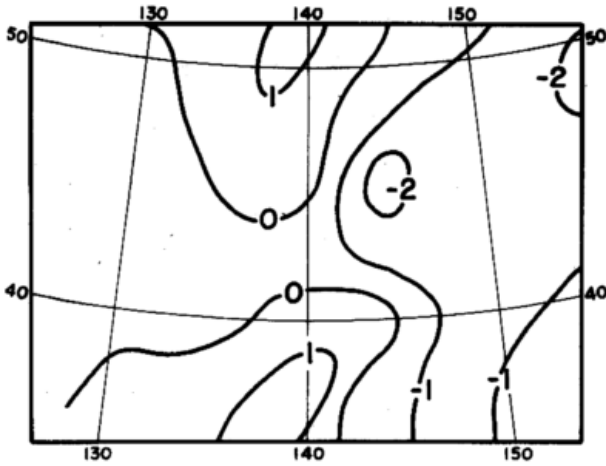


Fig. 15

Computed height change due to the term of $\nabla^{-2} J(\eta, z)$. Unit 100 feet per 12-hr. Initial data were for 1500 GCT 9 May 1954.

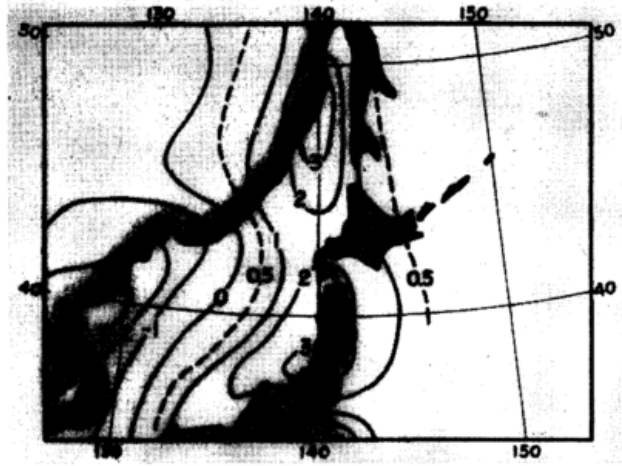


Fig. 16

Computed height change due to the effect of topography. Unit 100 feet per 12-hr. Initial data were for 1500 GCT 9 May 1954.

In order to make clear the development of cyclone on the lower levels, we divide $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{850}$ into three parts

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{850} = \nabla^{-2} J_{850}(\eta, z) + \frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)^B + \frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)^N \quad [5.3]$$

where

$$J_{850}(\eta, z) = [J(\eta, z)]_{p=850 \text{ mb}}$$

$$\frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)^B \equiv \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{850}^B$$

Here $\left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)^B$ is the vertical gradient of ω due to the effect of the lower boundary such as the topographical distribution of the earth surface. This effect is given by [4.12]. The last term $\frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)^N$ is the height change in a case where there is no effect of topography. This term is the contribution from ω_1 mentioned in the foregoing section. In figs. 15 and 16, the height changes due to $\nabla^{-2} J_{850}(\eta, z)$ and $\frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)^B$ are shown respectively. A glance at figs. 14, 15 and 16 shows that height change by the effect of the advection of absolute vorticity is too small compared with that of the divergence effect. While the effect of boundary has the effect upon the deformation of pattern near the place of the continent or the island, it does not contribute to the development of cyclone in this case. From these figures, we might be permitted to say that the main effect for the intensification of cyclone comes from the divergence term of vorticity equation.

In order to check our results more exactly, we compare the pattern we predicted with the earth's surface map, because we have the consecutive surface maps for every 3 hrs. The pressure P_s on the earth surface is obtained by using the following equation.

$$\frac{\Delta z}{\Delta p} = -\frac{\bar{\alpha}}{g} \quad [5.4]$$

where $\Delta p = p_s - 850$

$$\Delta z = H - (z)_{850}$$

and p_s and $\bar{\alpha}$ are the surface pressure and the mean specific volume between $p = p_s$ and $p = 850$ mb respectively. Suppose that the quantities of Δz , Δp at time $t = t_0$ are given by

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= (\Delta z)_{t=t_0} = H - (z)_{850}, \\ \Delta p &= (\Delta p)_{t=t_0} = p_s - 850, \\ \bar{\alpha} &= (\bar{\alpha})_{t=t_0} \end{aligned} \right\} \quad [5.5]$$

After the time interval Δt , these quantities are given in

the following form,

$$\left. \begin{aligned} \Delta z &= (\Delta z)_{t=t_0} - \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{850} \cdot \Delta t, \\ \Delta p &= (\Delta p)_{t=t_0} + \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_s \cdot \Delta t, \\ \bar{\alpha} &= (\bar{\alpha})_{t=t_0} + \left(\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t}\right) \Delta t \end{aligned} \right\} \quad [5.6]$$

where $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_s$ is the pressure change with time on the earth surface.

By replacing [5.5] and [5.6] into [5.4], we have two equations, corresponding to [5.4] at $t = t_0$ and $t = t_0 + \Delta t$ respectively. From these two equations we have the equation for the pressure change on the earth surface

$$\Delta p \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_s \Delta t = -\frac{(\Delta p)_0}{(\Delta z)_0} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{850} \Delta t - \frac{(\partial \bar{\alpha})}{(\bar{\alpha})_0} \Delta t (\Delta p)_0 \quad [5.7]$$

where the suffix zero denotes the value at $t = t_0$.

Here we use another equation for $\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t}$, i. e.,

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\alpha} = -\frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p} \bar{\omega} = -\frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p} \cdot \bar{\omega} \quad [5.8]$$

where $\frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p}$ and $\bar{\omega}$ are the mean values of $\left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}\right)$ and vertical p-velocity between $p = 850$ mb and $p = p_s$ respectively. Then we have

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p} \cdot \bar{\omega} - \frac{1}{\bar{\alpha}} \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\alpha} \quad [5.9]$$

Thus the pressure change Δp on the earth surface is given by

$$\Delta p = -\frac{(\Delta p)_0}{(\Delta z)_0} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{850} \Delta t + \frac{1}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial p} \cdot \bar{\omega} \cdot \Delta t \cdot (\Delta p)_0 + \left(\frac{1}{\bar{\alpha}} \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\alpha}\right) \Delta t (\Delta p)_0 \quad [5.10]$$

Similarly the height change on the level $p = 1000$ mb is easily calculated, i. e.,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{1000} = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{850} - \frac{1}{\alpha} \int_{850}^{1000} \omega dp + \mathbf{v}_{850} \cdot \nabla (z_{850} - z_{1000}) \quad [5.11]$$

There is also another way to calculate $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{1000}$ by the following relation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{1000} = \nabla^{-2} J_{1000}(\eta, z) + \frac{f^2}{g} \nabla^{-2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_{1000} \quad [5.12]$$

Δt and unit cross section is given (Smagorinsky (7)) by

$$-m = \int_0^{p_0} \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} \left(\frac{d\epsilon^*}{dt} \right) dt \frac{dp}{g} = \int_0^{p_0} \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \epsilon^* + \omega \frac{\partial \epsilon^*}{\partial p} \right) dt \frac{dp}{g} \quad [6.5]$$

where t_s is the time when the saturation occurs and p_0 is the pressure on the lower boundary surface.

In this equation, we use the following relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon^*}{\partial t} &= \frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right)_p \left(-\mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{T}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p} \omega \right) \\ \frac{\partial \epsilon^*}{\partial p} &= \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial p} \right)_T + \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{\epsilon^*}{p} + \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{T}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial p} &= \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{k}{p} T \quad (k = \frac{c_p - c_v}{c_p} \approx 0.28) \end{aligned} \quad [6.6]$$

where the subscripts p and T denote the values on the surface, $p = \text{const.}$ and $T = \text{const.}$, respectively.

Rearrangement of [6.5] using [6.6] gives the following simple equation

$$-m = \int_0^{p_0} \int_{t_s}^{t_s + \Delta t} \omega F dt \frac{dp}{g} \quad [6.7]$$

where

$$F(p, T) = \frac{1}{p} \left(-\epsilon^* + kT \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right)_p \right) \quad [6.8]$$

From [6.7], we can see that the amount of precipitation per unit time interval is proportional to ω and F .

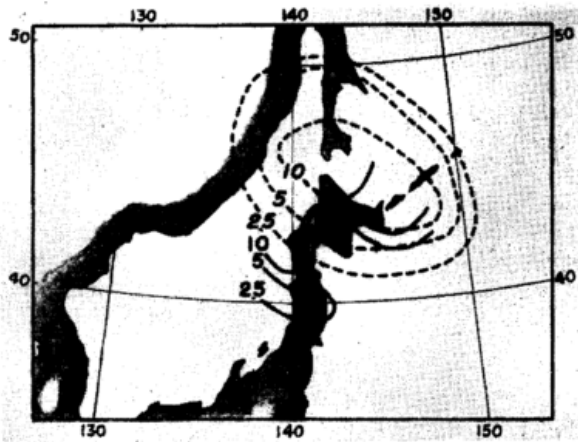


Fig. 20

3-hr forecast of the amount of precipitation. Computed and observed amounts of precipitation are shown by dashed and continuous lines respectively. Unit mm per 3-hr. Initial data were for 1500 GCT 9 May 1954.

calculation and observation. The domain where the condensation occurs during the time interval $\Delta t = 3$ h is shown in fig. 21. The observed distribution of cloud in fig. 21 denotes that at time after $\Delta t = 3$ h from the initial time. This calculated domain might be a good measure whether there is cloud or not. In connection with the distribution of (ωF) with respect to p we can roughly estimate the domain where each class (high, middle and lower) of cloud distributes.

In concluding this section, we would like to add some comment concerning the equation [6.7]. This equation is derived from the assumption that the atmospheric change is governed under the dry adiabatic

While ω is given by the equation of motion mentioned before, F is only a function of temperature T or the thickness h and pressure p . By putting $\Delta t = 3$ h, we calculate the amount of precipitation. Here we must calculate m along the stream line. However, we replace the correct integration by an approximated one, i.e., the integration is carried out at the initial position. The result is shown in fig. 20. The integration with respect to p is divided conventionally as follows

$$\int_{p_0}^{500} \omega F dp = \int_{850}^{500} \omega F dp + \int_{p_0}^{850} \omega F dp \quad [6.9]$$

The contribution of the second term of the right-hand side of [6.9] was small compared with the first in our case. In this sense, this case corresponds to that of dynamical precipitation. On the other hand, there is a case where the second term predominates. In that case, ω is large due to the topographical effect and F is also large because the temperature of the lower atmosphere is warm and wet. The latter case corresponds to that of orographic precipitation. In this case, we must calculate ω near the earth surface exactly. As the example of the latter case, we can point out the heavy precipitation which we experience during the Baiu-season (June and July in Japan). The detailed calculation will be presented in the future paper, including the exact calculation of ω near the complicated topography with small mesh-size.

From fig. 20 we see that there is fairly good agreement in the order of amount of precipitation between

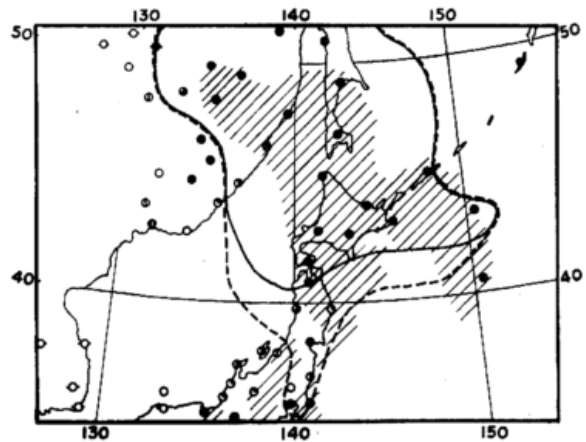


Fig. 21

3-hr forecast of the region of precipitation. Computed region of condensation at 1800 GCT 9 May 1954 is shown by dashed lines. Observed distribution of the amount of cloud at 1800 GCT 9 May 1954 is shown at each observation station. Region of precipitation at 1500 GCT 9 May 1954 is shown by continuous lines. Shaded part is the rainy region at 1800 GCT 9 May 1954. Initial data were for 1500 GCT 9 May 1954.

change. Such a restriction is not correct in a strict sense if we are concerned with the problem of precipitation. In fact, as may be understood from the following discussion, [6.7] is explained as the equation which the air parcel moves upward in a state of dry-adiabatic change.

The function (ωF) is written as follows

$$-\omega F \Delta t = -\omega \Delta t \left[\left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial p} \right)_T + \frac{kT}{p} \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right)_p \right] \quad [6.10]$$

The physical meaning of this function is easily understood in Emagram. In fig. 22, the dry adiabatic line

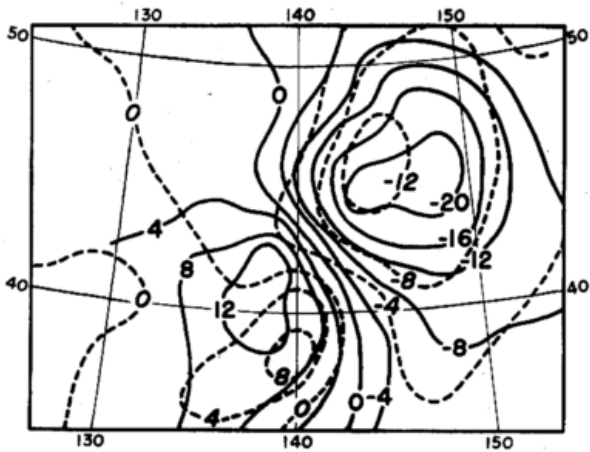


Fig. 17

6-hr baroclinic forecast for surface pressure from May 9, 1500 GCT — May 10, 0300 GCT 1954. Computed and observed pressure changes on the earth surface are shown by dashed and continuous lines. Unit mb per 6-hr.

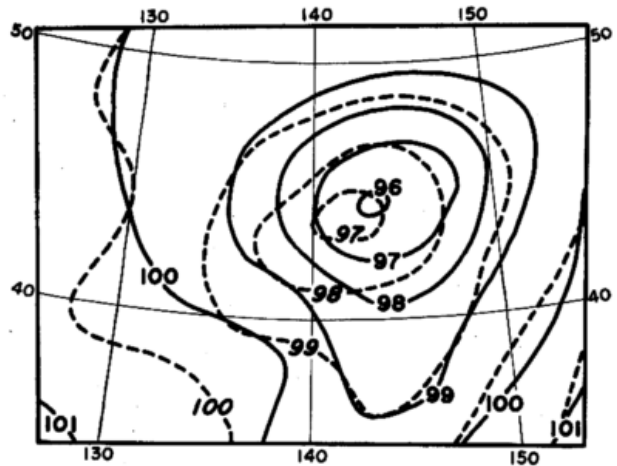


Fig. 18

6-hr baroclinic forecast for surface pressure from May 9, 1500 GCT — May 10, 0300 GCT 1954. Computed and observed pressure patterns on the earth surface are shown by dashed and continuous lines. Lines are drawn for every 10 mbs.

In this case, the estimation for $(\frac{\partial \omega}{\partial p})_{1000}$ becomes an important problem. To avoid the error which comes from the estimation for $(\frac{\partial \omega}{\partial p})_{1000}$, we use [5.11] for $(\frac{\partial z}{\partial t})_{1000}$.

By using the map at time 1200 GCT 9 May 1954, as the initial map, and the instantaneous height change of the 850 mb surface at time 1500 GCT 9 May 1954, we calculated the instantaneous pressure change on the earth surface with respect to time and the predicted surface pressure at time 1800 GCT, 9 th which are shown in figs. 17 and 18 respectively. The predicted surface pressure is obtained by

$$(p)_{t=t_0+\Delta t} = (p)_{t=t_0-\Delta t} + 2 \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{t=t_0} \cdot \Delta t$$

where $\Delta t = 3 \text{ h}$.

These two figures show that there are discrepancies in the small domain near the centre of cyclone. This fact might suggest that there is a non-geostrophic wind near the centre. In order to estimate this non-geostrophic component, we calculate the divergence field χ from the equation

$$-\nabla^2 \chi_i = \left(\frac{\partial \omega}{\partial p}\right)_{p=p_i} = \frac{-\omega_{i-1} + \omega_{i+1}}{2 \Delta p} \quad [5.13]$$

where the suffix "i" denotes the value on the level $p = p_i$.

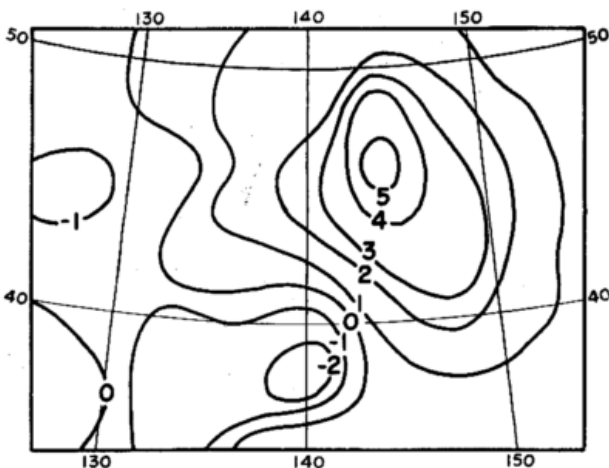


Fig. 19

Computed velocity potential field for 850 mb. Unit $10 \text{ m} \times 100 \text{ km}$ per sec. Initial data were for 1500 GCT 9 May 1954.

In fig. 19, χ -field on the level $p = 850 \text{ mb}$ is shown. This χ -field advects the absolute vorticity towards the centre of cyclone which contributes to decrease the height change near the centre of cyclone. While, if we take into account the effect of non-linear equation and use $\nabla^{-2}(\eta \frac{\partial \omega}{\partial p})$ in [4.2] instead of $\nabla^{-2}(\frac{\partial \omega}{\partial p})$, the height change near the centre of cyclone increases compared with the one we obtained. In this way, these two effects have the sense to cancel each other.

6. Numerical prediction of precipitation

With a check of the vertical p -velocity, we made the numerical forecasting of precipitation. The principle of the method to predict the precipitation was already show by Smagorinsky (7) and the staff members of Tokyo University (8).

If we write $\varepsilon^*(t)$ and $\varepsilon(t)$ as the saturated and the present specific humidity at time $t = t$ respectively, the time t_s when the saturation is occurred is given by

$$\varepsilon^*(t + \Delta t_s) - \varepsilon(t + \Delta t_s) = 0 \quad [6.1]$$

where

$$t_s = t + \Delta t_s$$

By expanding into Taylor series with respect to Δt_s , and assuming that $\Delta(t_s)$ is small we have

$$-\Delta t_s = \frac{\varepsilon^*(t) - \varepsilon(t)}{\left(\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)_{t=t}} \quad [6.2]$$

On the other hand, this equation is simplified as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} &= \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial T} \left(-\mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \omega \right), \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla \varepsilon - \omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \end{aligned} \quad [6.3]$$

where T is the temperature and $\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + \omega \cdot \frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = 0$

Replacement of [6.3] into [6.2] becomes*)

$$\Delta t_s = \frac{\varepsilon^* - \varepsilon}{\mathbf{v} \cdot \nabla (\varepsilon^* - \varepsilon) + \omega \left(\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial T} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)} \quad [6.4]$$

After the time interval Δt_s , the condensation occurs and the amount of precipitation per unit time interval

*) The authors are indebted to Mr. Miyakoda who kindly suggested us to use this equation.

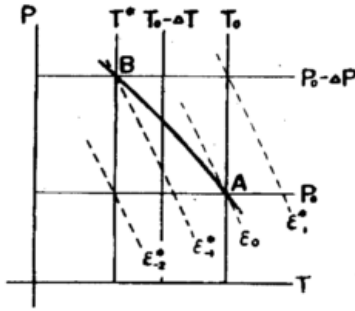


Fig. 22
Emagram. Dry adiabatic line is shown by AB.

is denoted by AB and the iso-lines of saturated specific humidity are given by $\epsilon^*_0, \epsilon^*_{-1}, \epsilon^*_{-2}, \dots$. In this figure we consider the air parcel at the place A, the coordinate being (p_0, T_0) . Since $\frac{kT}{p}$ is the dry adiabatic lapse rate of temperature with respect to p , we have

$$\frac{kT}{p} = \frac{\Delta T^*}{\Delta p} \quad [6.11]$$

where

$$\Delta T^* = T_0 - T^*$$

Here the unit pressure Δp is chosen such as

$$|\omega \Delta t| = \Delta p \quad [6.12]$$

By using [6.11] and [6.12], we have

$$-\omega \Delta t \frac{kT}{p} \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right)_p = \epsilon^*_{-2} - \epsilon^*_0 \quad [6.13]$$

Along the constant line of $T = T_0$, we obtain the following relation,

$$-\omega \Delta t \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial p} \right)_T = \epsilon^*_1 - \epsilon^*_0 \approx \epsilon^*_{-1} - \epsilon^*_{-2} \quad [6.14]$$

In this way, the function $(-\omega F \Delta t)$ is written from [6.13] and [6.14] as follows,

$$-\omega F \Delta t = \epsilon^*_{-1} - \epsilon^*_0 \equiv -\Delta \epsilon^* \quad [6.15]$$

This relation shows that the amount of condensation per unit time interval calculated by [6.7] is equivalent with that obtained by making ascend the air parcel dry-adiabatically from the initial place A to B.

In a state of precipitation, we must use the equation of conservation of equivalent-potential temperature Θ_e in stead of potential temperature Θ . In this case, the equation of atmospheric change becomes

$$\frac{d}{dt} \Theta_e = 0$$

or

$$\frac{d}{dt} \ln \Theta + \frac{L_c}{c_p T_c} \frac{d}{dt} \epsilon^* = 0 \quad [6.16]$$

where c_p, L_c and T_c are the specific heat of dry air at constant pressure, the latent heat of condensation and the temperature of condensation level.

If we define the vertical p -velocity in a state of saturation as ω^* , [6.16] becomes

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \ln \Theta + \omega^* \frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta - c m^* = 0 \quad [6.17]$$

where

$$c = \frac{L_c}{c_p T_c} \quad \text{and} \quad \frac{d\epsilon^*}{dt} = -m^*$$

Since the vertical p -velocity ω in a state of dry-adiabatic change is given by

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \ln \Theta + \omega \frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta = 0 \quad [6.18]$$

[6.17] is rewritten as follows

$$(\omega^* - \omega) \frac{\partial}{\partial p} \ln \Theta = c m^* \quad [6.19]$$

On the other hand, m^* is expressed after some calculation by

$$-m^* = \omega^* F^* \quad [6.20]$$

where

$$F^* = \frac{1}{(1 + c T \frac{\partial \epsilon^*}{\partial T})} \left(\frac{\partial \epsilon^*}{\partial p} - \frac{T}{\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial p} \cdot \frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right) \quad [6.21]$$

In the case of dry adiabatic change, [6.21] is rewritten in the same form as [6.8]. Thus, the elimination of m^* from [6.19] and [6.20] gives the equation for ω^*

$$\omega^* = \gamma \omega \quad [6.22]$$

where

$$\gamma = \frac{1}{\Theta_e} \frac{\partial \Theta}{\partial p} \left(1 + c T \frac{\partial \epsilon^*}{\partial T} \right)$$

In general, γ is larger than 1 and therefore ω^* is larger than ω . On the other hand F^* is smaller than F because F^* denotes the change in a state of wet adiabatic change similarly as shown that F corresponds to dry adiabatic change. Therefore ωF and $\omega^* F^*$ have the sense to approach each other.

Acknowledgement: The writers wish to express their hearty thanks to Prof. S. Syōno for his kind encouragement to Messieurs K. Miyakoda and S. Manabe for many valuable suggestions concerning the problem of precipitation, to the staff of members, N. W. P. group in Tokyo, for their stimulating discussions and also to Dr. Hinkelmann for his valuable suggestions of correcting this paper. They also wish to express their thanks to Mr. Y. Fujiki and Miss. M. Okubo for the drafting of the figures.

References

- (1) Bolin, B.: Multiple-parameter models of the atmosphere for numerical forecasting purposes. *Tellus* 5, 207—218 (1953)
- (2) Charney, J. G. and Phillips, N. A.: Numerical integration of the quasigeostrophic equations for barotropic and simple baroclinic flows. *J. Meteor.* 10, 71—99 (1953)
- (3) Eady, E. T.: Note on weather computing and the so-called $2\frac{1}{2}$ -dimensional model. *Tellus* 4, 157 bis 176 (1952)
- (4) Eliassen, A.: Simplified dynamic models of the atmosphere, designed for the purpose on numerical prediction. *Tellus* 4, 145—156 (1952)
- (5) Hinkelmann, K.: Research on objective weather forecasting. Final report AF 61 (514)—434 (1955)
- (6) Sawyer, J. S. and Bushby, F. H.: A baroclinic model atmosphere suitable for numerical integration. *J. Meteor.* 10, 54—59 (1953)
- (7) Smagorinsky, J. and Collins, G.: On the numerical prediction of precipitation. *Month. Weather Rev.* 83, 53—68 (1955)
- (8) Staff members in Tokyo University: The quantitative forecast of precipitation with the numerical method. *J. Meteor. Soc. Japan* 33, 205—216 (1955)
- (9) Thompson, P. D.: On the theory of large-scale disturbances in a two-dimensional baroclinic equivalent of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 79, 51—69 (1953)
- (10) —: Technical Memorandum of Joint Numerical Weather Prediction Unit (1955)

* The authors are indebted to Mr. Manabe for this result.

A Dynamical Model for Large-Scale Tropospheric and Stratospheric Motions

by

W. Lawrence Gates

Summary

A physical model of the atmosphere is postulated in which both the troposphere and stratosphere is characterized by a uniform thermal wind and a constant static stability, separated by a tropopause across which these quantities are discontinuous. Assuming the tropopause to be quasi-isobaric, a simplified model for the mean velocity, temperature and vertical motion fields of both the troposphere and stratosphere is constructed. This model also determines the velocity near the earth's surface and both the horizontal and vertical motion at the tropopause. The model may be regarded alternatively as a four-parameter or four-level model (sea level, mid-troposphere, tropopause or jet-stream level, and lower stratosphere), but it is felt to avoid the primary disadvantages of the exclusive use of either the parameterized or layered formulation. Analysis of the special case of an equivalent-barotropic stratosphere indicates the existence of systematic tropopause variations, with the vertical motion at this level generally in phase with that of the mid-troposphere, and with a system of opposing vertical motion higher in the stratosphere. These features are in general agreement with the results of observational and synoptic research. The analysis of the stability of tropospheric perturbations in a baroclinic zonal current shows a stabilizing influence of the stratosphere on the initial amplification of the disturbances. The minimum vertical shears required for instability with a basic jet current of 40 m sec^{-1} are more than twice those required without a stratosphere, and are shown to lie between the mean summer and winter shears in the zone of maximum westerlies. The overall energy budget of the atmosphere may be studied with the present model, and is shown to include a systematic transfer of kinetic and potential energy between the troposphere and stratosphere, although the details of the tropopause must await further calculations.

Zusammenfassung

Es wird ein atmosphärisches Modell entwickelt, in welchem Troposphäre und Stratosphäre jeweils durch gleichförmigen thermischen Wind und konstante hydro-

statische Stabilität gekennzeichnet und durch eine Tropopause voneinander getrennt sind, an der diese Größen einen Sprung erleiden. Unter der Annahme, daß die Tropopause quasi-isobar ist, wird ein vereinfachtes Modell konstruiert, welches die Felder der mittleren Windgeschwindigkeit, Temperatur und Vertikalbewegung in Tropopause und Stratosphäre enthält. In diesem Modell werden auch die Horizontalbewegung an der Erdoberfläche und die Horizontal- und Vertikalbewegung an der Tropopause bestimmt. Das Modell kann entweder als Vier-Parameter- oder Vier-Schichtenmodell (Boden, mittlere Troposphäre, Tropopause und untere Stratosphäre) aufgefaßt werden, aber es scheint die Hauptnachteile zu vermeiden, die darin liegen, ausschließlich entweder die Parameter- oder die Schichtenformulierung zu benutzen. Die analytische Behandlung des Spezialfalles mit einer äquivalent-barotropen Stratosphäre weist auf das Bestehen systematischer Tropopausenschwankungen mit Vertikalbewegungen in diesem Niveau hin, die im allgemeinen mit denen der mittleren Troposphäre in Phase sind, und auf ein System gegenläufiger Vertikalbewegung in der Stratosphäre. Dieser Befund stimmt in seinen Grundzügen mit der Beobachtung überein. Die Untersuchung der Stabilität troposphärischer Störungen in einem zonalen baroklinen Grundstrom zeigt einen stabilisierenden Einfluß der Stratosphäre auf die Entwicklung von Störungen. Die Mindest-Vertikalscherung des zonalen Grundstromes, die für die Instabilität der Störungen in einem Strahlstrom von 40 m/Sek. notwendig ist, ist mehr als doppelt so groß, als wenn keine Stratosphäre berücksichtigt wird, und liegt zwischen den beobachteten Beträgen der Vertikalscherung in Sommer und Winter in der Zone maximaler Westwinde. Die Gesamtenergiebilanz der Atmosphäre kann an diesem Modell studiert werden und beweist, daß ein systematischer Transfer von kinetischer und potentieller Energie zwischen Troposphäre und Stratosphäre besteht, obwohl die Rolle der Tropopause im einzelnen noch weiterer Untersuchung bedarf.

Results of Numerical Forecasting with the Barotropic and Thermotropic Atmospheric Models

by

W. Lawrence Gates

Abstract

Following a resume of the theory of thermotropic flow, a simple baroclinic model in which the direction of the thermal wind is assumed invariant with height, a discussion of the methods employed for the numerical integration of this model and the barotropic model is presented.

On a finite-difference grid of 414 points covering the United States and immediately surrounding regions, a series of sixty comparative 24-hour forecasts during January, 1953, at the 500 and 1000 mb levels was obtained by relaxation methods. The median correlation coefficients between the forecast and observed 24-hour height changes were 0.80 for both thermotropic and barotropic models at 500 mb and 0.69 for the thermotropic model at 1000 mb. In comparison with a method of pure interpolation, the numerical forecasts are shown to display a positive "skill" toward the center of the forecast region where the influence of the lateral boundaries is smallest. By normalizing the root-mean-square forecast errors to allow for the normal latitudinal variation, the Rocky Mountains are found to exert a marked influence on the forecasts at both 500 and 1000 mbs over the south central United States.

From a synoptic point of view, the numerical forecasts are found to compare favorably with conventional forecasts for the same period, although they appear to introduce a small but systematic tendency to move fully developed disturbances too slowly. This error is felt to stem from the truncation errors of the finite-difference schemes employed.

Recommendations for further research to reduce the several sources of error and to extend the physical basis of the model are made.

Zusammenfassung.

Nach einer zusammenfassenden Darstellung der Theorie thermotroper Strömungen, d. h. eines einfachen baroklinen Modells mit von der Höhe unabhängiger Richtung des thermischen Windes, werden die Methoden zur numerischen Integration diskutiert, die bei diesem und dem barotropen Modell verwendet wurden.

Unter Benutzung eines Gitternetzes von 414 Gitterpunkten, welches die Vereinigten Staaten und deren unmittelbare Umgebung bedeckt, wurde eine Reihe von 60 vergleichenden 24-stündigen Vorhersagen des Monats Januar 1953 für das 500 und 1000 mb-Niveau durch Relaxationsmethoden gewonnen. Die mittleren Korrelationskoeffizienten zwischen vorhergesagter und beobachteter 24-stündiger Geopotentialtendenz betragen für das thermotrope und barotrope Modell 0.8 im 500 mb-Niveau und für das thermotrope Modell 0.69 im 1000 mb-Niveau. Im Vergleich zu Methoden reiner Interpolation zeigen die numerischen Vorhersagen im Zentrum des Vorhersagegebietes, wo der Einfluß seitlicher Randbedingungen am geringsten ist, eine Verbesserung. Durch Normierung des Vorhersagefehlers, um die normale Breitenabhängigkeit sichtbar zu machen, ergibt sich ein deutlicher Einfluß der Rocky Mountains auf die Vorhersage im 500 und 1000 mb-Niveau über dem südlichen Zentralgebiet der Vereinigten Staaten.

Vom synoptischen Standpunkt sind die numerischen Vorhersagen gut mit den konventionellen Vorhersagen der gleichen Periode vergleichbar, obwohl sie dahin zu tendieren scheinen, die Bewegung voll ausgebildeter Störungen zu langsam ausfallen zu lassen. Dieser Fehler scheint den Verfahrensfehlern des verwendeten Differenzenschemas zu entstammen.

Es wird empfohlen, weitere Forschung zu betreiben, um die zahlreichen Fehlerquellen zu reduzieren und die physikalischen Grundlagen der Modelle auszubauen.

Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen *)

von

Walter H a n s e n

Zusammenfassung

In Rand- und Nebenmeeren treten ozeanographische Probleme auf, die in enger Beziehung zu Problemen der numerischen Wettervorhersage stehen. Es handelt sich um die quantitative Ermittlung der windbedingten Wasserstandsänderungen und Strömungen. Die Grundlage für die Untersuchungen stellen die hydrodynamischen Gleichungen dar, die Bewegungsvorgänge werden durch die vorzugebenden tangentialen Windschubkräfte an der Meeresoberfläche eindeutig bestimmt und nach Transformation der hydrodynamischen Differentialgleichungen in ein System von Differenzgleichungen numerisch ermittelt. Zur Prüfung der Theorie wurden Sturmfluten in der Nordsee nachgerechnet. Die umfangreichen numerischen Rechnungen wurden auf der BESK, dem Stockholmer Rechenautomaten, gerechnet. Die Ergebnisse, insbesondere die Nachrechnung des Holland-Orkans, haben eine für praktische Zwecke brauchbare Übereinstimmung mit den Beobachtungen geliefert.

*) Wird im Tellus veröffentlicht.

Some Results of Numerical Weather Prediction with a Lagrangian Method

by

Odd H a u g

(with 1 figure in the text)

Abstract

The Lagrangian method described here is theoretically treated by Fjörtoft in an article in *Tellus* vol. 7, nr. 4. The practical application of the method in the barotropic case will be discussed here.

The barotropic vorticity equation may be written

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi + f) = -(\mathbf{v}^{(N)} - \mathcal{C}) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi + f)$$

where, according to definition

$$\mathbf{v}^{(N)} = \mathbf{k} \times \nabla \psi^{(N)}, \quad \psi^{(N)} = \psi + \frac{1}{a_N} \nabla^2 \psi$$

and \mathcal{C} is a zonal velocity of magnitude $\frac{2\Omega}{a_N R} \cos \varphi$. The vorticity equation in this form tells that absolute vorticity is conserved in the smoothed velocity field $\mathbf{v}^{(N)} - \mathcal{C}$

In order to displace the vorticity in the smoothed field, Fjörtoft's trajectory rule is applied, by means of which it has proved successful to use time steps up to 48 hrs.

The displacement fields will be

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{v}^{(N)} - \mathbf{v}^{(N)(N-p)} + \mathcal{C}_\alpha \\ \mathbf{v}_\beta &= \mathbf{v}^{(N)(N-p)} - \mathcal{C}_\beta \end{aligned}$$

where \mathcal{C}_α and \mathcal{C}_β are zonal velocities representing pure rotational fields around the earth's axes.

The procedure of carrying out the forecast in practice is the following:

In a hexagonal grid with $d \approx 600$ km, the x- and y-components of the wind are read off directly from the map. The grid consists of a set of circles, one at every gridpoint, the diameter of the circles being such that by reading off the height difference across the circle in the unit of 4 meters, one obtains the wind component in the unit of mm per 6 hrs on the sphere corresponding to the scale of the map.

The next step is to compute the x- and y-components of $\mathbf{v}^{(N)}$. We have

$$u^{(N)} = u + \frac{1}{a_N} \nabla^2 u \approx u + \frac{1}{a_N} \frac{4m^2}{d^2} (\bar{u} - u)$$

and, by selecting $a_N = \frac{4}{d^2}$

$$u^{(N)} = m^2 \left[\bar{u} - \frac{m^2 - 1}{m^2} u \right]$$

Thus, $u^{(N)}$ may be computed from the values of u at the gridpoints by means of conversion tables.

The components of $\mathbf{v}^{(N)(N-p)}$ may now be computed in the same way from the components of $\mathbf{v}^{(N)}$, now using the grid size $\sqrt{3} a$.

Now, having constructed a grid consisting of scales at every gridpoint, the spacing of the lines in the scales

being in millimeters, one may for each of the two fields \mathbf{v}_α and \mathbf{v}_β mark off the 6 hrs forwards and backwards displacements, so as to obtain a twelve hrs centred displacement of the grid. The trajectories may then be found as shown in fig. 1.

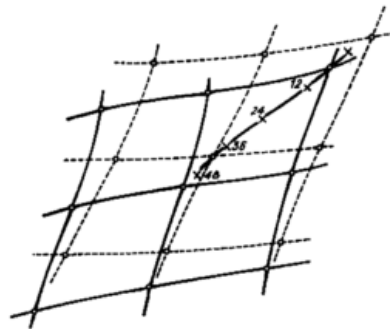


Fig. 1

The first 12 hrs displacement is found by moving the particle from its position in the dotted grid to the corresponding position in the fully drawn grid. The next 12 hrs displacement is found in the same way by moving the particle from its new position in the dotted grid to the corresponding position in the fully drawn grid — and so on.

In order to get the vorticity tendencies in a regular grid, the trajectories are computed backwards from the gridpoints, by displacing first in the field \mathbf{v}_β , and from the resulting position adding the corresponding displacement in the field \mathbf{v}_α .

The absolute vorticity is in the polar stereographic projection computed in the form

$$\frac{1}{\sin \varphi (1 + \sin \varphi)^2} (\bar{z} - z) + \frac{\Omega^2 d^2}{(1 + \sin 50)^2 g} \sin \varphi$$

by means of conversion tables, and from the vorticity tendencies one obtains $\Delta(z-z)$ from another set of conversion tables, after which the integration of the Poisson equation can take place.

This method has some advantages compared to the pure graphical method, namely

by using space-smoothing on the sphere, one obtains the same degree of smoothing at all latitudes.

The absolute vorticity is computed in its correct finite difference form.

Most of the work may be done by assistants, and several persons may work at the same time, which makes it possible to complete a forecast with this method at least as fast as with the graphical method.

At the present moment there are only a few preliminary results with this method, namely 4 48 hrs forecasts for the 500 mb. surface using one 48 hrs timestep. The forecasts are based on the objective analysis carried out in Stockholm by means of the computer BESK. The correlation coefficients for the tendencies over an

area covering a great part of the North Atlantic, Southern Greenland and Western Europe are given below together with the results of the corresponding BESK-forecasts, and furthermore the correlation coefficients between the two sets of forecasts.

	Lagr. method	BESK	Comparison
5. 12. 55	.74	.71	.75
23. 1. 56	.37	.35	.45
30. 1. 56	.36	.45	.32
9. 3. 56	.00	.11	.76

The numbers indicate that the forecasts with the two methods are about equally good, however the errors are to a certain degree different. This is also confirmed by previous results with a slightly different procedure (Tellus vol 8, nr 1). The investigation of the method will continue, and further results will be published later.

Zusammenfassung

Die hier beschriebene Lagrangesche Methode wurde theoretisch von Fjörtoft in einem Artikel in Tellus, Bd. 7, Nr. 4, behandelt. Die praktische Anwendung der Methode im barotropen Falle wird hier erörtert werden.

Die barotrope Vorticity-Gleichung kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi + f) = -(\mathbf{v}^{(N)} - \mathbf{C}) \cdot \nabla (\nabla^2 \psi + f).$$

worin definitionsgemäß

$$\mathbf{v}^{(N)} = \mathbf{k} \times \nabla \psi^{(N)}, \quad \psi^{(N)} = \psi + \frac{1}{a_N} \nabla^2 \psi$$

und \mathbf{C} eine Zonalgeschwindigkeit des Betrages $\frac{2\Omega}{a_N R} \cos \varphi$ ist. Die Vorticity-Gleichung in dieser Form sagt aus, daß absolute Vorticity in dem geglätteten Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}^{(N)} - \mathbf{C}$ erhalten bleibt.

Um die Vorticity in dem geglätteten Feld zu versetzen, wird Fjörtofts Trajektorienregel angewandt, mit deren Hilfe es sich als erfolgreich erwiesen hat, Zeitschritte bis zu 48 Stunden zu verwenden.

Die Verlagerungsfelder sind

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}^{(N)} - \mathbf{v}^{(N)(N-p)} + \mathbf{C}_\alpha$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{v}^{(N)(N-p)} - \mathbf{C}_\beta$$

worin \mathbf{C}_α und \mathbf{C}_β Zonalgeschwindigkeiten sind, die reinen Rotationsfeldern um die Erdachse entsprechen. Der praktische Vorhersageprozeß besteht in folgendem:

In einem hexagonalen Gitter mit $d \approx 600$ km, werden die x- und y-Komponenten direkt aus der Karte abgelesen. Das Gitter besteht aus einem Satz von Kreisen — an jedem Gitterpunkt einer — mit Durchmessern derart, daß man bei Ablesen der Höhendifferenzen quer durch den Kreis in der Einheit von 4 m, die Windkomponente in der Einheit mm pro 6 Std. auf der Kugel erhält, die zum Maßstab der Karte gehört.

Der nächste Schritt besteht in der Berechnung der x- und y-Komponenten von $\mathbf{v}^{(N)}$. Es ist

$$u^{(N)} = u + \frac{1}{a_N} \nabla^2 u \approx u + \frac{1}{a_N} \frac{4m^2}{d^2} (\bar{u} - u)$$

und bei Wahl von $a_N = \frac{4}{d^2}$

$$u^{(N)} = m^2 \left[\bar{u} - \frac{m^2 - 1}{m^2} u \right]$$

Daher kann $u^{(N)}$ aus den u-Werten an den Gitterpunkten mit Hilfe von Umrechnungstabellen berechnet werden. Die Komponenten von $\mathbf{v}^{(N)(N-p)}$ können in derselben Weise aus den Komponenten von $\mathbf{v}^{(N)}$ berechnet werden, in dem die Maschenweite $\sqrt{3} a$ benutzt wird.

Nun, nachdem ein Gitter konstruiert worden ist, welches an jedem Gitterpunkt aus Skalen besteht, deren Linienabstand Millimeter beträgt, kann man für jedes der beiden Felder \mathbf{v}_α und \mathbf{v}_β die 6-stündigen Vor- und Rückwärtsverlagerungen markieren, um eine 12-stündige zentrale Verlagerung des Gitternetzes zu erhalten. Die Trajektorien können dann, wie in Fig. 1 angegeben, gefunden werden.

Um die Vorticity-Tendenzen in einem regulären Gitter zu erhalten, werden die Trajektorien rückwärts von den Gitterpunkten berechnet, indem zuerst im Feld \mathbf{v}_β verlagert wird. Zur resultierenden Position addiert man die entsprechende Verlagerung im Feld \mathbf{v}_α .

Die absolute Vorticity wird in der polaren stereographischen Projektion nach der Formel

$$\frac{1}{\sin \varphi (1 + \sin \varphi)^2} (\bar{z} - z) + \frac{\Omega^2 d^2}{(1 + \sin 50^\circ)^2 g} \sin \varphi$$

mit Hilfe von Umrechnungstabellen bestimmt. Aus den Vorticity-Tendenzen erhält man $\Delta (\bar{z} - z)$ aus einem anderen Satz von Umrechnungstabellen, worauf die Integration der Poissonschen Gleichung stattfinden kann. Diese Methode hat einige Vorteile im Vergleich zur rein graphischen Methode, nämlich: durch räumliche Glättung auf der Kugel erhält man denselben Glättungsgrad in allen Breiten.

Die absolute Vorticity wird in ihrer korrekten Differenzenform berechnet. Der größte Teil der Arbeit kann von Hilfskräften bewältigt werden. Mehrere Personen können gleichzeitig arbeiten, wodurch es möglich ist, die Vorhersage mit dieser Methode mindestens so schnell auszuführen wie mit der graphischen Methode.

Gegenwärtig stehen nur einige wenige vorläufige Ergebnisse mit dieser Methode zur Verfügung, nämlich vier 48-Stunden-Vorhersagen der 500-mb-Fläche unter Benutzung eines 48-stündigen Zeitschritts. Die Vorhersagen basieren auf der objektiven Analyse, die in Stockholm mit der BESK-Rechenmaschine ausgeführt werden. Die Korrelationskoeffizienten für die Tendenzen eines Gebietes, welches einen großen Teil des Nordatlantiks, Südgrönlands und Westeuropas umfaßt, werden unten angegeben, zusammen mit den Ergebnissen der entsprechenden BESK-Vorhersagen, und außerdem der Korrelationskoeffizient zwischen beiden Vorhersagereihen.

	Lagr.-Methode	BESK	Vergleich
5. 12. 55	.74	.71	.75
23. 1. 56	.37	.35	.45
30. 1. 56	.36	.45	.32
9. 1. 56	.00	.11	.76

Die Zahlen zeigen, daß die Vorhersagen mit den beiden Methoden ungefähr gleich gut sind. Jedoch sind die Fehler bis zu einem gewissen Grade unterschiedlich. Dies wird auch durch frühere Ergebnisse mit einer etwas anderen Methode (Tellus Bd. 8, Nr. 1) bestätigt. Die Untersuchung mit der Methode wird fortgesetzt und weitere Ergebnisse werden später veröffentlicht werden.

Numerical Forecasting at the Swedish Military Meteorological Office in 1954—1956

by

Oscar Herrlin

(with 3 figures in the text)

Zusammenfassung

Der Wetterdienst der Schwedischen Luftwaffe hat in zwei Perioden 1. Dezember 1954 — 31. Mai 1955 und 1. November 1955 — 1. Mai 1956 routinemäßig barotrope Vorhersagen für 24, 48 und 72 Stunden mit dem Stockholmer Rechenautomaten BESK erstellt. In der ersten Periode wurden subjektive Analysen des 0300-Z-Termines verwendet, aus denen an den einzelnen Gitterpunkten die Höhenwerte herausgelesen und als Anfangsfeld in die Maschine eingegeben wurden; in der zweiten Periode basierten die Vorhersagen auf einer numerischen Analyse der 1500-Z-Beobachtungen.

Es werden für beide Perioden Ablauf und Zeitbedarf für eine Prognosenrechnung angegeben sowie die Resultate geprüft und mit denjenigen der bisherigen synoptischen Methoden verglichen. Als Vorteile der numerischen Methode werden genannt: Objektivierung der Prognose, früheres Erfassen von großräumigen Umstellungen, leichteres Vorhersagen der Zyklonenbahnen und leichteres Erkennen der möglichen baroklinen Entwicklungen, Personal- und Zeiteinsparung.

Introduction

In 1954 the theoretical researches on, and the preliminary tests of numerical forecast methods conducted at the International Meteorological Institute in Stockholm had reached such a state of development that it seemed desirable to organize full-scale routine tests on operational basis. This numerical method is based on the barotropic model of the atmosphere and permits a presentation of 500 mb forecasts for up to 72 hours. The prospect of presentation of weather charts valid such a long time in advance was naturally most encouraging to the meteorologists in their practical work, but was the quality of these charts as good as that of the charts obtained by means of conventional methods? In order to be able to answer this question, and, also with the view to familiarizing the personnel with this completely new method of forecast, the Meteorological Office of the Royal Swedish Air Force decided to try the numerical method during a test period.

Test period I

The test period began on Dec. 1st 1954 and lasted with short intervals until the end of May, 1955. The daily routine during these tests was mainly as follows: Each day a subjective analysis of the basic chart was made, the chart being of the circum-polar 500 mb 03Z type. This analysis was as a rule completed some time between 12 Z and 13 Z, or when the last observation to be plotted on the chart had arrived.

Next the altitude data at the grid points were read and punched. When certain checks of the altitude data readings had been made the actual computations

started, for which the electronic computer BESK was used. This computation which began at 14 Z generally lasted for 65—70 minutes. The computed altitude values were plotted and analyzed on a chart form which included a considerably smaller area than the basic chart. The transmission in code of the charts took place between 17 Z and 18 Z.

A number of 3—4 professional meteorologists and 3—4 assistants were daily employed with this numerical work.

Verifications

1. During the entire test period a verification was made continuously both of the numerical charts and of the conventional charts. For all the forecasts the correlation coefficient between the computed and the observed changes in altitude were computed. The area which was verified appears from figure 1.

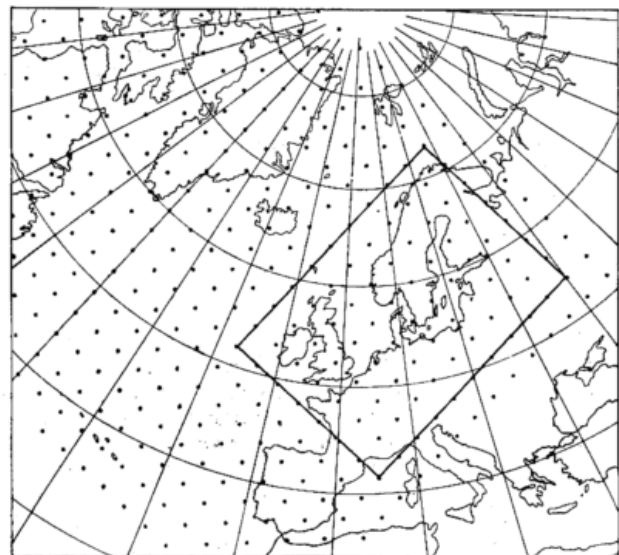


Fig. 1

The small rectangle indicates the area over which the verification of the forecasts was made.

2. The correlation coefficient is not an in every respects satisfactory method of verification, however. There have occurred some cases where forecasts with a very low correlation coefficient have been considered as very good. "Good" is here defined as a very good agreement of the flow pattern of forecast chart with that of the verification chart. In addition to the correlation coefficients another method of verification was therefore introduced: a subjective assessment of the charts. The conventional and the numerical forecasts were compared with each other and at the same time

with the verification chart. As no 72 hours forecasts were made according to the conventional method, the numerical 72 hours forecasts were compared with the conventional 48 hours forecasts that were issued 24 hours later. The assessment was made by a jury of 5 members, representing 4 different meteorological services from 3 different countries. The scale of the estimates included the figures 1—5 where 1 = very bad, 3 = average and 5 = very good agreement. The area of verification was the same as in the case of the correlation calculation.

A summary of the results (the average data) for both methods of verification is given in figure 2.

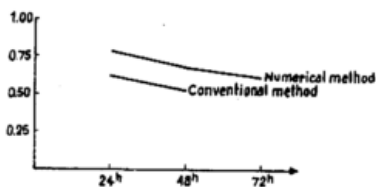


Fig. 2a

Graphical representation of the variation of the correlation coefficients. Test period I.

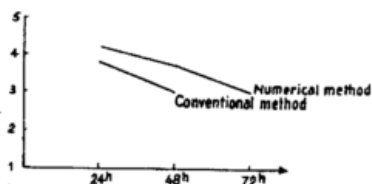


Fig. 2b

Graphical representation of the variation of the subjective scores. Test period I.

It appears from these results that the numerical forecasts were at least as good as the conventional ones. As the numerical method is more objective and superior to the conventional method on that point, it was decided that the RSAF Meteorological Service should continue to produce numerical forecast, beginning from the autumn of 1955.

Test Period II

During this test period which began towards the end of October, 1955, and ended in the beginning of May 1956, some changes were made in the numerical forecasting procedure. The perhaps most important change was the introduction of an objective (numerical) analysis of the 500 mb chart according to a method developed by Döös and Berghorsson. As a result of this change subjective analysis needed only be made, when interruptions in the forecasting occurred that is a rule each Monday as there was an interval every weekend caused by shortage of forecasters. The period 14. 11 — 15. 12 1955 forms an exception to this rule, as no intervals were made and no subjective analysis at all either were made during this 32 days.

The introduction of an objective analysis made it possible to save both time and labour. The personnel occupied with numerical forecast during these period was without any difficulties reduced to 1 meteorologist and 2—3 assistants per day.

Another alteration compared with the procedure during the first test period was that the forecast now were based on the 15 Z material and the work made in the course of the night. In this way on being transmitted to the wings in the morning all the forecast charts offered the most current data available at that time.

Further a number of ameliorations had been introduced in the forecast code, among these a "smoothing procedure".

During the second period much work was concentrated on utilizing the numerical forecast charts in the production of general weather forecasts. Thus each day (in the morning) a so-called comment was issued on the forecast charts, as an attempt to interpret or "translate" the forecast charts into terms of weather. The comment stated among other things what type of weather was to be expected for the next 72—96 hours (3—4 days), when front systems could be expected to pass and so on; the forecast charts offered too a comparatively easy way of identifying the "polarfront-jet" system. In this way the future position of the main front zone was determined.

Routine schedule

The daily routine during the second test period is of the following character: When the 15 Z observations began to arrive, two assistants started collecting and punching altitude and wind data for the 500 mb surface. In this way the station tape required for the objective analysis was prepared. The meteorologist who was in charge of the night forecasting work arrived at 20 Z and started checking the survey of the observation data. For sea areas with far distances between the radiosond posts (such as the Pacific) he made an extrapolation of available "surface observation data" into the 500 mb surface, so that subjectively made observations could be added to the station tape.

When most of the 15 Z observations had arrived, the work was transferred to the computer BESK, and late received observations were transferred there via telex from the Air Force teleprinter office. Certain checks of the data arrangements were made and the analysis computation was started at 00Z, at which time 275—300 observations had generally arrived. The analysis computation being usually completed in 35—40 minutes, the forecasting computation was immediately started. This operation was as a rule completed at about 0230Z. The analysis and the forecasts were plotted and analyzed, the forecast were then coded and transmitted. The forecast charts were then subjected to minute study by the meteorologist, the fronts were outlined and finally the above-mentioned comment was written. This work was usually finished at about 05Z.

Verification and Results

The correlation coefficients have been computed for all the numerical forecasts produced during the period 14. 11 — 22. 12. These coefficients are generally higher than those obtained during the first test period, as will appear from their average values in figure 3.

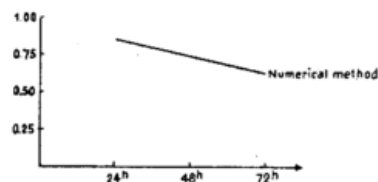


Fig. 3

Graphical representation of the variation of the correlation coefficients. Test period II.

For the last 10 years, or so, the progress made in the technique of 1—2 days forecasts has been very small. The development appears to have become almost stagnant. I believe we have literally squeezed the conventional technique dry. In any case no improvement

worth mentioning has been noticeable as far as the reliability of the forecasts is concerned. Under those circumstances it is not very encouraging to be the spokesman for meteorology within the armed forces of a country. The only consolation for a small country is that neither personnel nor money could have changed the situation to any considerable extent, as indicated by the experience of the larger countries.

When therefore Prof. Rossby told me that he was convinced that a practicable program for numerical forecasts of the 500 mb surface now was available, we within the Swedish Military Meteorological Service were eager to develop and test this system in our general routine. As has been shown, our experiences have been most favorable and I feel convinced that this is only the modest beginning of a new era within the forecasting technique, altogether comparable with the era created by the Norwegian school in the nineteen twenties.

Our greatest gains as yet have been:

1. The results are objective, which means that we have drastically reduced our previous dependence on

long experience in forecasting work. A newly graduated scientist (forecaster) can be employed directly with the production of progcharts. We now intend to investigate whether it might not be possible to carry out a large amount of this work with assistants instead of with professional meteorologists, of which latter there is a great shortage in Sweden at present.

2. On a large number of occasions we have obtained forecasts of a change to a quite new type of weather at an earlier date than would generally have been possible with conventional methods and these forecasts of change of type have often been of high accuracy.

3. Forecast of persistence in a weather situation have also been more reliable.

4. It has been easier to predict the routes of disturbances and hence to focus the attention on the probable spots for the possible flare-up of sudden baroclinic developments.

5. Time and personnel have been saved.

Über die Einbeziehung divergenter Windkomponenten in Vorhersagemodelle

von

Karl Hinkelmann

(mit 1 Abbildung im Text)

Zusammenfassung

An Hand eines einfachen Beispiels wird untersucht, inwieweit sich die Resultate modifizieren, wenn an Stelle der quasi-geostrophischen Modelle erweiterte Gleichungen benutzt werden, die auch Transporte durch nichtgeostrophische Winde berücksichtigen. Zu diesem Zwecke wird der geostrophische Windansatz durch Hinzufügen eines aus einem Geschwindigkeitspotential ableitbaren Vektors erweitert.

Die Erweiterung bewirkt, daß die Hauptmängel der geostrophischen Modelle vermieden werden, daß andererseits aber besonders in Gebieten nahezu verschwindender absoluter Vorticity die Resultate nicht mehr als realistisch betrachtet werden können.

Einleitung

Bekanntlich enthalten die sogenannten quasigeostrophischen Modelle gewisse Inkonsistenzen und Unzulänglichkeiten, die wesentlich daraus resultieren, daß der Windvektor in unterschiedlicher Weise angenähert wird, je nachdem in welcher Verbindung und in welcher Form er in den Differentialgleichungen auftritt. Insbesondere wird in den quasigeostrophischen Gleichungen der Wind stets geostrophisch approximiert, wenn er in Transporttermen auftritt, d. h. ageostrophische Horizontaltransporte bleiben unberücksichtigt.

Die quasigeostrophischen Gleichungen gestatten deshalb z. B. nicht, den Prozeß der Okklusion zu erfassen, der wesentlich auf nichtgeostrophischen Temperaturadvektionen beruht. Auch die namentlich bei Entwicklungsvorgängen stattfindenden Energieumsetzungen werden durch die quasigeostrophischen Modelle noch nicht einmal qualitativ richtig beschrieben. Zwar erfassen diese annähernd genau die Änderungen der kinetischen Energie, nicht aber die damit verbundenen äquivalenten Änderungen der potentiellen oder inneren Energie, vgl. Hollmann (1).

Im folgenden soll an Hand eines einfachen analytisch behandelten Beispiels die Frage diskutiert werden, inwieweit durch eine naheliegende Erweiterung des Windansatzes die Mängel der quasigeostrophischen Approximation beseitigt werden können, ohne daß neue grundsätzliche Defekte durch den gewählten speziellen Windansatz in die Modellgleichungen hineingetragen werden.

1. Modell-Differentialgleichungen

Wir setzen voraus, daß die hydrostatische Gleichung $\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}$ erfüllt ist und benutzen grundsätzlich ein kartesisches Koordinatensystem x (→ Osten), y (→ Norden), p (= vertikale Koordinate).

Nach dem Vorschlag von Charney (2) und Thompson (3) werde an Stelle der geostrophischen Approximation

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{f} \mathbf{f} \times \nabla \Phi$$

künftig die sogenannte Balance-Gleichung verwendet. Diese entsteht dadurch, daß man auf die Bewegungsgleichung den Divergenzoperator anwendet und anschließend alle die Winddivergenz $\nabla \cdot \mathfrak{B}$ explicit enthaltenden Terme vernachlässigt. Diese Verstümmelung der Divergenzgleichung wirkt in ähnlicher Weise wie die Benutzung der geostrophischen Approximation in den quasigeostrophischen Modellen als Filter für Lärmvorgänge in Form von Schall- bzw. Gravitationswellen.

Es mögen den späteren Rechnungen demnach folgende Differentialgleichungen und Randbedingungen zugrunde gelegt werden:

Vorticitygleichungen in der Form

$$[1] \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta \mathfrak{B}) = 0.$$

Hierin ist der aus dem Term $\omega \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial p}$ der Bewegungsgleichung resultierende, die künftigen Rechnungen unnötig verkomplizierende Ausdruck $\mathbf{f} \cdot \nabla \times (\omega \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial p})$ vernachlässigt worden.

Balance-Gleichung in der Form

$$[2a] \quad 2J(u, v) - \nabla \cdot (\mathbf{f} \mathfrak{B}) = \nabla^2 \Phi.$$

Im Falle der später gemachten Annahme eines konstanten Coriolis-Parameters $f = \text{const}$ vereinfacht sich diese Gleichung in

$$[2b] \quad 2J(u, v) + f \zeta = \nabla^2 \Phi^*)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$[3a] \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0.$$

Randbedingungen:

$$[4] \quad \omega(p=0) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(p=p_0) = 0.$$

Mit den Randbedingungen [4] schreibt sich die Kontinuitätsgleichung auch in der Form

$$[3b] \quad \omega = - \int_0^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dp = - \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dp$$

*) Wird hierin noch der Term $2J(u, v)$ vernachlässigt oder verschwindet dieser wegen speziell gewählter Bedingungen, so ist $\zeta = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi$, d. h. die relative Vorticity ζ ist mit der geostrophischen relativen Vorticity identisch.

In diesem Falle ist der Bedingung $\zeta = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi$ der erweiterte Windansatz

$$\mathfrak{B} = \mathbf{f} \times \frac{1}{f} \nabla \Phi + \nabla \varphi = \mathfrak{B}_g + \nabla \varphi, \quad \mathbf{f} = \text{const},$$

äquivalent, wobei der Windanteil $\nabla \varphi$ aus der Kontinuitätsgleichung zu bestimmen ist.

und für die Divergenz $D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ gilt die Beziehung

$$[3c] \quad \int_0^{p_0} D dp = 0.$$

Endlich benutzen wir an Stelle des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik die Adiabatengleichung in der Form:

$$[5] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} + \mathfrak{B} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \sigma \omega = 0.$$

In den obigen Gleichungen bedeuten, wie üblich,

$\mathfrak{B} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ = horizontaler Windgeschwindigkeitsvektor,

$\omega \equiv \frac{dp}{dt}$ = generalisierte Vertikalgeschwindigkeit im benutzten p-System,

$J = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$ = Jakobi-Operator,

$\Phi = gz$ = Geopotential, g = Schwerebeschleunigung,

$\eta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f$ = absolute Vorticity,

$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ = relative Vorticity,

$\sigma = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{1}{\kappa p} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$ = statische Stabilität,

p_0 = Druck am eben angenommenen Erdboden.

In dem später zu behandelnden Beispiel verschwindet in Gl. [2b] der nichtlineare Term $2J(u,v)$ und die relative Vorticity ζ wird mit der geostrophischen Vorticity ζ_g identisch, $f = \text{const}$ vorausgesetzt.

In diesem Falle ist das Gleichungssystem [1—5] ausreichend, bei Vorgabe der Normalkomponente auf der seitlichen Begrenzung des betrachteten Vorhersagegebiets G , die Windkomponenten u und v in G und auf dem Rand zu einem festen Zeitpunkt zu berechnen, wenn Φ als Funktion von x, y und p in G vorgegeben wird, wie dies auch bei den quasigeostrophischen Modellen der Fall ist.

Die Eindeutigkeit in der Berechnung von \mathfrak{B} aus dem vorgegebenen Geopotentialfeld Φ in G garantiert gleichzeitig die Ausschaltung kurzperiodischer Lärmvorgänge.

2. Spezielle Modellgleichungen und Anfangsfeld

Wir wollen uns bei dem zu betrachtenden Beispiel darauf beschränken, daß z. Zt. $t = 0$ (Anfangslage) alle in den Differentialgleichungen auftretenden Terme, insbesondere $\mathfrak{B}, \nabla \Phi, f$ und σ unabhängig von y sind. Dann werden aus Symmetriegründen diese Funktionen auch zu allen späteren Zeiten von der meridionalen Koordinate unabhängig sein.

Z. Zt. $t = 0$ werde das Geopotentialfeld Φ in der Form

$$[6] \quad \Phi(x, y, p, t = 0) = \Phi_0 - U(p)fy - A \cos kx + \Phi^*(p)$$

angenommen.

Diese Funktion beschreibt eine barotrope, d. h. von p unabhängige geostrophische Windströmung ($-A \cos kx$), mit Tiefdruckrinnen an den Stellen $x = nL$; $L = \frac{2\pi}{k}$, $n = \pm 0, 1, 2, \dots$, die in einer lediglich von p abhängigen geostrophischen Grundströmung $U(p)$ eingebettet ist.

Aus der Unabhängigkeit des Windfeldes von y resultiert $J(u, v) = 0$. Wir setzen der einfacheren Rech-

nung wegen voraus, daß $f = \text{const}$ und daß $\sigma = 0$ (Advektionsmodell). Unter diesen speziellen Voraussetzungen vereinfachen sich die Differentialgleichungen zu:

Balancegleichung:

$$[7] \quad f \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \equiv \zeta_g, \quad \eta = \eta_g = \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + f,$$

Vorticity-Gleichung:

$$[8] \quad \frac{\partial \eta_g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u \eta_g) = 0,$$

Kontinuitätsgleichung:

$$[9] \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

und unter Berücksichtigung der Randbedingungen [4]

$$[10] \quad \int_0^{p_0} \frac{\partial u}{\partial x} dp = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{p_0} u dp = 0,$$

Adiabatengleichung mit $\sigma = 0$:

$$[11] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - v U' f = 0 \quad \text{mit} \quad U' \equiv \frac{dU}{dp}.$$

Anstelle der Balancegleichung kann der Windansatz:

$$[12] \quad \begin{aligned} u &= U + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{1}{f} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

verwendet werden, der wegen $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$ automatisch die Gleichung [7] befriedigt.

Zum Vergleich seien die entsprechenden quasigeostrophischen Gleichungen angeschrieben:

$$[12a] \quad u = U, \quad v = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$[8a] \quad \frac{\partial \eta_g}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_g}{\partial x} - f \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

$$[11a] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} U' = 0.$$

3. Aus den Gleichungen [7]—[12] z. Zt. $t = 0$ herleitbare Funktionen

Speziell für den Zeitpunkt $t = 0$, für den Φ durch [6] spezialisiert ist, erhalten wir, wenn die Funktionen z. Zt. $t = 0$ durch den Index $_0$ gekennzeichnet werden:

$\frac{\partial v_0}{\partial x} = (\zeta_g)_0 = \frac{Ak^2}{f} \cos kx$, und durch Integration über x

$$[13] \quad v_0 = \frac{Ak}{f} \sin kx + v^*(p),$$

worin die nur von p abhängige Funktion v^* noch zu bestimmen ist. Aus [8] und [11] folgt durch Elimination

von $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ bzw. $\frac{\partial \eta_g}{\partial t}$, mit $\eta_g = \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + f = \frac{1}{f} Ak^2 \cos kx + f$

$\frac{\partial}{\partial x} [(U' + \frac{\partial u_0}{\partial p})(\eta_g)_0] = 0$, durch Integration über x

$$\frac{\partial u_0}{\partial p} = \frac{F'(p)}{(\eta_g)_0} - U', \quad F'(p) \equiv \frac{dF(p)}{dp}$$

und schließlich durch Integration über p

$$[14] \quad u_0 = \frac{F(p)}{(\eta_g)_0} - U + H(x)$$

worin die Integrationsfunktionen $F(p)$ und $H(x)$ noch zu bestimmen sind.

Durch Mittelung der Gleichung [14] über p mit $(\bar{\quad}) \equiv \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} (\quad) dp$ erhalten wir unter Beachtung von [10]

$$u_0 = \text{const} = \frac{\bar{F}}{(\eta_g)_0} - \bar{U} + H(x)$$

und nach Elimination von H(x) aus [14]

$$[15] \quad u_0 = \bar{u}_0 + \frac{F - \bar{F}}{(\eta_g)_0} - (U - \bar{U}).$$

Zur Bestimmung der Funktion F und der Konstanten \bar{u}_0 bleibt, genau wie im Falle der Berechnung der Meridionalgeschwindigkeit v_0 , eine von p abhängige willkürliche Funktion offen.

Wir wollen als willkürliche Integrationsfunktion die über eine Periode gemittelte Zonalgeschwindigkeit

$$u^*(p) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L u_0 dx$$

eingeführen. Durch Mittelung der Gleichung [15] über eine Wellenlänge erhalten wir

$$u^*(p) = \bar{u}_0 + \frac{F - \bar{F}}{L} \int_0^L \frac{1}{(\eta_g)_0} dx - (U - \bar{U}).$$

Hierin ist mit der Abkürzung $\mu \equiv \frac{Ak^2}{f^2}$

$$[16] \quad \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{(\eta_g)_0} dx = \frac{k}{2\pi f} \int_0^k \frac{dx}{(1 + \mu \cos kx)} = \frac{1}{f \sqrt{1 - \mu^2}}$$

Die Größe μ gibt das Verhältnis der relativen Vorticity im Zentrum der Tiefdruckrinne zum Coriolisparameter an und charakterisiert die Intensität der Störung. Aus Stabilitätsgründen wird $\mu \ll 1$ angenommen.

Wir erhalten damit für $u^*(p)$

$$u^*(p) = \bar{u}_0 + \frac{F - \bar{F}}{f \sqrt{1 - \mu^2}} - (U - \bar{U}),$$

woraus durch Mittelung über p sofort $\bar{u}^* = \bar{u}_0$ folgt, und für $F - \bar{F}$

$$F - \bar{F} = [(u^* - \bar{u}^*) + (U - \bar{U})] f \sqrt{1 - \mu^2}$$

folgt.

Für die Zonalgeschwindigkeit u_0 resultiert durch Elimination von $F - \bar{F}$ schließlich:

$$[17] \quad u_0 = \bar{u}^* + \frac{f \sqrt{1 - \mu^2}}{(\eta_g)_0} [(u^* - \bar{u}^*) + (U - \bar{U})] - (U - \bar{U}).$$

Die aus dem Gleichungssystem nicht zu erschließenden Funktionen $u^*(p)$ und $v^*(p)$ bestimmen wir aus der Forderung, daß \mathfrak{B} , über eine Wellenlänge gemittelt, gleich dem mittleren geostrophischen Wind sein soll. Es ist also:

$$\frac{1}{L} \int_0^L \mathfrak{B}_0 dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{1}{f} \mathfrak{t} \times \nabla \Phi_0 \right) dx,$$

woraus folgt:

$$[18] \quad u^*(p) = U(p) \quad \text{und} \quad v^*(p) = 0$$

Diese Forderung tritt an die Stelle der seitlichen Randbedingungen bei nicht unendlich ausgedehnten Feldern.

Für die Windkomponente resultiert damit endlich:

$$[19] \quad u_0 = U + 2(U - \bar{U}) \left[\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{1 + \mu \cos kx} - 1 \right] \quad \text{und}$$

$$[20] \quad v_0 = \frac{Ak}{f} \sin kx.$$

Für schwache Strömungen, $\mu \ll 1$, reduziert sich [19] auf

$$[19a] \quad (u_0) (\mu \ll 1) \approx U + 2(\bar{U} - U) \mu (\cos kx - \frac{1}{2} \mu \cos 2kx).$$

Aus der Adiabategleichung [11] sowie aus der über p gemittelten Vorticity-Gleichung [8] berechnet man leicht $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0$, aus der Kontinuitätsgleichung [9] und den Randbedingungen für ω erhält man ω_0 und aus der nach t differenzierten hydrostatischen Gleichung die Temperaturtendenz $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_0$.

Ohne Wiedergabe der Rechnung seien nachfolgend die aus dem System [7-12] resultierenden Funktionen z. Zt. $t = 0$ für die spezielle Anfangssituation [6] wiedergegeben und den aus dem entsprechenden quasi-geostrophischen Gleichungssystem errechneten gegenübergestellt:

Modellgleichungen [7-12]	quasigeostrophisches Gleichungssystem [8a, 11a, 12a]
[19] $u_0 = U + 2(U - \bar{U}) \left[\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{1 + \mu \cos kx} - 1 \right]$	$u_0 = U$, bei Berücksichtigung der aus der Lösung für ω ableitbaren ageostrophischen Zonal-komponente:
[19a] $u_0 (\mu \ll 1) \approx U + 2(\bar{U} - U) \mu [\cos kx - \frac{1}{2} \mu \cos 2kx]$	$u_0 = U + 2(\bar{U} - U) \mu \cos kx$
[20] $v_0 = \frac{Ak}{f} \sin kx$	$v_0 = \frac{Ak}{f} \sin kx$
[21] $(\nabla \cdot \mathfrak{B})_0 = 2(U - \bar{U}) \mu k \sin kx \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{(1 + \mu \cos kx)^2}$	$(\nabla \cdot \mathfrak{B})_0 = 2(U - \bar{U}) \mu k \sin kx$
[21a] $(\nabla \cdot \mathfrak{B})_0 (\mu \ll 1) \approx 2(U - \bar{U}) \mu k (\sin kx - \mu \sin 2kx)$	
[22] $\omega_0 = 2 \int_0^p (\bar{U} - U) dp \cdot \mu k \sin kx \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{(1 + \mu \cos kx)^2}$	
[22a] $\omega_0 (\mu \ll 1) \approx 2 \int_0^p (\bar{U} - U) dp \cdot \mu k (\sin kx - \mu \sin 2kx)$	$\omega_0 = 2 \int_0^p (\bar{U} - U) dp \mu k \sin kx$
[23] $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 = - (2 \bar{U} - U) Ak \sin kx$	$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_0 = - (2 \bar{U} - U) Ak \sin kx$
[24] $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_0 = - \frac{p}{R} U' Ak \sin kx$	$\left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_0 = - \frac{p}{R} U' Ak \sin kx$

4. Aus den nach t differenzierten Gleichung [7—12] z. Zt. $t = 0$ herleitbare Funktionen

Völlig analog gewinnt man die zeitlichen Ableitungen der in 3. wiedergegebenen Lösungsfunktionen z. Zt. $t = 0$ aus den nach t differenzierten Gleichungen

[7—12], unter zusätzlicher Verwendung der Lösungsfunktionen nach 3. Sie seien wieder ohne Angabe der Rechnung nachfolgend angeschrieben, soweit sie für spätere Betrachtungen interessieren, und mit den aus den quasigeostrophischen Gleichungen resultierenden entsprechenden Funktionen verglichen:

Modellgleichungen [7—12]	quasigeostrophische Gleichungen [8a, 11a, 12a]
[25] $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = \frac{\mu k \sin kx}{(1 + \mu \cos kx)^3} \sqrt{1 - \mu^2} \{ (U^2 - \bar{U}^2) + 4 \bar{U} (\bar{U} - U) + \mu \cos kx [2 (U^2 - \bar{U}^2) + 6 \bar{U} (\bar{U} - U)] \}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = 0$ unter Berücksichtigung ageostrophischer Windkomponenten:
[25a] $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 (\mu \ll 1) \approx \mu k \sin kx \{ (U^2 - \bar{U}^2) + 4 \bar{U} (\bar{U} - U) - \mu \cos kx [(U^2 - \bar{U}^2) + 6 \bar{U} (\bar{U} - U)] \}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = \mu k \sin kx \{ (U^2 - \bar{U}^2) + 4 \bar{U} (\bar{U} - U) \}$
[26] $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = - (2\bar{U} - U) \frac{Ak^2}{f} \cos kx$	$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = - (2\bar{U} - U) \frac{Ak^2}{f} \cos kx$
[27] $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_0 = \frac{\mu k^2 \sqrt{1 - \mu^2}}{(1 + \mu \cos kx)^4} \left\{ \cos kx \int_0^p [\bar{U}^2 - U^2 + 4 \bar{U} (U - \bar{U})] dp + \mu \int_0^p [3 (\bar{U}^2 - U^2) + 10 \bar{U} (U - \bar{U})] dp - 2 \mu \sin kx \int_0^p [(\bar{U}^2 - U^2) + 2 \bar{U} (U - \bar{U})] dp + \mu^2 \cos kx (1 + \sin^2 kx) \int_0^p [2 (\bar{U}^2 - U^2) + 6 \bar{U} (U - \bar{U})] dp \right\}$	
[27a] $\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_0 (\mu \ll 1) \approx \mu k^2 \left\{ \cos kx \int_0^p [\bar{U}^2 - U^2 + 4 \bar{U} (U - \bar{U})] dp - \mu \cos 2 kx \int_0^p [\bar{U}^2 - U^2 + 6 \bar{U} (U - \bar{U})] dp \right\}$	$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)_0 = \mu k^2 \cos kx \int_0^p [\bar{U}^2 - U^2 + 4 \bar{U} (U - \bar{U})] dp$
[28] $\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_0 &= (2\bar{U} - U)^2 Ak^2 \cos kx + \\ &+ [\bar{U}^2 - \bar{U}^2 - (U - \bar{U})^2] \sqrt{1 - \mu^2} Ak^2 \frac{\cos kx}{1 + \mu \cos kx} - \\ &- 2 (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \sqrt{1 - \mu^2} \frac{Ak^2}{\mu} \ln (1 - \mu \cos kx) + \\ &+ [\bar{U}^2 - \bar{U}^2 - (U_0 - \bar{U})^2] \frac{\mu Ak^2}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}} + \\ &+ 2 (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \sqrt{1 - \mu^2} \frac{Ak^2}{\mu} \ln \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \mu^2}) \end{aligned}$	
[28a] $\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_0 (\mu \ll 1) &\approx (4\bar{U}^2 - 2 \bar{U} U - \bar{U}^2) Ak^2 \cos kx + \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{U} - U)^2 Ak^2 \mu \cos 2 kx + \\ &+ \frac{1}{2} [(\bar{U} - U)^2 - (U_0 - \bar{U})^2] Ak^2 \mu \end{aligned}$ mit $U_0 = U(p=p_0)$	$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_0 = (4\bar{U}^2 - 2 \bar{U} U - \bar{U}^2) Ak^2 \cos kx$
[29] $\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}\right)_0 = - \frac{2p U'}{R} [(U - 2\bar{U}) Ak^2 \cos kx + (\bar{U} - U) \sqrt{1 - \mu^2} Ak^2 \frac{\cos kx}{1 + \mu \cos kx}]$	
[29a] $\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}\right)_0 (\mu \ll 1) \approx \frac{2p U'}{R} [\bar{U} Ak^2 \cos kx + \frac{1}{2} (\bar{U} - U) Ak^2 \mu (1 + \cos 2 kx)]$	$\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}\right)_0 = \frac{2p U'}{R} \cdot \bar{U} Ak^2 \cos kx$

4. Vorteile des erweiterten Windansatzes

Wir entnehmen den in den Abschnitten 2. und 3. an-
geschriebenen Funktionen, daß die Lösungen der
nichtgeostrophischen Modellgleichungen mit abneh-
mender Intensität der Störung, $\mu \rightarrow 0$, gegen die ent-
sprechenden Lösungen der quasigeostrophischen Mod-
ellgleichungen konvergieren. Wir werden im folgen-
den zeigen, daß das nichtgeostrophische Modell, zu-
mindest für kleine Störungen, bei denen $\mu \ll 1$ oder
 $|\xi| \ll 1$, die bereits in der Einleitung angeführten Män-
gel des quasigeostrophischen Modells vermeidet:

4.1. Energiebilanz

Wir wollen die Erfüllung der Energiebilanzgleichung
lediglich für die über einen Periodizitätsbereich ge-
mittelten Energien nachprüfen und führen zur ein-
facheren Schreibweise ein:

$$\overline{(\quad)} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L (\quad) dx \text{ und, wie bereits benutzt}$$

$$\overline{(\quad)} \equiv \frac{1}{p_0} \int_0^{p_0} (\quad) dp,$$

so daß sich die Mittelung über einen vollen Periodizi-
tätsbereich darstellt zu $\overline{(\quad)}$.

Nach den stringenten Gleichungen im p-System,
wenn lediglich die Gültigkeit der hydrostatischen Gle-
ichung vorausgesetzt wird, gilt dann bei adiabatischen
Zustandsänderungen und Reibungsfreiheit die folgende
Energiebilanz:

$$[30] \quad \frac{\partial}{\partial t} \overline{K} = -c_p \frac{\partial}{\partial t} \overline{T}, \quad T = \text{Temperatur,}$$

$$c_p T = \text{Enthalpie, } K = \frac{3}{2} \text{ kinetische Energie.}$$

Die Summe von kinetischer Energie und Enthalpie,
gemittelt über p und x, ist konstant. Es sollte auch
von den nur approximativ gültigen Modellgleichungen
erwartet werden, daß deren Lösungen wenigstens
qualitativ die Energiebilanzgleichung befriedigen.

Betrachten wir vorerst die Änderungen der Energien
bei Zugrundelegung quasigeostrophischer Gleichungen:
In dem speziell gewählten Beispiel ist

$$\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_0 = \frac{1}{f^2} \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 = \frac{1}{f^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 =$$

$$- \frac{1}{f^2} Ak^2 (2\bar{U} - U) \sin kx \cos kx$$

und $\overline{\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_0} = 0$.

Ebenso verschwindet wegen $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0 = -\frac{p}{R} U' A k \sin kx$ die
Tendenz der über eine Wellenlänge gemittelten Tem-
peratur:

$$\overline{\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0} = 0.$$

Betrachten wir die zweiten zeitlichen Ableitungen der
Energien im quasigeostrophischen Fall, so ist

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right)_0 = \frac{1}{f^2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 \right]^2 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_0 \right\} =$$

$$= Ak^2 \mu [(2\bar{U} - U)^2 \cos^2 kx - (4\bar{U}^2 - 2\bar{U}U - \bar{U}^2) \sin^2 kx]$$

und

$$[31] \quad \overline{\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right)_0} = \frac{Ak^2 \mu}{2} [(\bar{U} - U)^2 + (\bar{U}^2 - \bar{U}^2)].$$

Da stets $\bar{U}^2 \geq \bar{U}^2$, so nimmt in dem speziellen Beispiel
die über L gemittelte kinetische Energie in allen
Niveaus zu, solange $U \neq \bar{U}$.

Es ist aber andererseits, vgl. [29a, geostr.]

$$[32] \quad \overline{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0} = 0.$$

D. h. die Zunahme der kinetischen Energie wird nicht
durch eine äquivalente Abnahme der Enthalpie kom-
pensiert. Gemittelt über den Periodizitätsbereich ist

$$[33] \quad \overline{\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right)_0} = Ak^2 \mu (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \geq 0 \text{ und } \overline{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0} = 0.$$

Wir betrachten zum Vergleich die aus den nichtgeo-
strophischen Modellgleichungen [7-12] resultierenden
Energieumsetzungen und beschränken uns dabei auf
den geostrophischen Anteil der kinetischen Energie
sowie auf kleine Störungen $\mu \ll 1$. Es ist

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right)_0 = \frac{1}{f^2} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 \right]^2 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_0 \right\}$$

und für kleine μ , vgl. Gln. [23 und 28a],

$$\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right)_0 (\mu \ll 1) \approx Ak^2 \mu [(2\bar{U} - U)^2 \cos^2 kx - (4\bar{U}^2 - 2\bar{U}U - \bar{U}^2) \sin^2 kx -$$

$$- 2(\bar{U} - U)^2 \mu \cos kx \sin^2 kx]$$

und

$$[34] \quad \overline{\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}\right)_0} (\mu \ll 1) \approx \frac{Ak^2 \mu}{2} [(\bar{U} - U)^2 + (\bar{U}^2 - \bar{U}^2)] \text{ und}$$

$$[35] \quad \overline{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0} (\mu \ll 1) \approx Ak^2 \mu (\bar{U}^2 - \bar{U}^2).$$

Für kleine μ erhalten wir demnach für die Änderung
der mittleren (geostrophisch angenäherten) kinetischen
Energie die gleichen Ausdrücke wie bei Verwendung
der Resultate des quasigeostrophischen Modells, vgl.
[32] und [33].

Für die entsprechenden Änderungen der Enthalpie
erhalten wir dagegen, vgl. [29a]:

$$[36] \quad \overline{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0} (\mu \ll 1) \approx Ak^2 \mu \cdot \frac{pU'}{R} (\bar{U} - U)$$

und

$$[37] \quad c_p \overline{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0} (\mu \ll 1) \approx Ak^2 \mu \frac{c_p}{p_0 R} \int_0^{p_0} p U' (\bar{U} - U) dp =$$

$$- Ak^2 \mu \frac{c_p}{2R} [(\bar{U} - U_0)^2 - (\bar{U}^2 - \bar{U}^2)], \quad U_0 \equiv U(p = p_0)$$

Ein Vergleich der Ausdrücke [35] und [37] ist erst
möglich, wenn die Funktion $U(p)$ bekannt ist. Wir
zeigen, daß die Annahme $\sigma = 0$ die Funktion $U(p)$
bestimmt und daß damit die Ausdrücke [35] und [37]
dem Betrage nach übereinstimmen.

Bildet man aus [6] $\sigma_0 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial p^2} + \frac{1}{\kappa p} \frac{\partial \Phi_0}{\partial p}$, so folgt, daß

Φ^* und U wegen $\sigma = 0$ den Gleichungen

$$\frac{d^2 \Phi^*}{dp^2} + \frac{1}{\kappa p} \frac{d\Phi^*}{dp} = \frac{d^2 U}{dp^2} + \frac{1}{\kappa p} \frac{dU}{dp} = 0 \text{ genügen müssen.}$$

Die letztere Gleichung bestimmt die Funktion $U(p)$ zu

$$[38] \quad U = U^0 - (U^0 - U_0) \left(\frac{p}{p_0}\right)^\gamma, \quad U^0 = U(p=0), \quad \gamma = \frac{R}{c_p}.$$

Mit [38] wird

$$(\bar{U} - U_0)^2 = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} (U^0 - U_0)^2$$

und

$$(\bar{U}^2 - \bar{U}^2) = \frac{\gamma^2}{(2\gamma+1)(\gamma+1)^2} \cdot (U^0 - U_0)^2$$

und wir erhalten anstelle von [37]:

$$[37a] \quad c_p \overline{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_0} (\mu \ll 1) \approx - Ak^2 \mu (\bar{U}^2 - \bar{U}^2).$$

Unter den speziellen Annahmen ist jetzt, im Gegensatz zum quasigeostrophischen Modell, zumindest für kleine μ , die Konstanz der mittleren Gesamtenergie gewahrt. Man kann daraus schließen, daß das nicht-geostrophische Modell allgemein die Energiethoreme wenigstens qualitativ richtig beschreibt und damit auch Aussagen über Energieumsetzungen liefert!

4.2. Okklusionsprozeß

Der Okklusionsprozeß wird dadurch eingeleitet, daß in Bodennähe die auf der Vorderseite des Tiefs aus Süden vordringende Warmluft sich kontrahiert und aufsteigt, die auf der Rückseite des Tiefs aus Norden einströmende Kaltluft sich ausbreitet und absinkt. Analytisch müßte dieser einsetzende Okklusionsprozeß durch eine negative Korrelation zwischen Temperatur und Winddivergenz in Bodennähe zum Ausdruck kommen. Es resultiert im Mittel eine Abkühlung in bodennahen, eine Erwärmung in hohen Schichten.

Wir betrachten zunächst das quasigeostrophische Modell und benutzen die Adiabatangleichung [11a] mit

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = f U' \frac{p}{R}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathfrak{B}_g \cdot \nabla T = -\nabla \cdot (\mathfrak{B}_g T) + T \nabla \cdot \mathfrak{B}_g = -\nabla \cdot (\mathfrak{B}_g T).$$

Da $\nabla \cdot \mathfrak{B}_g$ verschwindet, verschwindet auch die über eine Wellenlänge gemittelte Temperaturänderung für alle Zeiten, wenn man nicht in Abweichung von den Modellgleichungen bei der Berechnung der Temperaturänderung ageostrophische Temperaturadvektionen berücksichtigt.

Im nichtgeostrophischen Falle ist

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathfrak{B} T) + T \nabla \cdot \mathfrak{B} \quad \text{und}$$

$$[39] \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \overline{T \nabla \cdot \mathfrak{B}} \quad \text{und entsprechend}$$

$$[40] \quad \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\overline{T \nabla \cdot \mathfrak{B}}) = \frac{\partial T}{\partial t} \nabla \cdot \mathfrak{B} + T \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathfrak{B}$$

Z. Zt. $t = 0$ hängt T nicht von x ab und man erhält anstelle von [39, 40] deshalb

$$[39a] \quad \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}\right)_0 = 0 \quad \text{und}$$

$$[40a] \quad \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_0 \nabla \cdot \mathfrak{B}_0 = -\frac{2p}{R} \mu Ak^2 U' (U - \overline{U}) \sin^2 kx =$$

$$-\frac{p}{R} \mu Ak^2 U' (U - \overline{U}) \quad \begin{matrix} < 0 \text{ für } U < \overline{U} \\ > 0 \text{ für } U > \overline{U} \end{matrix}$$

da $U' < 0$ vorausgesetzt wird.

Es entwickelt sich also in Bodennähe, $U < \overline{U}$, eine negative Korrelation zwischen T und $\nabla \cdot \mathfrak{B}$: $\frac{\partial}{\partial t} (\overline{T \nabla \cdot \mathfrak{B}}) < 0$, eine positive Korrelation in den Schichten $U > \overline{U}$, und die Atmosphäre kühlt sich im Mittel in Bodennähe ab und erwärmt sich in hohen Schichten. Die im quasigeostrophischen Modell unterdrückten Okklusionsvorgänge werden durch den erweiterten Windansatz des nichtgeostrophischen Modells im richtigen Sinne erfaßt.

4.3. Einfluß der Winddivergenz auf die Entwicklung

Bei Benutzung quasigeostrophischer Gleichungen ist man zur Wahrung der Divergenzeigenschaft von $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ gezwungen, in der Vorticity-Gleichung den Divergenzterm $\eta \nabla \cdot \mathfrak{B}$ durch $f \nabla \cdot \mathfrak{B}$, $f = \text{const}$, zu ersetzen, also den Term $\zeta \nabla \cdot \mathfrak{B}$ zu vernachlässigen, der die unter-

schiedliche Wirkung von Winddivergenzen in zyklonalen und antizyklonalen Gebieten beinhaltet.

Die Mitnahme dieses Termes ist jedoch insofern erwünscht, als dieser für die asymmetrische Entwicklung der Tief- und Hochdruckgebiete verantwortlich ist, siehe Abschnitt 4.4.

Wir zeigen an unserem einfachen Beispiel, daß die Mitnahme des Ausdruckes $\zeta \nabla \cdot \mathfrak{B}$ in der geostrophisch approximierten Vorticity-Gleichung zu sinnlosen Ergebnissen führt.

Verwendet man anstelle der Gleichung [8a] die besser approximiert erscheinende Gleichung

$$[41] \quad \frac{\partial \eta_g}{\partial t} + U \frac{\partial \eta_g}{\partial x} = -\eta_g \nabla \cdot \mathfrak{B} = \eta_g \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

so erhält man, wie bisher, vgl. [23 und 28a]

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 = -(2\overline{U} - U) Ak \sin kx,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_0 = -2\overline{U} U Ak^2 \cos kx + G(x),$$

nur daß jetzt die nicht von p abhängige Funktion $G(x)$, die bei Benutzung von [8a] sich zu $(4\overline{U} - \overline{U}^2)$ ergab, anders bestimmt werden muß.

Für die Winddivergenz erhält man bei Benutzung von [41]

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial p} = -\nabla \cdot \mathfrak{B}_0 = \frac{f}{(\eta_g)_0} 2(\overline{U} - U) \mu k \sin kx,$$

statt [21a].

Die Funktion $G(x)$ errechnet sich aus der nach t differenzierten, über p gemittelten Vorticity-Gleichung [41].

Diese schreibt sich wegen $\frac{\partial (\eta_g)_0}{\partial p} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2 \eta_g}{\partial t^2}\right)_0 + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta_g}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial \eta_g}{\partial t}\right)_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial p}$$

und nach Einsetzen der Lösungen für

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial p}, \quad \left(\frac{\partial \eta_g}{\partial t}\right)_0 = \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \eta_g}{\partial t^2}\right)_0 = \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right)_0:$$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + (4\overline{U} - \overline{U}^2) Ak \cos kx = 2\mu^2 f^2 k^2 (\overline{U}^2 - \overline{U}^2) \frac{\sin^2 kx}{1 + \mu \cos kx}$$

bzw. für $(\mu \ll 1)$

$$\approx \mu^2 f^2 k^2 (\overline{U}^2 - \overline{U}^2) [1 - \cos 2kx - \frac{\mu}{2} (\cos kx - \cos 3kx)].$$

Da $\frac{d^2 G}{dx^2}$ außer sinusoidalen Anteilen auch ein konstantes Glied: $\mu^2 f^2 k^2 (\overline{U}^2 - \overline{U}^2)$ enthält, läßt sich $G(x)$ nicht mehr als stetig differenzierbare periodische Funktion darstellen.

Dem periodischen Anteil von $G(x)$ wäre eine Parabel zu überlagern, deren Scheitelpunkt völlig beliebig wählbar ist.

Dieses unsinnige Ergebnis resultiert aus der Tatsache, daß in [41] $\frac{\partial \eta_g}{\partial t}$ nicht mehr als Divergenzausdruck darstellbar ist, wie dies bei den bisher benutzten Gleichungen [8a] und [8] der Fall ist.

Der Vorteil der nichtgeostrophischen Darstellung besteht darin, daß durch Einführung eines nicht mehr divergenzfreien Windes in der Vorticitygleichung Transportterm $\mathfrak{B} \cdot \nabla \eta$ und Divergenzterm $\eta \nabla \cdot \mathfrak{B}$ sich zu einem vollständigen Divergenzausdruck ergänzen.

4.4. Asymmetrische Entwicklung

Im Gegensatz zum quasigeostrophischen Modell läßt das nichtgeostrophische Modell [7—12] eine asymme-

trische Entwicklung von Hoch und Tief bei sinusoidaler Ausgangssituation [6] zu. Das liegt daran, daß in der Vorticitygleichung der Divergenzterm $\eta \nabla \cdot \mathfrak{D}$ die tatsächliche Vorticity und nicht wie im quasigeostrophischen Modell lediglich den Coriolisparameter f als Faktor enthält, womit der unterschiedliche Einfluß der Winddivergenz in Gebieten unterschiedlicher relativer Vorticity berücksichtigt wird.

Wir betrachten die Entwicklung (Zyko- und Antizyklognese) lediglich in den Zentren des Hochs und Tiefs und stellen sie als nur von p abhängige zeitliche Ableitung in einem mit den Zentren sich fortbewegenden Koordinatensystem dar. Wir kennzeichnen den zeitlichen Differentialquotienten in diesem speziellen System mit $\frac{D}{Dt}$, höhere Ableitungen entsprechend. Es ist dann $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$, wobei c die Verlagerungsgeschwindigkeit der Zentren (Phasengeschwindigkeit) bedeutet.

Man entnimmt den im Abschnitt 3 angeschriebenen Funktionen, daß im Falle der Benutzung des quasigeostrophischen Modells gilt:

$$[42] \quad \left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_0 = 0,$$

in der Tiefdruckrinne: $x = \pm nL$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$[43] \quad \frac{1}{Ak^2} \left(\frac{D^2\phi}{Dt^2} \right)_0 = -(\bar{U}-U)^2 - (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) < 0$$

im Hochdruckkeil: $x = (1/2 \pm n)L$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$[44] \quad \frac{1}{Ak^2} \left(\frac{D^2\phi}{Dt^2} \right)_0 = +(\bar{U}-U)^2 + (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) > 0$$

Es tritt sowohl Zyko- als auch Antizyklognese ein, jedoch ist die Entwicklung gleich intensiv, d. h. die Störung entwickelt sich symmetrisch.

Das nichtgeostrophische Modell liefert dagegen entsprechend

$$[42a] \quad \left(\frac{D\phi}{Dt} \right)_0 = 0,$$

jedoch in der Tiefdruckrinne $x = \pm nL$:

$$[43a] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Ak^2} \left(\frac{D^2\phi}{Dt^2} \right)_0 = - \left\{ (\bar{U}-U)^2 - (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \right\} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1+\mu} \\ \quad - 2(\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \ln(1+\mu) \\ \text{oder für kleine } \mu \\ \frac{1}{Ak^2} \left(\frac{D^2\phi}{Dt^2} \right)_0 (\mu \ll 1) \approx - \left\{ (\bar{U}-U)^2 + (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \right\} \\ \quad + \mu(\bar{U}-U)^2 \end{array} \right.$$

im Hochdruckteil $x = (1/2 \pm n)L$:

$$[44a] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Ak^2} \left(\frac{D^2\phi}{Dt^2} \right)_0 = + \left\{ (\bar{U}-U)^2 - (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \right\} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{1-\mu} \\ \quad - 2(\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \ln(1-\mu) \\ \text{oder für kleine } \mu \\ \frac{1}{Ak^2} \left(\frac{D^2\phi}{Dt^2} \right)_0 (\mu \ll 1) \approx + \left\{ (\bar{U}-U)^2 + (\bar{U}^2 - \bar{U}^2) \right\} \\ \quad + \mu(\bar{U}-U)^2 \end{array} \right.$$

Man erkennt, daß der in [43a] und [44a] — für kleine μ — auf der rechten Seite auftretende und mit dem Faktor μ behaftete Term die symmetrische Entwicklung stört und im Sinne einer bevorzugten Antizyklognese wirkt.

Da andererseits $\tilde{\eta}$ für alle Zeiten verschwindet, bedeutet das obige Ergebnis, daß zwar in den Zentren das Hoch sich stärker entwickelt als das Tief, daß sich aber die zyklonale Entwicklung auf ein größeres Ge-

biet erstrecken muß als die antizyklonale Entwicklung. Es mag verwunderlich erscheinen, daß entgegen der Erfahrung in unserem speziellen Beispiel die antizyklonale Entwicklung bevorzugt wird. Jedoch ist, wie eine eingehendere Betrachtung zeigt, dieser Effekt auf das Advektionsmodell ($\sigma = 0$) oder auf Modelle mit nahezu indifferenten Schichtung beschränkt.

Schon bei gering stabiler Schichtung der Atmosphäre kehrt sich dieser Effekt im Sinne einer Bevorzugung der Zyklonese um, vgl. Reiser (4).

5. Nachteile des erweiterten Windansatzes

Wir haben uns im vorigen Abschnitt auf die Untersuchung schwacher Störungen, $\mu \ll 1$, beschränkt. Es zeigte sich, daß die Lösungen des nichtgeostrophischen Modells die wesentlichen Mängel der quasigeostrophischen Gleichungen nicht mehr enthalten.

Wir werden nunmehr jedoch feststellen, daß die für kleine Störungen offensichtliche Überlegenheit des nichtgeostrophischen Modells über das quasigeostrophische Modell wieder verlorengeht, wenn die Störung so stark angenommen wird, daß in den antizyklonalen Gebieten die absolute Vorticity η_R gegen Null strebt. $(\eta_R)_0 = f(1 + \mu \cos kx)$ konvergiert in den Zentren der Antizyklogen, $\cos kx = -1$, dann gegen Null, wenn $\mu \rightarrow 1$ geht.

Man entnimmt für den Fall $\mu \rightarrow 1$ den in Abschnitt 3 angeschriebenen Funktionen, daß die Lösungen an den Stellen maximaler Antizyklonalität Singularitäten aufweisen:

Die Zonalgeschwindigkeit u konvergiert an diesen Stellen $kx = (1/2 \pm n)\pi$ gegen unendlich, vgl. [19]. Die Vertikalgeschwindigkeit w , vgl. [22] verschwindet für $\mu \rightarrow 1$ im gesamten Gebiet mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft der Hochdruckzentren. An den Stellen $kx = (1/2 \pm n)\pi - 0$ konvergiert w gegen $-\infty$, an den Stellen $kx = (1/2 \pm n)\pi + 0$ gegen $+\infty$. Die Entwicklung in der Definition $\left(\frac{D^2\phi}{Dt^2} \right)_0$, vgl. [43a] und [44a], strebt mit $\mu \rightarrow 1$ in den Tiefdruckzentren gegen Null, in den Hochdruckzentren gegen Unendlich.

Der Übergang $\mu \rightarrow 1$ bewirkt sozusagen, daß sich der gesamte Entwicklungsprozeß auf die Hochdruckzentren und deren infinitesimale Nachbarschaft konzentriert.

Aus dem Auftreten von Singularitäten beim Übergang $\mu \rightarrow 1$ in den Antizyklogen muß geschlossen werden, daß die Lösungen des durch die Gleichungen [7–12] definierten nichtgeostrophischen Modells für starke Störungen $\mu \rightarrow 1$ die realen Vorgänge in der Atmosphäre nicht mehr adäquat beschreiben und daß deshalb der Anwendungsbereich des Modells auf kleine Störungen beschränkt bleiben muß.

Der Grund für das Versagen des erweiterten Windansatzes in stark antizyklonalen Gebieten ist darin zu suchen, daß für $\mu \rightarrow 1$ die Lösungen des nichtgeostrophischen Modells die strengen Gleichungen in weitaus höherem Maße verletzen als z. B. die Lösungen des quasigeostrophischen Modells, so daß für $\mu \rightarrow 1$ in antizyklonalen Gebieten die zugrundeliegenden Modellannahmen nicht mehr gerechtfertigt sind, wie wir nachfolgend an Hand unseres Beispiels zeigen.

Wir betrachten anstelle der tatsächlich benutzten Balance-Gleichung in der Form [2a] bzw. [7] nunmehr die bei Benutzung der strengen Bewegungsgleichung an deren Stelle tretende Divergenzgleichung, die man durch Anwendung des Divergenzoperators $\nabla \cdot$ auf die Bewegungsgleichung erhält:

$$[45] \quad \frac{\partial D}{\partial t} + 2 \nabla \cdot (\mathfrak{D}) + \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial p} (\mathfrak{D}\omega) + 2 J(v, u) - f \zeta = - \nabla^2 \phi, \text{ mit } D \equiv \nabla \cdot \mathfrak{D}$$

Wegen der Unabhängigkeit des Windes von y ist in unserem Beispiel $2 \mathbf{J}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$. Wir benutzen obige Gleichung in der über p gemittelten Form und erhalten wegen $\bar{\mathbf{D}} = 0$ und $\omega(\sigma) = 0$

$$2 \nabla \cdot \bar{\mathfrak{B}} \mathbf{D} - f \bar{\zeta} = -\nabla^2 \bar{\Phi}$$

oder

$$[46] \quad \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_g = \frac{2}{f} \nabla \cdot (\bar{\mathfrak{B}} \mathbf{D}), \quad \zeta_g = \frac{\nabla^2 \Phi}{f}$$

Während also bei unseren Lösungen stets die Modellannahme: $\zeta = \zeta_g$ zugrundegelegt wird, verlangen die exakten Bewegungsgleichungen die Erfüllung der obigen Beziehung. Wir können demnach den Ausdruck

$$\delta = \frac{2}{f} \nabla \cdot (\bar{\mathfrak{B}} \mathbf{D}) = \frac{2}{f} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \mathbf{D})$$

als ein Maß dafür ansehen, inwieweit unsere Modellannahme $\zeta = \zeta_g$ berechtigt ist oder nicht.

Wir betrachten vorerst den geostrophischen Fall und setzen die dort gewonnenen Lösungen für u_0 [19] und für D_0 [21a] in den Ausdruck für δ ein und erhalten:

$$\delta = 4(\bar{U}^2 - \bar{U}) \frac{\mu k^2}{f} \cos kx \quad \text{oder wenn wir } \delta = \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_g \text{ in Beziehung setzen zu } (\zeta_g)_0 \text{ im Zentrum des Tiefs } \zeta_{gT} = \frac{Ak^2}{f}, \text{ so ist}$$

$$[47] \quad \delta^* = \frac{\delta}{\zeta_{gT}} = 4(\bar{U}^2 - \bar{U}) \frac{k^2}{f^2} \cos kx \quad \begin{matrix} > 0 \text{ im zykl. Gebiet} \\ < 0 \text{ im antizykl. Gebiet} \end{matrix}$$

Im zyklonalen Raum ist demnach die tatsächliche Vorticity größer als die geostrophische, im antizyklonalen Raum dagegen kleiner.

Im Mittel über eine Wellenlänge hebt sich der Fehler weg.

Wir betrachten nunmehr den nichtgeostrophischen Fall und erhalten dort durch Einsetzen der Lösungen [19] und [21] für u_0 und $(\nabla \cdot \mathfrak{B})_0$ in [46]

$$[47a] \quad \delta^* = \frac{\delta}{\zeta_{gT}} = 4(\bar{U}^2 - \bar{U}) \frac{k^2}{f^2} \left[2(1 - \mu^2) \left(\frac{\cos kx}{(1 + \mu \cos kx)^3} + \frac{\mu \sin kx}{(1 + \mu \cos kx)^4} \right) - \sqrt{1 - \mu^2} \left(\frac{\cos kx}{(1 + \mu \cos kx)^3} + \frac{2 \mu \sin^2 kx}{(1 + \mu \cos kx)^3} \right) \right]$$

In der Abbildung 1 sind die Funktionen [47] und [47a] für verschiedene μ aufgetragen:

Man bemerkt, daß die über p gemittelte Divergenzgleichung mit gegen 1 strebendem μ in zyklonalen Gebieten besser, dagegen in antizyklonalen Gebieten wesentlich schlechter erfüllt wird als bei Verwendung der

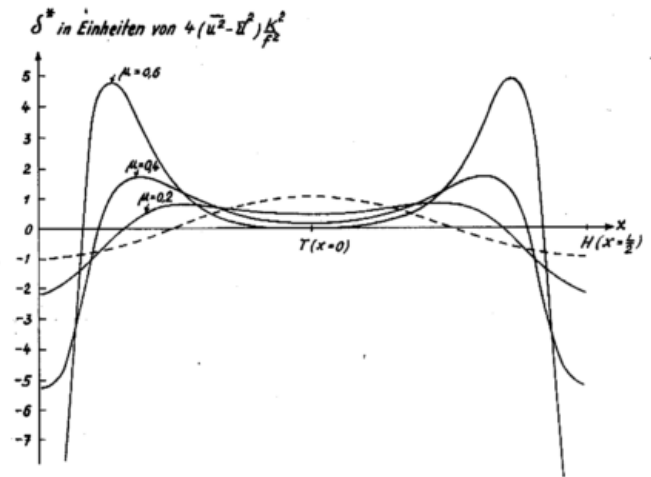


Abb. 1

Differenz zwischen der tatsächlichen und geostrophischen über p gemittelten Vorticity nach der mit den Lösungen der quasi-geostrophischen (gestrichelte Linie) und nichtgeostrophischen (ausgezogene Linien) approximierten Divergenz-Gleichung:

$$\delta^* \equiv (\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_g) \frac{1}{(\zeta_g)_{\max}}$$

quasigeostrophischen Lösungen (gestrichelte Linie in Abb. 1).

Es ist daraus zu schließen, daß mit der Verwendung divergenter Windkomponenten die geostrophische Approximation der Vorticity ζ in stark antizyklonalen Gebieten nicht verträglich ist, daß vielmehr die Divergenzgleichung [45] besser befriedigende, auch die Winddivergenzen berücksichtigende Approximationen für ζ verwendet werden sollten.

Literatur

- (1) Hollmann, G.: Über prinzipielle Mängel der geostrophischen Approximation und die Einführung ageostrophischer Windkomponenten. Meteor. Rdsch. 9, 73—78 (1956)
- (2) Thompson, P. D.: A theory of large-scale disturbances in nongeostrophic flow. Rep. Joint Numerical, Weather Prediction. Unit, Washington 30. 3. 55.
- (3) Charney, J. G.: The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. Tellus 7, 22—26 (1955)
- (4) Reiser, H.: Über den Einfluß der statischen Stabilität auf die Entwicklung von Störungen. Meteor. Rdsch. 9, 113—120 (1956)

Ein semigeostrophisches Vorhersagemodell und sein Randwertproblem

von

Karl Hinkelmann

Zusammenfassung

Im Anschluß an einen Vorschlag von G. Hollmann für ein nichtgeostrophisches Vorhersagemodell wird hier eine Variante untersucht, in der noch, wenn auch in sehr schwacher Form, von der geostrophischen Approximation Gebrauch gemacht wird.

Die Modellannahme besteht darin, in der Adiabaten-gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \sigma \omega, \quad \sigma = -T \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$$

die darin auftretende Vertikalgeschwindigkeit ω geostrophisch anzunähern in der Form, daß eine aus der Theorie quasigeostrophischer Bewegungen entlehene elliptische Differentialgleichung für ω gelöst wird, deren Lösungsfunktion ω lediglich von der Verteilung des Geopotentials zur betrachteten Zeit $\Phi(x, y, p, t = \text{const.})$ abhängt.

In den weiteren Gleichungen wird ω durch die Kontinuitätsgleichung definiert.

Dieser selektive Approximationsprozeß für ω hat den Vorteil, daß

1. die internen Gravitationswellen ausgefiltert werden und
2. der Übergang vom quasigeostrophischen Modell zum nichtgeostrophischen Modell in der oben angedeuteten Form zusätzlich lediglich Quadraturen und die Lösung einer zweidimensionalen Poisson-Gleichung erfordert.

Zur Behandlung des Randwertproblems wird ein abgeschlossenes Integrationsgebiet mit verschwindender normaler Windkomponente an dessen Rand betrachtet.

Ein nichtgeostrophisches Integrationsverfahren unter Ausschluß externer und interner Gravitationswellen

von

Günther Hollmann

1. Einleitung und Problemstellung

Aus der Schwierigkeit, daß die geostrophische Approximation nur eine begrenzte Möglichkeit eröffnet, barokline Entwicklungen synoptischer Felder zu erfassen, erwächst das Bestreben, nichtgeostrophische Vorhersagemethoden für die numerische Wettervorhersage zu entwickeln (1), (2), (3). Einstweilen dürfte es jedoch wegen der begrenzten Kapazität der heutigen Rechenautomaten notwendig sein, ein Zeitinkrement in der Differenzenmethode zu wählen, das es notwendig macht, zwecks Gewährleistung numerischer Stabilität des Verfahrens die hochfrequenten Schall- und Gravitationsschwingungen zu filtern.

Bekanntlich werden Schallfrequenzen durch die Annahme hydrostatischen Gleichgewichts ausgeschaltet. Bei Benutzung der geostrophischen oder einer anderen divergenzfreien Windapproximation gelingt zwar die Filterung der außerdem in den Grundgleichungen als Lösungen existierenden Gravitations- und Trägheitsschwingungen, doch scheiden derartige Approximationen aus, weil die Baroklinität der Atmosphäre nur über Divergenzfelder des Windes auf die Entwicklung Einfluß nimmt. Nun ist es möglich, externe Gravitationswellen zu filtern, wenn die Grundgleichungen unter der als Nebenbedingung gültigen Annahme integriert werden, daß die Divergenz des horizontalen Windes im vertikalen Mittel verschwindet:

$$[1] \quad \int_0^{p_0} D dp = 0, \quad D \equiv \nabla \cdot v.$$

Bei quasi-geostrophischen Rechnungen wird die Annahme [1] durchweg benutzt, obwohl hierdurch ein, wenn auch meist kleiner Fehler gemacht wird im Vergleich zur besser erfüllten Tendenzgleichung

$$[2] \quad \int_0^{p_0} D dp = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}.$$

Bekanntlich führt in einem barotropen Modell mit nur von x abhängiger Störung die geostrophisch approximierte barotrope Vorticity-Gleichung

$$[3] \quad \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + J(\Phi, \frac{\nabla^2 \Phi}{f_0} + f) = -\frac{f_0^2}{p_0} \int_0^{p_0} D dp, \quad f = f_0 + \beta y$$

bei Verwendung von [1] auf

$$[4] \quad c = U - \frac{\beta}{k^2},$$

U = Grundströmung, k = Wellenzahl,

hingegen bei Verwendung von [2] auf

$$[5] \quad c = \frac{U - \frac{\beta}{k^2}}{1 + \frac{k^2 RT_0}{f_0^2}}, \quad \text{beachte } p_0 = RT_0 \epsilon_0$$

Wenn aber bei nichtgeostrophischen Rechnungen die Tendenzgleichung [2] einbezogen wird, erhält man ne-

ben den synoptischen Frequenz noch zwei Frequenzen, die zu externen Gravitations-Trägheitsschwingungen gehören. Es muß daher nach einem Verfahren gesucht werden, die Gravitationsschwingungen auszufiltern. Der Anteil der Trägheitsschwingung in den Frequenzen ist weniger bedenklich, da die entsprechende Phasengeschwindigkeit wesentlich geringer ist als die der Gravitationsschwingungen. Überdies verschwindet die Gruppengeschwindigkeit von Trägheitswellen.

An anderer Stelle wurde gezeigt (1), daß es gelingt, die in einer hydrostatisch stabil geschichteten Atmosphäre auftretenden internen Gravitationswellen durch Benutzung eines filternden Operators in der thermodynamischen Gleichung zu eliminieren.

Im Falle eines linearisierten Gleichungssystems mit nur von x, p, t abhängigen Störungen tritt an Stelle der Adiabatengleichung

$$[6] \quad Q \frac{\partial \Phi}{\partial p} - f U' v + \sigma \omega = 0$$

die quasiadiabatische Gleichung,

$$[7] \quad Q \frac{\partial \Phi}{\partial p} - f U' v + \sigma \frac{f^2 + Q^2}{f^2} \omega = 0,$$

wobei der individuelle Operator (linearisiert) durch

$$[8] \quad Q = \frac{\partial}{\partial t} + U(p) \frac{\partial}{\partial x}$$

beschrieben wird und $U' = \frac{dU}{dp}$ bedeutet. Es kann nun weiter gezeigt werden, daß der gleiche filternde Operator, welcher der Ersetzung von

$$\omega \text{ durch } \left(\frac{f^2 + Q^2}{f^2} \right) \omega$$

in der Adiabatengleichung entspricht und interne Gravitationswellen ausfiltert, ebenfalls in der Tendenzgleichung [2] benutzt werden kann, um externe Gravitationswellen auszufiltern. Auf den Beweis wird an anderer Stelle eingegangen (4). Wegen der Kontinuitätsgleichung

$$[9] \quad D = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$$

schreibt sich die als untere Randbedingung zu benutzende Tendenzgleichung bei nichtgeostrophischen Bewegungen linearisiert wie folgt:

$$[10] \quad p = p_0: \quad \omega = \epsilon(Q\Phi - fUv)$$

Diese Randbedingung ist aber sozusagen der „Ursprung“ von Gravitationsschwingungen. Um diese zu filtern, benutzt man an Stelle von [10]

$$[11] \quad p = p_0: \quad \left(\frac{f^2 + Q^2}{f^2} \right) \omega = \epsilon(Q\Phi - fUv)$$

als untere Randbedingung, also den gleichen filternden Operator wie oben.

In den nicht linearen Grundgleichungen ist der Operator Q durch

$$[12] \quad Q \rightarrow \frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$$

zu ersetzen. Es handelt sich um einen vereinfachten individuellen Operator: der Term $\omega \frac{\partial}{\partial p}$ wird nicht berücksichtigt aus Gründen, die an anderer Stelle (4) noch dargelegt werden.

2. Beschreibung der Integrationsmethode

Aus den horizontalen Bewegungsgleichungen

$$[13] \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -v \cdot \nabla u - \omega \frac{\partial u}{\partial p} + fv - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X[u, v, \omega] - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -v \cdot \nabla v - \omega \frac{\partial v}{\partial p} - fu - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y[u, v, \omega] - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}$$

erhält man die Divergenzgleichung

$$[14] \quad \frac{\partial D}{\partial t} = -\nabla \cdot (Dv) - \nabla \cdot \left(\omega \frac{\partial v}{\partial p} \right) - 2] (v, u) + f\zeta - \beta u - \nabla^2 \Phi, \quad D \equiv \nabla \cdot v \quad \zeta \equiv (\nabla \times v) \cdot e$$

bzw.

$$[15] \quad \frac{\partial D}{\partial t} = -F[u, v, \omega] - \nabla^2 \Phi,$$

wobei die X, Y, F Funktionen von u, v, ω und gewissen räumlichen Ableitungen dieser Größen sind, was aus den Gleichungen [13] bis [15] selbst ablesbar ist. Mittels der Kontinuitätsgleichung [9] und Zeitdifferentiation wandeln wir [15] in

$$[16] \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

um. Es ist jetzt

$$[17] \quad \frac{\partial F}{\partial t} = G[u, v, \omega, u_t, v_t, \omega_t]$$

eine Funktion der in der eckigen Klammer angegebenen Größen und bestimmten räumlichen Ableitungen derselben. Die quasiadiabatische Gleichung schreiben wir mit Beachtung von [12], d. h. Ersetzung von ω

durch $\left(\frac{f^2 + \frac{d^2}{dt^2}}{f^2} \right) \omega$ in der Adiabatangleichung, in folgender Weise:

$$[18] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} = -v \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \sigma \left\{ \frac{f^2 + \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)}{f^2} \right\} \omega - \frac{\sigma}{f^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

bzw.

$$[19] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} = H[\Phi, u, v, \omega, u_t, v_t, \omega_t] - \frac{\sigma}{f^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Aus [16] und [19] gewinnen wir nach Elimination die Gleichung für die Geopotentialtendenz

$$[20] \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} \right) + \frac{1}{f^2} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{H}{\sigma} \right) - \frac{1}{f^2} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Mit Rücksicht auf [17] und [19] können wir [20] auch so

$$[21] \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \tau}{\partial p} \right) + \frac{1}{f^2} \nabla^2 \tau = M[\Phi, u, v, \omega, u_t, v_t, \omega_t],$$

$$\sigma \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{1}{\alpha p} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

schreiben mit der Abkürzung

$$[22] \quad \tau \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Mit den Bewegungsgleichungen

$$[23] \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= X[u, v, \omega] - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= Y[u, v, \omega] - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{aligned}$$

und der aus der Kontinuitätsgleichung folgenden Beziehung für die Vertikalbewegung

$$[24] \quad \omega = - \int_0^p \nabla \cdot v \, dp$$

haben wir jetzt ein Gleichungssystem für die Erstellung einer numerischen Vorhersage zur Verfügung. Auf die Differenzenmethode wird hier nicht eingegangen. Es sei besonders hervorgehoben, daß nur [21] im Sinne der unbekanntenen Funktionen als Differentialgleichung anzusehen ist. Da die hydrostatische Stabilität σ positiv ist, steht eine elliptische Differentialgleichung zur Verfügung. Sie unterscheidet sich von der bekannten quasigeostrophischen Gleichung für die Geopotentialtendenz

$$[25] \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \tau}{\sigma} \right) + \frac{1}{f^2} \nabla^2 \tau = - \frac{1}{f^2} J \left(\Phi, \frac{\nabla^2 \Phi}{f} + f \right) - \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)$$

nur durch den inhomogenen Term. Daß man mit Hilfe nichtgeostrophischer Gleichungen zum gleichen Typ der Differentialgleichung wie bei quasigeostrophischen Gleichungen gelangt, hängt offenbar mit dem hier eingeführten filternden Operator zusammen, was sich leicht rückschauend verifizieren läßt.

Die Lösung des Systems hat natürlich schrittweise zu erfolgen wie bei allen Methoden zur numerischen Wettervorhersage. Zur Zeit $t = 0$ werden das Geopotential und die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten vorgegeben. Während für das Geopotential die gemessenen Werte in Frage kommen, wird man für die Geschwindigkeitskomponenten, auf die geostrophischen oder andere Werte zurückgreifen, die so beschaffen sind, daß eine möglichst weitgehende Adaptation bzw. Balance zwischen Wind- und Druckfeld besteht und damit die Amplitude von Trägheitsschwingungen gering bleibt. Mit der Vorgabe von u und v ist zufolge Gl. [24] auch ω bekannt. Die nächste Operation besteht in der Ermittlung der Tendenzen $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}$ aus [23], und mit [24] anschließend $\frac{\partial \omega}{\partial t}$. Mit Hilfe aller jetzt bekannten Größen, nämlich $\Phi, u, v, \omega, u_t, v_t, \omega_t$, ermittelt man den inhomogenen Term von [21]. Darauf folgt die Lösung der Differentialgleichung [21] zur Bestimmung der Geopotentialtendenz [21]. Mit den Werten τ, u_t, v_t, ω_t schreitet man um das Zeitinkrement Δt voran, wodurch sich die Werte von Φ, u, v, ω zur Zeit $t = \Delta t$ ergeben. Der weitere Verlauf der Rechnung ist dann eine Wiederholung der eben beschriebenen Operation nach aufeinanderfolgenden Zeitschriften.

Zur Lösung der elliptischen Gleichung [21] benötigt man Randbedingungen. Für die vertikalen Begrenzungen gewinnen wir diese aus der quasiadiabatischen Gleichung [18]. Offenbar sind wegen

$$p = 0 : \quad \omega = 0$$

$$p = p_0 : \quad \left(\frac{f^2 + \frac{d^2}{dt^2}}{f^2} \right) \omega = \rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right),$$

(s. Gl. [11] und [12])

die Randbedingungen

$$[25] \quad p = 0 : \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} = -v \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

$$[26] \quad p = p_0 : \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} + \sigma \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -v \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \sigma \rho v \cdot \nabla \Phi$$

zu wählen. Es handelt sich bei [25] um ein Randwertproblem zweiter Art (Neumann-Problem), bei [26] um ein Randwertproblem dritter Art. Auch als seitliche Randbedingungen kommen die Normalableitungen der Geopotentialtendenz in Frage. Natürlich wird hierbei im einzelnen die Gestalt der Randkurve und die Art des Ein- und Ausflusses maßgebend sein. Man

erhält diese Randbedingungen aus den Bewegungsgleichungen. Beschränken wir uns auf einen Kanal mit breitenkreisparallelen Wänden (bei $y = y_1$ und $y = y_2$), durch welche kein Fluß stattfindet, so lautet die an beiden Wänden zu erfüllende Randbedingung

$$[27] \quad \begin{array}{l} y = y_1 : \\ y = y_2 : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} = -f \frac{\partial u}{\partial t} \end{array} \right.$$

Sie folgt wegen $v = 0$ unmittelbar aus der y -Komponente der Bewegungsgleichung. Das hier beschriebene Verfahren entspricht einer nichtgeostrophischen Integrationsmethode unter Ausschluß von Gravitationswellen. Von besonderer Bedeutung erscheint es, daß die heute so viel verwendete Vorticity-Gleichung hier nicht benötigt wird; sie wird durch die beiden Bewegungsgleichungen ersetzt, ein Umstand, der von Vorteil ist, denn die gesuchten lokalen Geschwindigkeitsänderungen treten undifferenziert auf. Bezüglich dieser Größen sind die Bewegungsgleichungen natürlich keine Differentialgleichungen.

Die vorstehend beschriebene nichtgeostrophische Methode, auf welche an anderer Stelle noch näher eingegangen wird, unterscheidet sich bezüglich Auftreten

von Differentialgleichungen nicht von der quasigeostrophischen Methode. Die Erschwerung in der Anwendung dürfte im Vergleich zur quasigeostrophischen Methode vor allem in der Bestimmung der inhomogenen Terme und hinreichend genauer Rechnung sein, um die Amplitude von Trägheitsschwingungen möglichst klein zu halten.

Literatur

- (1) Hollmann, G.: Über die Behandlung barokliner Prognoseprobleme mit Hilfe nichtgeostrophischer Gleichungen. Meteor. Rdsch. 8, 73—78 (1955)
- (2) Thompson, P. D.: A theory of large-scale disturbances in non-geostrophic flow. I. Meteor. 13, 251—261 (1956)
- (3) Hollmann, G.: Über prinzipielle Mängel der geostrophischen Approximation und die Einführung ageostrophischer Windkomponenten. Meteor. Rdsch. 9, 73—78 (1956)
- (4) Hollmann, G.: Zur Frage der Lärmfilterung in den hydro-thermodynamischen Gleichungen. Im Druck.

Über die Grenzen der geostrophischen Approximation und die Einführung nichtgeostrophischer Methoden

von

Günther Hollmann

1. Einleitung

Die numerische Wettervorhersage bedient sich gegenwärtig mit Erfolg einer vielfältigen Anwendung der geostrophischen Approximation (g. A.). Der unbestreitbare Vorteil der g. A. liegt vor allem in der Lärmfiltrierung und der Möglichkeit, das Vielfelderproblem der atmosphärischen Dynamik auf ein Einfelderproblem zurückzuführen (1).

Es darf aber nicht übersehen werden, daß die g. A. mit einer Reihe von Mängeln behaftet ist: sie eliminiert nicht nur den Lärm in Form von Gravitations- und Trägheitsschwingungen, sondern auch noch eine Reihe synoptisch wesentlicher Erscheinungen aus den Grundgleichungen (2), (3).

Man spricht zuweilen auch von der selektiven g. A., insofern als sie nur in solche Terme der Grundgleichungen eingeführt werden darf, die keine Winddivergenz enthalten. Weitere Restriktionen werden der Anwendung der g. A. nach Kenntnis des Verfassers nicht auferlegt.

Es erscheint aber unbedingt nötig, das Augenmerk auf die Verträglichkeit der g. A. mit den Prinzipien der Dynamik zu richten. Die in der heutigen numerischen Wettervorhersage verwendeten Gleichungen sind neben den als Substitutionsgleichungen dienenden Kontinuitätsgleichung, statische Grundgleichung und Zustandsgleichung die Vorticitygleichung und die Adiabaten-gleichung, in welche die g. A. selektiv eingeführt wird.

Die Vorticitygleichung

$$[1] \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\eta v) + (\nabla \times \omega) \cdot f = 0$$

besteht aus einer Anzahl von Rotations- und Divergenzausdrücken, die jeder für sich über eine abgeschlossene Fläche (wie die Erdoberfläche) integriert zufolge der Integralsätze von Gauss und Stokes verschwinden. Dies trifft ebenfalls zu, wenn ein räumlich periodisches Feld, z. B. eine Folge von Trögen und Rücken in der Westdrift, vorliegt. Über eine Wellenlänge integriert verschwindet jeder Term von [1] für sich.

2. Verträglichkeit der geostrophischen Approximation mit der barotropen Vorticitygleichung

Im Falle der Barotropie wird im allgemeinen eine divergenzfreie Horizontalströmung vorausgesetzt, so daß aus der Kontinuitätsgleichung

$$[2] \quad \nabla \cdot v = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

zusammen mit der Randbedingung $\omega(p=0) = 0$ das Verschwinden der Vertikalbewegung ω zu folgern ist.

Dadurch reduziert sich [1] auf

$$[3] \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v \cdot \nabla \eta = 0.$$

Wenn für den Wind eine divergenzfreie Approximation, d. h. eine Stromfunktion ψ benutzt wird entsprechend

$$[4] \quad v = f \times \nabla \psi,$$

verschwinden über eine Wellenlänge integriert beide Terme von [3]. Wir wollen das Integral über eine Wellenlänge oder eine in sich geschlossene Fläche durch $\int (\) dF$ ausdrücken. Mit Rücksicht auf [4] ist also

$$\int \frac{\partial \zeta}{\partial t} dF = 0, \quad \int v \cdot \nabla \eta dF = 0.$$

Bei g. A. des Windes in [3] erwachsen aber Schwierigkeiten wegen der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters. Mit $\beta = \frac{df}{dy}$ gilt wegen

$$[5] \quad v_g = \frac{f}{f} \times \nabla \phi$$

$$\int v_g \cdot \nabla \eta_g dF = - \int \eta_g \nabla \cdot v_g dF = \int \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \eta_g dF.$$

Der letzte Ausdruck dürfte im allgemeinen nicht verschwinden; vielmehr resultiert eine Änderung der mittleren Vorticity

$$[6] \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \zeta_g dF \neq 0.$$

die jedoch fehlerhaft ist.

Allgemein wird die geostrophische relative Vorticity ζ_g durch

$$[7] \quad \zeta_g = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi$$

dargestellt, wobei der Term

$$[8] \quad - \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

vernachlässigt wird, der zusätzlich auftritt, wenn die $(\nabla \times) \cdot f$ -Operation auf [5] angewendet wird. Hingegen wird die Breitenabhängigkeit von f in [7] meist berücksichtigt. Mit [7] und [5] läßt sich jetzt [3] in bekannter Weise wie folgt darstellen:

$$[9] \quad \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = - J(\phi, \frac{\nabla^2 \phi}{f} + f).$$

Diese Gleichung [9] wird meistens zur numerischen Prognose auf der Basis des barotropen Modells herangezogen. Sie dürfte, abgesehen von der Berücksichtigung der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters im Term $\frac{\nabla^2 \phi}{f}$, aber der Vernachlässigung des Terms [8] nicht anfechtbar sein, was die oben dargelegten Eigenschaften von Rotations- und Divergenzausdrücken betrifft. Der Term [8] ist im Vergleich zu [9] keineswegs immer klein. Um der Schwierigkeit einer inkon-

ableitbaren Form der Adiabatengleichung

$$[21] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial t} = -v \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \sigma \omega$$

und Berücksichtigung der Beziehung [16] leicht die Gleichung

$$[22] \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -v_g \cdot \nabla \sigma - \frac{\partial \sigma}{\partial p} \omega - \frac{\sigma}{\kappa p} \omega - \sigma \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

zu gewinnen, wobei wiederum von g. A. und der ihr entsprechenden Beziehung für den thermischen Wind

$$[23] \quad \frac{\partial v_g}{\partial p} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$$

Gebrauch gemacht wurde.

Es möge zur Zeit $t = 0$ die Stabilität σ von der Horizontalen unabhängig sein. Dadurch reduziert sich [18] auf

$$[24] \quad t = 0: \frac{\partial \bar{T}}{\partial t^2} = 0,$$

denn $\bar{\omega} = 0$ wegen der Kontinuitätsgleichung. Anders verhält es sich jedoch mit der zweiten Zeitableitung. Offenbar ist unter den angenommenen Voraussetzungen

$$[25] \quad t = 0: \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = \frac{p}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \omega, \text{ da } \sigma(p) \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0.$$

Wegen

$$[26] \quad t = 0; \sigma = \sigma(p)$$

geht [22] in

$$[27] \quad t = 0: \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial p} \omega - \frac{\sigma}{\kappa p} \omega - \sigma \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

über. Ferner läßt sich bei Beachtung von $\omega = 0$ für $p = 0$ und $p = p_0$ Gleichung [25] mit Rücksicht auf [27] folgendermaßen schreiben:

$$[28] \quad t = 0: \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = \left\{ \frac{\kappa-1}{\kappa} \sigma - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial p} \right\} \frac{\omega^2}{R}$$

Offenbar ist auch

$$\sigma = \frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma^*} \frac{RT}{p^2}$$

eine Darstellungsweise für die hydrostatische Stabilität, wobei $\Gamma = \frac{g}{c_p}$ den trockenadiabatischen, $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$ den geometrischen und $\Gamma^* = \frac{g}{R}$ den vertikalen Temperaturgradienten einer homogenen Atmosphäre bedeuten. Bereits durch den Ansatz $\sigma = \frac{a^2}{p^2}$ ($a^2 = \text{const.} > 0$) lassen sich wesentliche Merkmale der beobachteten vertikalen Temperaturverteilung wiedergeben. Wir wählen aber den allgemeineren Ansatz

$$\sigma = \frac{a_v^2}{p^v}, \quad a_v^2 > 0$$

Dann geht [28] in

$$[29] \quad t = 0: \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} = \left\{ \frac{\kappa-1}{\kappa} + \frac{v-1}{2} \right\} a_v^2 \left(\frac{\omega^2}{p^v} \right)$$

über. Für

$$[30] \quad v > \frac{2-\kappa}{\kappa}$$

ist die rechte Seite von [29] positiv und entspricht damit einer Zunahme der Mitteltemperatur \bar{T} . Nach dem Energieprinzip müßte dann $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) < 0$ sein. Nun ist aber bekannt, daß es bei hinreichender Baroklinität der Atmosphäre immer einen gewissen Wellenlängenbereich gibt, in welchem die Störungen instabil werden, d. h.

eine Zunahme der kinetischen Energie auftritt. Die bei g. A. in die Änderung der mittleren Enthalpie lediglich eingehende räumliche Korrelation zwischen σ und ω liefert dann im Falle [30] ebenfalls eine Zunahme der Enthalpie. Dies bedeutet aber eine Entstellung der Aussage des Energieprinzips.

Aus diesem Grunde ist es in quasigeostrophischen Modellen unangebracht, horizontale Unterschiede in der hydrostatischen Stabilität mitzubetrachten. Selbstverständlich wird auch durch Vernachlässigung der horizontalen Variabilität der hydrostatischen Stabilität der Energiesatz noch verletzt, indem die mittlere Enthalpie dann gar keine Änderung erfahren kann. Dies liegt aber an der grundsätzlichen Natur der g. A., indem sie einem Stromfeld entspricht, dessen zugehöriges Druckfeld keine Arbeit leistet. Eine zumindestens vorzeichenmäßige Erfüllung des Energiesatzes läßt sich nur durch Berücksichtigung ageostrophischer Windkomponenten erzielen. Eine mit Hilfe der g. A. beschriebene barokline Entwicklung kommt nicht zum Abschluß, da der einmal vorhandene Vorrat von Enthalpie nicht aufgezehrt werden kann. Es dürfte evident sein, daß die g. A. auch nicht in der Lage ist, den Okklusionsvorgang zu beschreiben, denn der Okklusionsprozeß entspricht gerade der für das Anwachsen der kinetischen Energie notwendige Abnahme der Enthalpie (potentielle Energie).

Abschließend kommen wir zur Folgerung, daß die selektive geostrophische Approximation für praktische Zwecke nur brauchbar ist, wenn es sich um barokline Entwicklungen von Feldern geringer Amplitude handelt, $\zeta_g \ll f$, und nur geringe zeitliche Änderungen der kinetischen Energie auftreten. Alle anderen Fälle, und hierzu gehören gerade die Vertiefungen von Zyklonen, dürften mit Hilfe der g. A. nur unzureichend erfassbar sein.

Die auf der Basis der g. A. zu verwendenden Gleichungen sind also

$$[31] \quad \frac{D \eta_g}{Dt} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

$$[32] \quad \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -\bar{\sigma} \omega \quad \text{mit}$$

$$[33] \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_g \cdot \nabla$$

Wegen $\frac{D \bar{\sigma}}{Dt} = 0$ lassen sich [31] und [32] zu einem Erhaltungssatz zusammenfassen, nämlich

$$[34] \quad \frac{D}{Dt} \left\{ \eta_g + f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right\} = 0$$

zu dessen Ableitung man auch von [23] Gebrauch machen muß.

Literatur

- (1) Charney, J. G.: On the scale of atmospheric motions. Geophys. Publ. 17, No. 2 (1948)
- (2) Hollmann, G.: Über- und untergradientische barokline Zonalströmung als Lösung der hydrodynamischen Gleichungen. Meteor. Rdsch. 8, 105—107 (1955)
- (3) Hollmann, G.: Über prinzipielle Mängel der geostrophischen Approximation und die Einführung ageostrophischer Windkomponenten. Meteor. Rdsch. 9, 73—78 (1956)
- (4) Bolin, B.: An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three-dimensional flow. Tellus 8, 61—75 (1956)

The Work of the Dunstable Research Group

by

E. Knighting

(with 3 figures in the text)

Zusammenfassung

Vorhersagen aktueller Wetterlagen werden mit Hilfe des Sawyer-Bushby-Modells erstellt (bis jetzt etwa 20—30 Fälle). Die angestrebten Verbesserungen durch

- 1.) Benutzung der exakten seitlichen Randbedingung für die absolute Höhe h der 500 mb- (später 600-mb-)Fläche anstelle von $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ auf dem Rand,
- 2.) Berücksichtigung der nichtadiabatischen Erwärmung der Luft über einer warmen Meeresoberfläche,
- 3.) Einführung einer Stromfunktion anstelle des Geopotentials in 500 mb

erwiesen sich nicht als entscheidende Fortschritte.

Zum Zwecke einer objektiven Analyse des Geopotentialfeldes wurde eine Extremalbedingung formuliert, in die außer den beobachteten auch die vorhergesagten Werte eingehen. Einige numerische Experimente wurden durchgeführt.

Eine mögliche Reduktion des Verfahrensfehlers (truncation-error) durch verbesserte numerische Approximation der Vorticity und des Vorticitytransports wird vermittels barotroper Modellrechnungen (über 24h) überprüft.

Für das barotrope Modell wurde ein Integrationsverfahren unter Verwendung von Kugelfunktionen entwickelt, das demnächst erprobt werden soll.

I

The work at Dunstable falls rather naturally into 3 groups

- (a) testing the Sawyer-Bushby model by carrying out time integrations,
- (b) development of a technique for objective analysis,
- (c) the study of new models and of the mathematical methods of solution.

We do not have a computer at Dunstable although we expect to instal one in 1957 which will be available, as far as I know, for research work inside the Meteorological Office. The computer which we use is at Manchester and is also used by many other government departments as well as industrial firms, so that we are not able to have computing time as we wish. We have then, to share out the time at our disposal between the various projects we are interested in, and for this reason we have not been able to make an intensive study of the Sawyer-Bushby model over a long period. Between 20 and 30 time integrations have been carried out, and most of the results have already been published and I will review these rapidly. First let me

remind you of the basis of the Sawyer-Bushby model and some of the details of the calculation. It is a geostrophic model in which the variation of wind with height is linear and the vertical velocity profile is parabolic. The twisting terms and the vertical advection of vorticity are neglected but the non-linear $(\zeta + f) \partial \omega / \partial p$ is retained. The parameters are the height of the 500 mb. surface (later the 600 mb. surface was used) and the thickness between 1000 mb. and 500 mb. There is one Poisson equation to solve for the height of the 500 mb. surface and one Helmholtz equation to solve for the thickness. These equations are solved on a grid of 18×14 points, about 200 mi. apart, by relaxation and the time integration carried out in 1 hr. time steps.

The early results showed about as much success as other models have shown, and this success led to investigating separately (a) the effect of using the correct boundary conditions instead of keeping h a constant and $\partial h / \partial t$ zero on the boundary, (b) the effect of non-adiabatic heating of air passing over a warm sea, and (c) the effect of using a stream function instead of the geopotential at 500 mb. Each new innovation improved the forecasts a little, but not so much that we could say that a major step forward had been made. The results of the work of Mr. Bushby and Miss Huckle on the use of a stream function have not been published yet, so I will briefly review the method used. The balance equation was first solved by expressing it in finite differences, the condition for ellipticity being maintained by making zero any negative values of the discriminant. The quadratic equation which results from the finite difference expression for the value of the stream function was solved by iteration, and this proved a rapid method of solution.

The history of the motion was carried in the stream function (ψ) and the mean temperature (h); 24 hr. forecasts were made and then the Poisson equation solved to give the height of the 500 mb. surface, the boundary values being kept constant. The results of three such forecasts showed that there was some improvement in two cases when the stream function was used, but not sufficiently marked to indicate a vital step forward in numerical forecasting. There was a reduction in the spurious anticyclogenesis and a general depression in the height of the 500 mb surface owing to the method adopted of keeping the balance equation elliptic.

II

The objective analysis scheme is rather akin to those used in Sweden and U.S.A. The expression which is minimised is, for the 500 mb. surface

$$E = \sum_1^m p (H_s - H_0)^2 + T^2 \sum_1^n p (v_s - v_0)^2 + \sum_1^e q (H_s - H_i)^2.$$

where H_0 and v_0 are observed, H_f is forecast and H_s, v_s are the height and wind of the surface of best fit. p and q are weighting factors, varying with distance and T is a weighting factor which gives the relative values to be placed on wind and height observations. v_s is expressed in terms of H_s by the geostrophic wind equation. Earlier experiments, using only observations within the British network, had shown, when H_s was taken as a quadratic or cubic surface, that the optimum value of T^2 is about 2 but the extremum was flat and values of T^2 up to 16 could be taken with little effect upon the objectively analysed height.

The latest experiments by Mr. Bushby have been carried out in some cases where the forecast heights of the 500 mb. surface have been rather poor in the light of subsequent analysis, with the object of determining the best values of T^2, p and q . The data was searched and the six nearest reporting stations within 1000 mi. relative to the grid point under consideration were used in the first two terms of the expression, while the term depending on the forecast values was evaluated at the

nine nearest points including the grid point itself. The weighting factor q was taken to be proportional to p , which itself was essentially $(1 + ar)^{-1}$ where r is the distance from the grid point under consideration.

The results showed that over well-documented areas the differences in the objectively analysed height values was small; in effect the height value at a grid point was determined by the nearest observations. Over the sea, where observations are relatively rare, it was found that where isolated observations were not in accordance with the smooth field of forecast values, the minimising process introduced short wave features to accommodate the difference. The numerical experiments were carried out for two values of T^2 ($= 2, 16$), two variations of p with r , and two ratios between p and q at the same distance ($p = 4q, 16q$). The short wave features were reduced when the relative weight assigned to wind observations was largest ($T^2 = 16$), the weight of an observation at a given distance was increased and the weight assigned to the forecast values was least ($p = 16q$). Some results are given in Figs. 2.

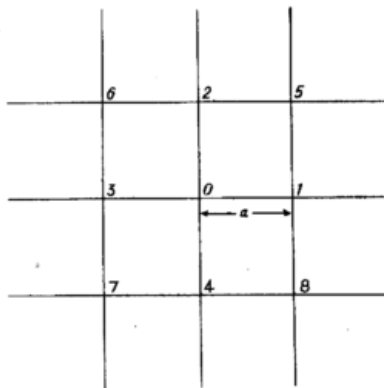


Fig. 1a
The numbering of the meshpoints

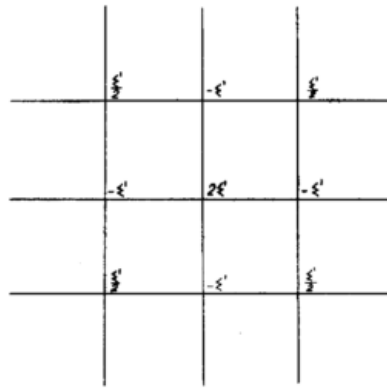


Fig. 1b
Error distribution of $\zeta \times -\zeta +$

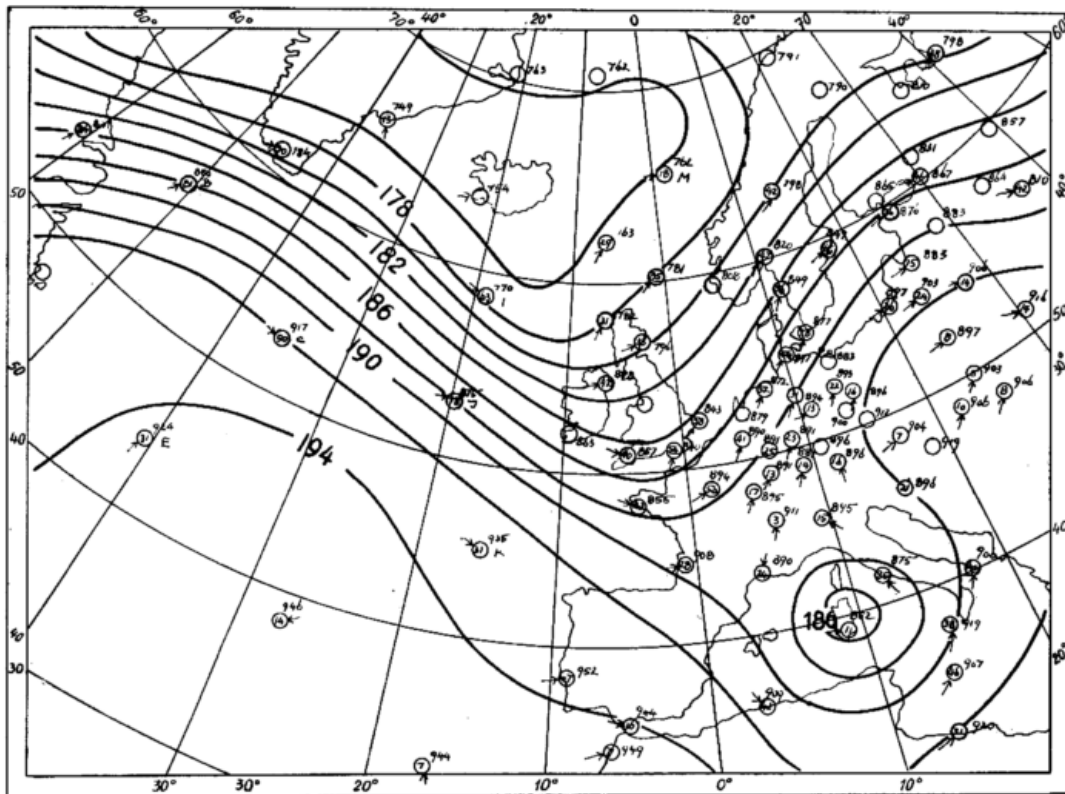


Fig. 2a
500 mb. Observations and forecast division analysis
for 1500 GMT, 12. 9. 55

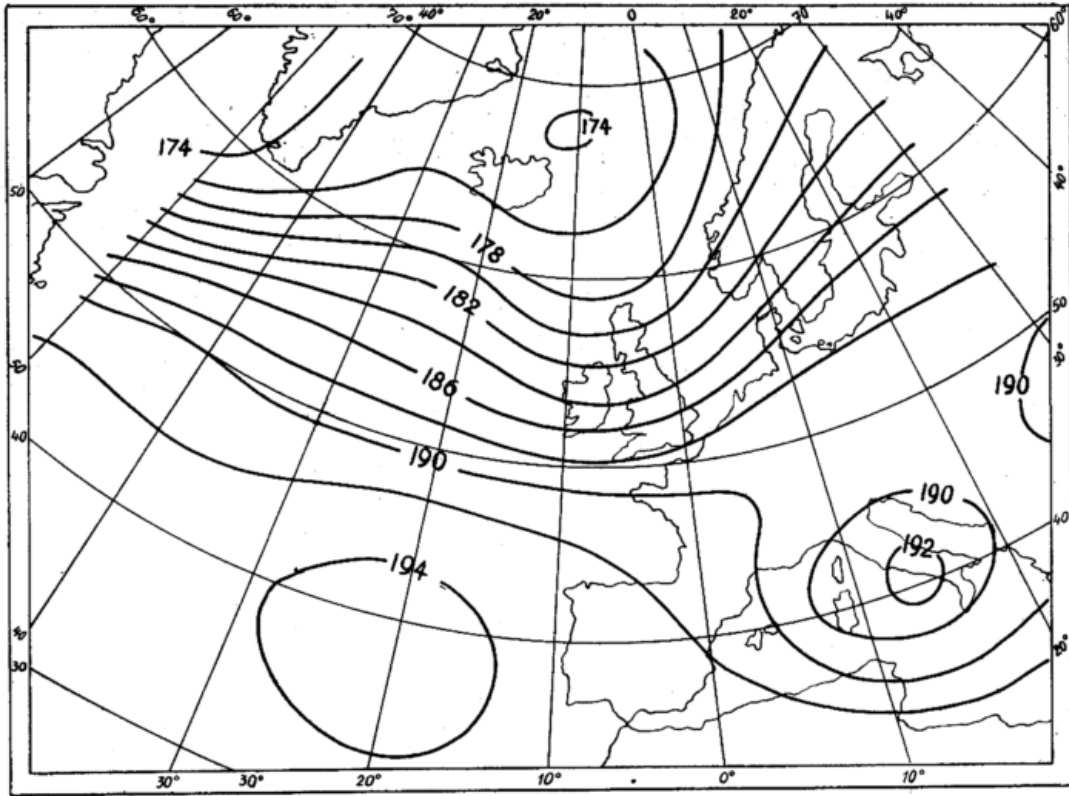


Fig. 2b
500 mb proutour 1500 GMT, 12. 9. 55

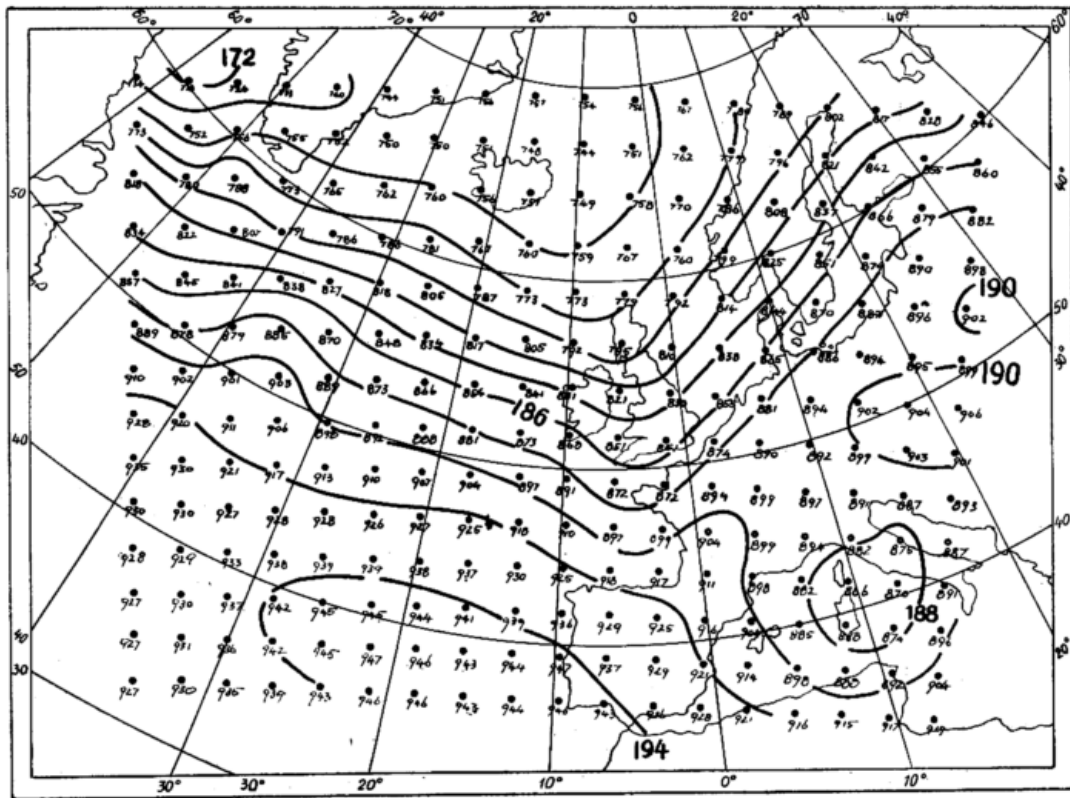


Fig. 2c
Objective analysis (quadratic) 1500 GMT, 12. 9. 55,
 $p = p_1, q = \frac{1}{4} p_1, T^2 = 2 \text{ sec}^2$

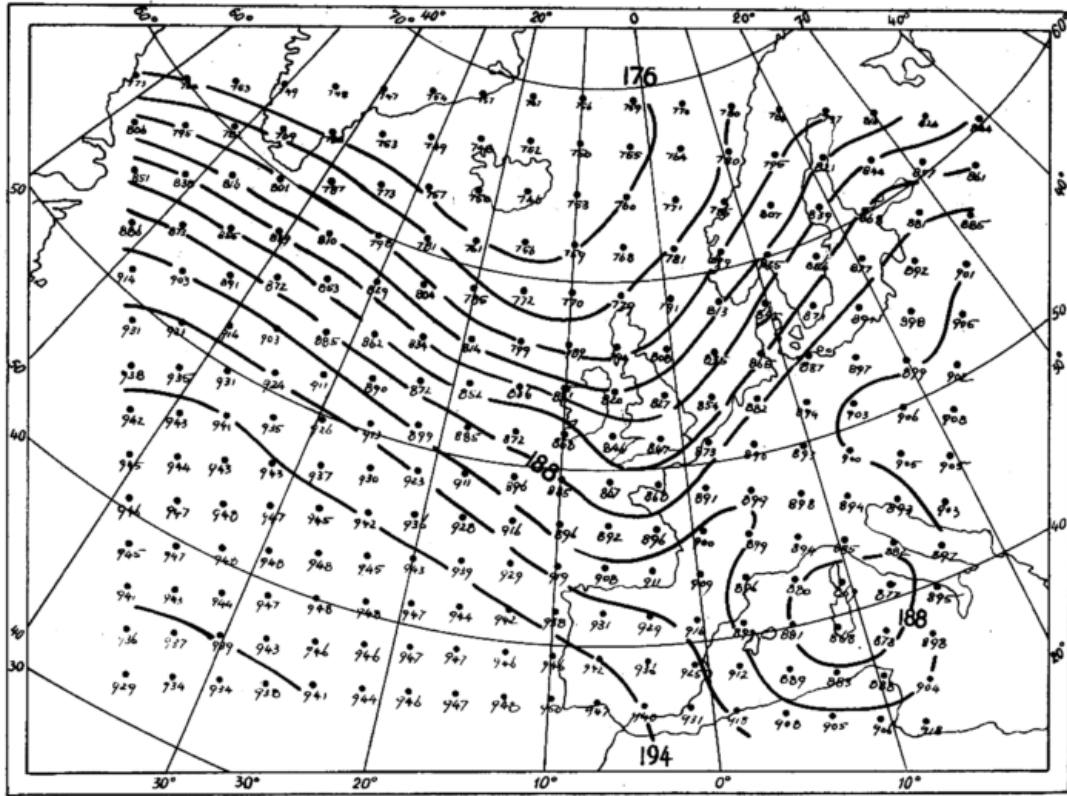


Fig. 2d
Objective analysis (quadratic) 1500 GMT, 12. 9. 55,
 $p = p_2, q = \frac{1}{16} p_2, T^2 = 16 \text{ sec}^2$ over Atlantic, 2 sec^2 over Europe

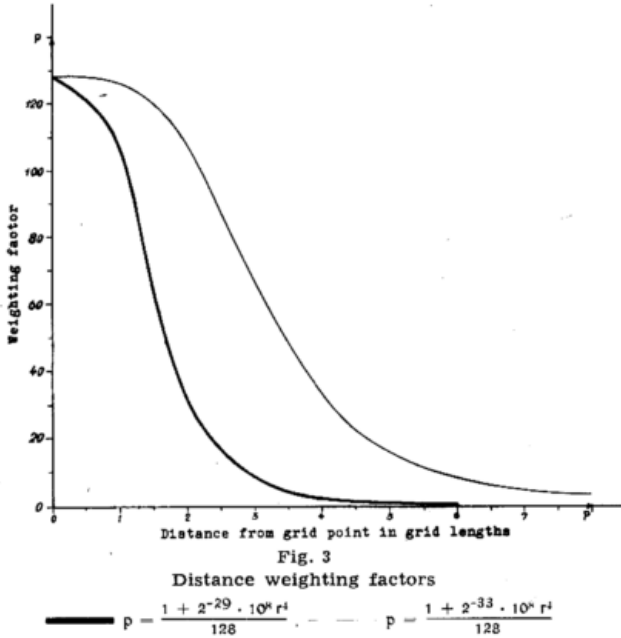


Fig. 3
Distance weighting factors

$$p = \frac{1 + 2^{-29} \cdot 10^6 r^4}{128} \quad \text{---} \quad p = \frac{1 + 2^{-33} \cdot 10^6 r^4}{128}$$

III

I hope to say something later in this conference about the new models that we are hoping to study, and at this stage I will only say that our ideas are probably much the same as those at any other centre; we are thinking about nongeostrophic models and models which take into account the existence of a tropopause.

We have examined the fields of height of the 500 mb. surface, especially in the calculation of the associated vorticities and Jacobians. The vorticities have been cal-

culated over the usual grid used in the Sawyer-Bushby model by using the values at the grid points (0, 1, 2, 3, 4), (0, 5, 6, 7, 8) shown in Fig. 1a, which we denote by ζ^+ and ζ^\times respectively. As expected the ζ^\times field usually was smoother than the ζ^+ field, and the patterns of the field were rather similar in that the maxima of ζ^+ and ζ^\times were usually in the same area, often at the same grid point. Errors in reading the 500 mb. heights from the chart were reflected in a pattern incanted in Fig. 1b and were discernible showing that care in copying is necessary. A test using the difference between ζ^+ and ζ^\times is now made to check the initial data and show any large difference, indicating a region to be examined for data errors.

The Poisson equation

$$\nabla^{+2} h^\times = \zeta^\times$$

where ∇^{+2} represents the operation using the grid points (0, 1, 2, 3, 4) was solved by relaxation and gave h^\times the field which would yield ζ^\times using the normal method of calculation. We found that $|h^\times - h|$ had a maximum value of about 70 ft. and exceeded 20 ft. on only 123 occasions out of nearly 2000. The differences in ζ were no more than could be expected from different analyses of the 500 mb. chart. Since ζ^\times is the smoother field it is to be preferred.

Four Jacobians can be calculated by using either ζ^+ or ζ^\times and using the points (1, 2, 3, 4) or (5, 6, 7, 8). These we denote by $J^{++}, J^{+\times}, J^{\times+}, J^{\times\times}$. The Jacobian fields were calculated for the 20 or so cases for which ζ^+ and ζ^\times had been calculated and very wide differences were obtained, with J^{++} being the roughest, $J^{\times\times}$ the smoothest field. The differences in the fields were as large as the fields themselves and arose owing to the relative displacement of maxima and minima. The smoothest field appeared to be a mean of $J^{+\times}$ and $J^{\times\times}$ which

uses all 25 points in the symmetrical square about the grid point in question.

We have written a barotropic programme and intend to find the differences in the forecast values which arise owing to the finite difference approximation used.

You will note that we are unable to solve such equations as $J^{+\times} = J^{\times\times}$ to find what height field will yield a given Jacobian field.

The first time integrations using two different values of J have been carried out and the results are in-

All tables refer to 1500Z 30th January, 1952

Table 1

The height field of the 500 mb surface (in tens of feet, the initial figure being omitted)

682	668	629	602	575	587	603	642	686	704	706	706	704	699	699	709	721
706	692	640	600	570	570	587	615	670	705	719	715	708	705	709	716	728
735	718	684	632	594	584	592	618	669	711	730	728	717	716	722	726	733
774	765	735	695	654	630	630	643	687	718	737	743	732	730	730	743	740
817	816	798	760	722	691	678	686	706	727	743	753	743	743	739	746	758
850	849	843	826	803	778	749	738	743	757	766	766	762	757	758	766	774
885	878	870	859	846	831	815	803	795	790	785	777	770	770	775	781	786
912	908	897	887	876	864	851	839	822	810	802	788	779	781	787	791	797
926	922	915	905	894	833	871	859	840	824	812	801	792	791	795	799	804
937	931	927	919	909	897	885	870	852	835	819	810	804	801	803	806	811
943	939	932	925	916	905	892	876	859	840	825	815	809	807	810	813	818
946	942	936	928	920	909	891	876	862	845	827	817	812	813	816	819	824
948	943	937	928	921	909	891	873	862	848	832	818	817	818	821	825	830

Table 2

Jacobian J^{++} (ft. hr.⁻¹)

041	071	001	-011	-010	-067	-060	010	018	011	006	-001	004	001
005	083	-031	-021	004	016	-018	-014	006	019	009	-013	-004	009
001	-015	056	006	-021	-024	-049	-046	-024	014	011	-004	-001	008
064	126	046	000	-060	-060	-046	-013	-019	-009	006	017	008	-013
-039	-037	-039	116	181	027	-053	-044	-001	005	009	009	-004	002
000	-003	-010	-009	-034	-016	018	026	013	013	005	-009	-004	003
016	-006	003	008	003	024	041	-003	008	018	-004	-015	-003	-001
001	006	-001	002	-010	013	014	-005	011	000	-001	-005	-004	000
-004	000	000	-002	-010	010	-006	008	003	-005	-001	002	001	-001
004	002	001	-011	014	006	-003	002	003	003	004	-002	-002	-001

Table 3

$(J^{X+} - J^{++})$ (ft. hr.⁻¹)

051	-043	027	008	-028	040	038	-013	-009	-006	-003	-001	-006	004
076	-114	042	001	006	-034	011	011	000	-006	-004	011	006	-010
038	151	-018	-004	006	-028	-001	009	013	-006	-004	005	002	-011
-106	-189	-066	064	147	031	-016	-026	009	019	007	-015	-010	023
089	099	033	-151	-246	-050	074	066	-004	-005	-003	-006	006	-003
-009	010	033	071	099	031	-031	-063	-009	004	-003	004	-001	-002
-020	004	-008	-007	-008	-005	-014	018	-002	-010	006	008	-003	003
006	-009	003	-002	013	-004	-003	012	-012	004	-001	000	004	-001
006	002	-003	-008	008	-015	018	-008	-003	006	004	-005	-003	002
-006	000	-003	020	-016	-002	004	003	000	000	-004	000	003	001

Table 4

$(J^{X+} - J^{++})$ (ft. hr.⁻¹)

017	-018	007	003	-009	014	029	-008	-005	-004	-001	001	-003	001
021	-032	022	002	003	-017	-001	008	-001	-004	-002	006	001	-004
-004	045	-039	-004	-008	-007	-007	011	009	-002	000	003	001	-003
-011	-039	-009	009	045	010	-003	-009	003	006	001	-008	-005	011
013	017	026	-031	-070	-005	023	018	-006	-001	-002	-005	003	-001
004	001	-004	002	014	002	-003	-014	001	001	-001	002	001	-001
-006	007	-001	003	001	-003	-011	007	001	-005	004	004	-001	000
003	-003	002	-001	003	-003	-003	005	-005	002	000	001	002	-001
002	000	-001	-002	005	-004	004	-006	002	003	001	-003	000	002
-003	001	-003	007	-008	004	000	000	001	002	-003	000	001	000

Table 5
(J××-J++) (ft. hr.-1)

-034	019	005	-020	043	036	-011	-011	-005	-004	000	-006	003	
056	-079	031	006	003	-031	009	014	000	-009	-003	012	005	-009
053	094	-011	-006	019	-030	-001	014	015	-006	-003	004	000	-009
-093	-152	-064	046	119	038	-005	-018	010	019	004	-016	-008	019
081	082	031	-143	-215	-049	060	053	000	-001	-004	-008	004	001
-006	016	032	061	078	028	-026	-047	-014	-001	-001	005	000	-003
-016	004	-006	-006	-002	-009	-019	013	001	-008	006	009	-001	001
004	-006	002	000	013	-006	-003	009	-011	003	001	001	003	000
006	000	-003	-003	007	-013	012	-005	-003	006	003	-005	-002	001
-004	-002	-001	015	-011	-005	007	001	002	-001	-004	000	002	

Table 6
(J+×+J××) (ft. hr.-1)

-	45	15	-7	-25	-39	-27	1	10	7	5	-1	0	3
43	27	-4	-17	7	-8	-14	-3	5	12	7	-5	-1	3
25	55	31	1	-7	-43	-53	-34	-13	10	9	-1	-1	1
13	30	10	27	22	-36	-50	-27	-13	3	9	5	2	2
7	13	-11	29	39	-1	-11	-9	-4	4	6	3	-1	2
-1	5	4	23	11	-1	3	-5	7	13	4	-5	-4	1
4	-1	-1	7	3	17	27	7	9	11	1	-9	-4	0
4	3	1	1	-2	8	11	2	3	3	-1	-4	-2	-1
-1	0	-2	-5	-4	1	3	3	1	-1	0	-2	0	1
1	1	-1	0	5	5	1	3	5	3	1	-2	-1	-1

Table 7

24 hr. 500 mb. forecast for 1500Z 31st January, 1952 using J++

666	656	639	627	618	633	657	670	677	678	674	677	677	678	692	707	716
689	677	663	656	640	625	623	620	649	657	664	671	675	681	695	708	724
716	698	680	673	659	647	644	639	640	639	639	656	668	684	702	715	731
744	732	719	710	699	692	682	681	675	672	672	672	671	688	713	726	737
777	763	752	747	747	745	733	731	735	737	731	730	715	716	725	742	742
812	812	810	800	800	798	788	781	785	792	789	791	766	761	751	762	751
853	860	859	850	848	841	830	824	824	824	823	827	806	795	778	776	762
900	901	899	893	887	878	867	861	859	857	858	852	834	818	799	787	774
914	913	913	912	910	901	895	886	884	883	882	869	850	831	808	794	782
921	921	923	926	922	919	913	901	899	895	890	880	861	830	809	800	790
922	923	925	925	926	922	921	918	915	906	896	886	862	835	818	808	801
923	922	923	923	921	920	913	907	902	891	873	850	834	822	814	809	810
924	924	923	922	921	920	915	910	904	897	883	863	842	830	822	818	820

Table 8

24 hr. 500 mb. forecast for 1550Z 31st January, 1952 using J×+

666	656	639	627	618	633	657	670	677	678	674	677	677	670	692	707	716
689	677	671	650	638	622	617	616	636	651	665	672	676	683	697	715	724
716	698	691	674	664	651	632	614	618	625	643	658	675	690	708	719	731
744	732	718	714	701	695	677	658	641	633	638	654	677	700	716	721	737
777	763	761	753	755	739	731	726	708	692	671	671	691	715	728	733	742
812	812	810	810	794	788	782	778	782	767	743	718	719	738	744	750	751
853	860	856	856	849	832	823	832	831	825	807	779	763	761	761	766	762
900	901	889	891	883	868	863	869	872	865	856	830	800	784	775	776	774
914	913	912	909	910	894	886	894	901	894	883	856	832	803	789	785	782
921	921	923	922	914	908	903	907	914	910	893	866	841	818	802	794	790
922	923	924	925	922	922	919	923	925	918	899	872	850	828	811	802	801
923	922	923	923	921	920	913	907	902	891	873	850	834	822	814	809	810
924	924	923	922	921	920	915	910	904	897	883	863	842	830	822	818	820

cluded in Tables 7 and 8. The integrations are for 24 hr. and are made from the data given in Tables 1 to 6. The Jacobians used are J^{++} and $J^{\times+}$. There are very marked differences in the forecast heights given in Tables 7 and 8, rising to over 700 ft. The deep trough was developed much further westward in Table 8 than in Table 7. Further time integrations will be carried out.

Mr. Gilchrist is applying spherical harmonic analysis to a simplified form of the barotropic model at the 500 mb. surface. Since we are expanding the hemispherical function of height in terms of solutions of equations

$$\nabla\Phi = n(n+1)\Phi$$

geostrophic vorticities are written down automatically and the solution of Poisson equations becomes automatic. The non-linear terms such as $J(\Phi, \nabla^2\Phi)$ are expanded by means of formulae of the type

$$P_s^r P_m^e = \sum P_n^{r-e}$$

which have been investigated fully by Mr. Gilchrist. The problem now becomes one of representation and success depends upon how many harmonics are required to define closely enough an initial height field. So far harmonics up to P_{12}^{12} have been used in the problem of representation, and up to P_8^8 in the integration. It is believed that the vorticity calculations require a more accurate representation than does the velocity field.

This method of attack on the problem of forecasting may be more useful over longer periods of time since we are able to represent the persistent long wave pattern by a relatively few harmonics. The task of computing all the coefficients will commence very shortly.

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{k} \times \frac{g}{f} \nabla H_0$$

with similar vorticity equations.

4. The adiabatic equation

We assume that the motion is adiabatic, although non-adiabatic effects can be allowed for. The equation for the thickness h' between the levels p_0 and P is

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h' = -\frac{R}{g} \int_{p_0}^P \omega \left(\frac{\gamma}{g \rho} - \frac{\partial T}{\partial p} \right) \frac{dp}{p} \quad [5]$$

where γ is the suitable adiabatic lapse rate and ρ the density. We require an assumption about the integrand and take $\gamma/g\rho - \partial T/\partial p = -K$ where K is a constant evaluated from the mean values obtained by observation.

Then,

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h' = \frac{R}{g} K \omega_T G(p_0, P, p_T, p_1) \quad [6]$$

where

$$G = \int_{p_0}^P \frac{dp}{p} \left[2 \left(\frac{1}{p_T - p_0} - \frac{1}{p_T - p_1} \right) (p - p_0) + \left(\frac{2(p_T - p_0)}{p_T - p_1} - 1 \right) \left(\frac{p - p_0}{p_T - p_0} \right)^2 \right]$$

and is easily evaluated. Taking the Laplacian of [6]

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 h' + \nabla^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla h') = K \frac{R}{g} \left\{ G \nabla^2 \omega_T + \omega_T \nabla^2 G + 2 \nabla G \cdot \nabla \omega_T \right\} \quad [7]$$

and allowance could be made in this equation for $\nabla^2 K$.

5. The diagnostic equation for ω_T

Neglecting the twisting terms the vorticity equation is

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\zeta + f) + \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} = (\zeta + f) \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad [8]$$

and subtracting that at the level p_0 from that at the level P

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \zeta' + \mathbf{v}' \cdot \nabla (\zeta_0 + \zeta' + f) \\ = \omega_T (2\zeta_0 + 2f + \zeta') \left(\frac{P - p_0}{p_T - p_0} \right)^2 \left(\frac{2(p_T - p_0)}{p_T - p_1} - 1 \right) \end{aligned} \quad [9]$$

[4] where ω and derivatives have been expressed in terms of ω_T . If we now assume that the winds are sufficiently geostrophic

$$\zeta' = \frac{g}{f} \nabla^2 h'$$

so that combining equations [7] and [9]

$$\begin{aligned} K \frac{R}{g} G \nabla^2 \omega_T + 2 \frac{KR}{g} \nabla G \cdot \nabla \omega_T + \omega_T \left[K \frac{R}{g} \nabla^2 G - \frac{f}{g} \right. \\ \left. (2\zeta_0 + 2f + \zeta') \left(\frac{2(p_T - p_0)}{p_T - p_1} - 1 \right) \left(\frac{P - p_0}{p_T - p_0} \right)^2 \right] = [11] \\ = \nabla^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla h') - \frac{f}{g} \mathbf{v}' \cdot \nabla (\zeta_0 + \zeta' + f) - \frac{f}{g} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \zeta' \end{aligned}$$

Having eliminated the time variable, equation [11] is diagnostic in ω_T and can be solved either by integration or by finite difference methods.

6. Forecast of thickness and height of an isobaric surface

The thickness tendency equation to the level P is

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla h' = \frac{R}{g} K G \omega_T \quad [12]$$

and this equation is used as a prognostic equation in h' since ω_T has already been obtained from equation [11]. It remains to obtain a forecasting equation for H_0 or for H . Owing to the proximity to the surface it is possible that the vorticity equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{g}{f} \nabla^2 H_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \left(\frac{g}{f} \nabla^2 H_0 + f \right) \\ = 2 \left(\frac{g}{f} \nabla^2 H_0 + f \right) \left(\frac{1}{p_T - p_0} - \frac{1}{p_T - p_1} \right) \omega_T \end{aligned} \quad [13]$$

is unsuitable although it should be tried. Otherwise we solve the corresponding vorticity equation at the level P for H and subtract the thickness to obtain H_0 .

7. Forecast of tropopause pressure

We note that

$$\omega_T = \frac{dp_T}{dt} = \frac{\partial p_T}{\partial t} + \mathbf{v}_T \cdot \nabla p_T$$

so that

$$\frac{\partial p_T}{\partial t} = \omega_T - (\mathbf{v}_0 + \frac{p_T - p_0}{P - p_0} \mathbf{v}') \cdot \nabla p_T \quad [14]$$

which is the prognostic equation for p_T .

The Success of 72-hour Barotropic Forecasts in Relation to Mean Flow Patterns^{*)}

by

Jerome Namias

Abstract

The error field of a month-long series of barotropically computed 72-hour forecasts is compared with the time-averaged mean mid-tropospheric and thickness anomaly charts for the corresponding period. The goodness of the numerical forecasts appears to be related to the positions of the great ridges and troughs of the planetary waves of the mean charts in the sense that areas of greatest success coincide with ridges and troughs while the areas characterized by poor success are in confluent and thus baroclinic portions of the waves. An explanation is offered in terms of the smaller short period fluctuations associated with cyclone waves which are interdependent with the mean pattern.

The purpose of the note is twofold: 1. to suggest an avenue of approach to the pressing problem of how to improve short range numerical prognoses (through study of the errors with respect to climatic anomalies in the general circulation), and 2. to suggest an attack which may for the first time afford physical clues to the central problem of long range weather prediction — namely the problem of determining in individual months or seasons which centers of action of the general circulation are primary or forced and which are secondary or responsive.

^{*)} Published in: *Tellus* 8, 206—209 (1956).

Zusammenfassung

Das Fehlerfeld einer Monats-Serie 72-stündiger barotroper Vorhersagen wird mit den über die Zeit gemittelten mittleren Anomaliekarten der absoluten und relativen Topographie dieser Periode verglichen. Die Güte der numerischen Vorhersagen scheint zur Position der großen Rücken und Tröge planetarischer Wellen der Mittelkarten in der Weise in Beziehung zu stehen, daß Gebiete bester Güte mit den Rücken und Trögen zusammenfallen, während sich Gebiete schlechter Güte in konfluenten und daher baroklinen Teilen der Wellen befinden. Eine Erklärung bieten die kurzfristigen Schwankungen, die mit Zyklonenwellen verbunden sind, welche wiederum vom mittleren Feld abhängig sind.

Der Zweck dieser Veröffentlichung ist zweifach: 1) einen Weg vorzuschlagen, um das dringende Problem der Verbesserung der kurzfristigen numerischen Vorhersage anzufassen (durch Untersuchung der Fehler in bezug auf klimatische Anomalien in der Allgemeinen Zirkulation); und 2) eine Möglichkeit anzudeuten, wie zum ersten Male das Zentralproblem langfristiger Vorhersagen durch physikalische Schlüsse angegriffen werden kann — nämlich das Problem, wie in einzelnen Monaten oder Jahreszeiten bestimmt werden kann, welche Aktionszentren der Allgemeinen Zirkulation primär oder erzwungen und welche sekundär sind.

Über die numerische Berechnung zukünftiger atmosphärischer Zustände

von

Heinz Reiser

Zusammenfassung

Außer bei ganz speziellen Anfangsfeldern können die atmosphärischen Modellgleichungen nur mit Hilfe numerischer Methoden gelöst werden. Die Nichtlinearität der betreffenden Gleichungen erschwert eine realistische Abschätzung der durch die numerische Behandlung bedingten Verfahrens- und Abrundungsfehler außerordentlich; dagegen können Abschätzungen bei Verwendung der entsprechenden linearisierten Gleichungen leicht durchgeführt werden.

Die hier vorgelegten Untersuchungen basieren auf dem quasigeostrophischen 2-Flächen-Modell; die unter Annahme einer lediglich von p abhängigen Grundströmung U linearisierten Modellgleichungen besitzen einfache Wellenlösungen, mit deren Hilfe das allgemeine Anfangswertproblem durch Superposition gelöst werden kann. Diese Rechnung wurde sowohl für die analytischen Gleichungen durchgeführt als auch für die Differenzgleichungen, die durch Einführung eines Punktgitters für das Zeit-Raum-Kontinuum und zentrierter Differenzenquotienten an Stelle der Differentialquotienten entstehen. Der Vergleich beider Lösungen ermöglicht Aussagen über das Verhalten der Verfahrensfehler, welche die (komplexen) Phasengeschwindigkeiten der einzelnen Partialwellen modifizieren.

Am auffälligsten ist das Auftreten zweier Phasengeschwindigkeiten c_v und c_v' mit verschiedenen Realteilen, aber gleichen Imaginärteilen bei der Differenzenrechnung im Gegensatz zu der einen Phasengeschwindigkeit c_v des analytischen Modells. Diese Erscheinung entspricht der Tatsache, daß prinzipiell die Anfangswerte an zwei verschiedenen Zeitpunkten t_0 und t_1 für eine eindeutige Lösung bekannt sein müssen, wenn zentrierte Differenzenquotienten bezüglich der Zeit eingeführt werden. Läßt man die zeitlichen und räumlichen Maschenweiten immer kleiner werden, so nähert sich nur die Phasengeschwindigkeit c_v dem Wert c_v des analytischen Modells, während der Realteil von c_v' beliebig groß wird.

Eine Abschätzung des durch die Abrundungsfehler verursachten Unsicherheitsbereichs zeigt, daß im Falle baroklin labiler Partialwellen dieser Fehler mit derselben Exponentialfunktion anwachsen kann wie die Welle selbst; im Falle rein reeller Phasengeschwindigkeiten (neutrale Wellen) wächst der Fehler langsamer als N^2 an, wenn N die Anzahl der Zeitschritte ist.

Grundsätzlich können diese Abschätzungen auch für kompliziertere atmosphärische Modellgleichungen erweitert werden, wenn diese linearisiert und in endliche Differenzenquotienten übersetzt werden. Deshalb haben alle Schlüsse, die aus den hier dargelegten Resultaten gefolgert werden können, eine allgemeinere Bedeutung.

Aus den Lösungen folgt, daß die aus dem Verfahrensfehler resultierende Phasendifferenz zwischen den Partialwellen des analytischen Modells und denen der Differenzenrechnung linear mit der Zeit und sehr schnell mit abnehmender Wellenlänge $L_v = \frac{2\pi}{\nu k}$ zunimmt. Bei Verwendung normaler Maschenweiten ($\Delta x = 300$ km, $\Delta t = 1$ h, U im Mittel über p 20 m/sec) werden deshalb die Details in einer Vorhersage über beispielweise 48^h (kritische Wellenlänge von etwa 1500 km) vollkommen verfälscht, und nur großräumige Phänomene können noch als physikalisch reell angesehen werden. Eine ähnliche Folgerung läßt sich aus den Abrundungsfehlern herleiten.

Diese Begrenzung, welche durch eine von der Zeit abhängige kritische Wellenlänge charakterisiert wird, scheint ziemlich unabhängig von dem speziellen atmosphärischen Modell zu sein und wird hauptsächlich durch die Maschenweiten Δx und Δt bestimmt. Deshalb wird der Gebrauch komplizierterer atmosphärischer Modelle nur dann bessere Resultate liefern, wenn gleichzeitig die Fehlerquellen der numerischen Lösungsprozesse durch eine Reduktion der Maschenweiten vermindert werden.

On the Inclusion of Moist Adiabatic Processes in Numerical Prediction Models

by

Joseph Smagorinsky*)

(with 7 figures in the text)

Abstract

Numerical predictions of precipitation by means of a dry adiabatic quasi-linearized 3-level model show a systematic underprediction of the large-scale observed precipitation by as much as a factor of 35. The discrepancy is diagnosed as mainly the result of incorrect vertical motions inherent in baroclinic models of the type which are in current use. It is shown that heat of condensation, and to a lesser extent variations in the static stability, account for a major portion of the discrepancy. A 3-level non-linear moist adiabatic model is constructed and a means for solution of the governing equations is given.

Zusammenfassung

Numerische Vorhersagen des Niederschlags mit Hilfe eines trockenadiabatischen quasilinearen Drei-Flächenmodells zeigen systematisch eine zu geringe Vorhersage (bis zu 35 mal) des großräumig beobachteten Niederschlags. Der Unterschied wird hauptsächlich zurückgeführt auf die zu ungenaue Errechnung der Vertikalgeschwindigkeit mit den baroklinen Modellen, die zur Zeit Verwendung finden. Es wird gezeigt, daß im wesentlichen die Kondensationswärme, in geringerem Maße auch Abweichungen in der statischen Stabilität, für die Ungenauigkeiten verantwortlich sind.

Ein feuchtadiabatisches nichtlineares Drei-Flächenmodell wird aufgestellt und eine Anweisung für die Lösung der zugrundegelegten Gleichungen angegeben.

1. Introduction

The occurrence of condensation in the atmosphere is significant for short- and long-period evolutions of the meteorological elements. The motions can be directly affected by the addition of heat of condensation. They are also affected indirectly by the change of radiative balance as a result of the changed albedo of the atmosphere through cloudiness and also by variable water vapor absorption. The most immediate manifestation of condensations is of course precipitation.

The ability to predict large-scale precipitation is in fact an excellent measure of the ability of the numerical baroclinic models to predict the vertical motion field. The results of two such predictions were published in 1955 (1). These calculations were based on a 3-parameter model described by Charney (2) which is essentially the same as the model which has been in operational use by the Joint Numerical Prediction Unit in Suitland, Md., for more than a year. Briefly, the properties of the precipitation model are: the stratification is introduced by means of three divergent barotropic layers in which the motion is quasi-geostrophic, quasi-

static, quasi-horizontal (i.e., the vertical advection of vorticity and the turning of vortex tubes are neglected); the potential vorticity is linearized when it appears undifferentiated in the potential vorticity equation; the heat of condensation does not react upon the motions; the large-scale orographic effects are introduced a posteriori in a crude fashion; precipitation is assumed to occur at saturation. The results of these two calculations indicated a high degree of success in predicting the 12-hourly precipitation.

Since that time, additional calculations were made with essentially the same model except that the large-scale orographic effects were completely ignored and the vertical coordinate was taken as proportional to square of the pressure. These calculations were made entirely by electronic computer. The verification in these cases was extremely poor quantitatively although they were quite acceptable qualitatively. These will be discussed in greater detail later. Examination of the results disclosed no appreciable effect due to the minor changes from the original model (1).

This striking failure to predict the large-scale averaged precipitation, even when one tends to crudely take account of convective precipitation, has been evident even by simpler means of analysis. It is often impossible to account for sufficient condensation from vertical motions of the order of 5 cm sec⁻¹ which are deduced from baroclinic prediction models. If the vertical motions are indeed too small, then what effect should this have on the horizontal flow prediction? The difference in flow evolutions in barotropic and baroclinic models usually occurs slowly, becoming most pronounced after 24 hours. Hence one would expect that if the vertical motions in the baroclinic models were incorrect in magnitude, the influence on the horizontal motions also would be slow. On the other hand, incorrect vertical motions can account for highly incorrect calculated precipitation even in the first 12 hours.

Further analysis of the precipitation calculations, good and poor, led to a reexamination of the prediction model. It became apparent that in addition to convective activity the neglect of the feed-back of heat of condensation and the linearization of the static stability could be responsible for at least a considerable portion of the discrepancy between the predicted and the large-scale observed precipitation. In particular, heat of condensation has an important destabilizing influence which manifests itself immediately in the vertical motions. One may speculate that, depending on other circumstances, the influence on the horizontal evolutions may become appreciable within 24 hours. It was of interest to note that the hypothesis seemed to indicate that two relatively good precipitation forecasts with "dry" model, (1) would be affected less than the four more recent calculations if moist adiabatic changes and a variable static stability were permitted.

*) This work was jointly sponsored by the U. S. Weather Bureau, the Office of Naval Research, and the Geophysics Research Directorate, Air Force Cambridge Research Center.

The derivation of the equations for a model including moist adiabatic changes, the means of solution, and the results of some controlled experiments from which the above deductions were made, will be discussed in the following sections.

2. The Differential Equations

We take as the governing hydrodynamic equations the geostrophic and hydrostatic equations and the quasi-horizontal vorticity equation. The latter may be written as

$$\frac{D\eta}{Dt} = \eta \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad [1]$$

where η is the vertical component of the absolute vorticity, p is the pressure, t the time,

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \frac{dp}{dt} \\ \frac{d}{dt} &\equiv \frac{D}{Dt} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \\ \frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

x, y , are the coordinates in a pressure surface positive eastward and northward respectively, and u and v are the respective velocity components.

The individual change of potential temperature due to heat liberated during condensation is

$$\frac{d \ln \Theta}{dt} = \delta \frac{\Gamma}{p} \omega \quad [2]$$

where the potential temperature, Θ , is given by

$$\ln \Theta = \text{const} + (1-\kappa) \ln p + \ln \frac{1}{\rho} \quad [3]$$

$(1-\kappa) = c_v/c_p$ is the ratio of the specific heat at constant volume to that at constant pressure, ρ is the density, Γ/p is $d \ln \Theta / dp$ along a moist adiabat, and

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \geq 0 \text{ or } r < r_s \\ 1 & \text{if } \omega < 0 \text{ and } r = r_s \end{cases} \quad [4]$$

Γ is derivable from the Clausius-Clapeyron equation, the condition of conservation of equivalent potential temperature, and the equation of state (see (1)):

$$\Gamma = -\alpha \frac{\kappa \gamma - \kappa - 1}{\alpha \gamma - \alpha + 1} < 0 \quad [5]$$

where $\alpha \equiv \frac{L r_s}{c_p T}$ and $\gamma \equiv \frac{L}{AR^*T}$ [6]

in which L is the latent heat of condensation, T is the temperature, A^{-1} is the mechanical equivalent of heat, and R^* is the gas constant for water vapor. r is the mixing ratio and r_s its saturation value, a semiempirical function of p and T .

Thus the thermodynamic energy equation has the same form as for dry adiabatic motions except for the coefficient of ω , which we call the effective static stability:

$$0 = \frac{D \ln \Theta}{Dt} + \left(\frac{\partial \ln \Theta}{\partial p} - \delta \frac{\Gamma}{p} \right) \omega \quad [7]$$

The difficulty in the solution of the prediction equations lies in the non-linear dependence of ω and δ , particularly since δ varies in jumps. In order to cope with this non-linearity, we formulate the problem in terms of the differential equation for ω . In what follows we ignore variations of f in the geostrophic approximation. Applying the geostrophic and hydrostatic approximations to [3] and [7], we have

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial p} = \frac{1}{f} J \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}, \Phi \right) - H \omega \quad [8]$$

$$H \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial p} \left(\frac{\partial \ln \Theta}{\partial p} - \delta \frac{\Gamma}{p} \right) \quad [9]$$

and to [1] we have

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = J(\eta, \Phi) + f \eta \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad [10]$$

$$\eta \equiv \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi + f \quad [11]$$

where Φ is the geopotential and J is the Jacobian operator taken in the order x, y . Since $\delta \Gamma$ is horizontally variable, it would appear consistent if $\partial \ln \Theta / \partial p$ can vary horizontally. Hence at the minimum, three degrees of freedom are required in the vertical. In the manner of Charney and Phillips (3), we fashion a 3-level model with $\sigma \equiv (p/P)^2$ the vertical coordinate, where P is the pressure at the lower boundary. We define a vertical finite difference index k such that

$$k = 3\sigma + 1/2 \quad [12]$$

and the vertical increment is $\Delta \sigma = \sigma_{k+1/2} - \sigma_{k-1/2}$.

One normally would express H in [9] in terms of $\partial^2 \Phi / \partial \sigma^2$ and $\partial \Phi / \partial \sigma$ using [3] and the hydrostatic approximation such that

$$H = \left(\frac{2\sigma}{p} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} + (2 - \kappa - \delta \Gamma) \frac{2\sigma}{p^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad [13]$$

In the case of three degrees of freedom in the vertical, the linear first-order finite difference value of $\partial^2 \Phi / \partial \sigma^2$ is constant in each vertical:

$$\frac{\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_2}{(\Delta \sigma)^2} \quad [14]$$

One finds, however, that the truncation error is quite large for such a crude vertical mesh. Hence, although a first difference of Φ gives a fairly good approximation to $\partial \Phi / \partial \sigma$ and hence to the density, second differences may give a quite erroneous value of the corresponding continuous form. For example, in determining H from [13], [14], and the standard atmosphere values of Φ at $k = 1, 2, 3$, one finds an error of an order of magnitude and of opposite sign compared with the value of H determined directly from the standard atmosphere, "sounding". What suggests itself is the use of non-linear differences which make use of the climatological known variability of temperature in the vertical. Experience has shown that a form

$$T = a + b \ln \left(\frac{p}{P} \right) \quad [15]$$

gives a very satisfactory representation in the troposphere. With the hydrostatic relation we can write

$$\begin{aligned} a &= \sum_{l=1}^3 a_l \Phi_l \\ b &= \sum_{l=1}^3 b_l \Phi_l \end{aligned} \quad [16]$$

where the a_l and b_l can be computed once and for all.

To utilize [15] in calculating H , we write [9] in terms of $\partial \Phi / \partial \sigma$ and $\partial T / \partial p = b/p$:

$$H = -\frac{1}{p^2} [2\sigma (\delta \Gamma + \kappa) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + Rb] \quad [17]$$

where R is the gas constant for air. Finite differencing [8], [17], and [10] in the vertical with σ the vertical coordinate and abbreviating

$$Z_k \equiv \frac{2\sigma_k}{p_k \Delta \sigma} \quad [18]$$

yields:

$$\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} = \frac{1}{f} J(\Phi_{k+1}, \Phi_k) - \frac{1}{Z_{k+1/2}} (H\omega)_{k+1/2} \quad [19]$$

$$H_{k+1/2} = -\frac{1}{p_{k+1/2}} \left(Z_{k+1/2} (\delta \Gamma + \kappa)_{k+1/2} (\Phi_{k+1} - \Phi_k) + \frac{Rb}{p_{k+1/2}} \right) \quad [20]$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} = J(\eta_k, \Phi_k) + Z_k f \eta_k (\omega_{k+1/2} - \omega_{k-1/2}) \quad [21]$$

We form the differential equation governing ω at an interior level $k+1/2$ by eliminating $\partial\Phi/\partial t$ between [19] and [21]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (H\omega)_{k+1/2} - fZ_{k+1/2} (Z_{k+1} \eta_{k+1} + Z_k \eta_k) \omega_{k+1/2} \\ = -Z_{k+1/2} J(\eta_{k+1} + \eta_k - f, \Phi_{k+1} - \Phi_k) - fZ_{k+1/2} \\ (Z_{k+1} \eta_{k+1} \omega_{k+1/2} + Z_k \eta_k \omega_{k-1/2}) \end{aligned} \quad [22]$$

where $\omega_{1/2}$ and $\omega_{3/2}$ are given by the boundary conditions.

To insure the non-hyperbolicity of [22] we set $\eta = 0$ if $\eta < 0$ and $H = 0$ if $H < 0$. This is probably taken care of by the non-geostrophic motions in the actual atmosphere. In particular, $H < 0$ represents a state of large-scale gravitational instability. Such instability does not persist since it is normally relieved by small-scale convective motions. Since the model being devised here has no way of dealing with convective motions, then when $H < 0$ setting $H = 0$ simulates the effect of convective mixing, thus restoring the large-scale motions to a state determinate from our differential equations and boundary conditions. It is clear that we are neglecting the action of the convective mixing on the vertical redistribution of momentum, heat and water vapor, except as it modifies the effective stability.

It is necessary to provide for predicting changes in r in order to determine δ in [4]. This is accomplished by neglecting evaporation sources (1) and assuming a water vapor sink due to the immediate precipitation upon the attaining of saturation of a material particle. Hence

$$\frac{d \ln r}{dt} = \delta \frac{d \ln r_s}{dt} = \delta \frac{Q}{p} \omega \quad [23]$$

where Q/p is $d \ln r_s / dp$ along a moist adiabat. One can determine the dependence of Q on T and r_s in a manner similar to that used in deriving [5]:

$$Q = \frac{\alpha \gamma + \alpha - 1}{\alpha \gamma - \alpha + 1} > 0 \quad [24]$$

Hence the equation for continuity of water vapor is

$$0 = \frac{Dr}{Dt} + \left(\frac{\partial r}{\partial p} - \delta r \frac{Q}{p} \right) \omega \quad [25]$$

In vertical finite differences and using the geostrophic approximation [25] becomes

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} = \frac{1}{f} J(r_k, \Phi_k) - \left(\frac{\partial r}{\partial p} - \delta r \frac{Q}{p} \right)_k \omega_k \quad [26]$$

For the purpose of calculating $(\partial r / \partial p)_k$ we assume r to vary quadratically:

$$r = \sum_{l=0}^2 a_l \left(\frac{p}{P} \right)^l \quad [27]$$

so that

$$\left(\frac{\partial r}{\partial p} \right)_k = \sum_{l=1}^2 A'_{lk} r_l \quad [28]$$

where A'_{lk} can be computed once and for all.

To compute $\delta_{k+1/2}$ in [20], we need $r_{k+1/2}$, which we can determine from [27]:

$$r_{k+1/2} = \sum_{l=1}^2 B'_{l, k+1/2} r_l \quad [29]$$

To obtain ω at integral values of k in [26], we linearly interpolate

$$\omega_k = \frac{\omega_{k+1/2} + \omega_{k-1/2}}{2} \quad [30]$$

According to [5], [24], and [6], $T_{k+1/2}$ in [20] and Q_k in [26] are functions of T at $k+1/2$ and k , respectively. For this purpose T is calculated from [15] and [16].

3. The Boundary Conditions

We take

$$\omega_{1/2} = 0 \quad [31]$$

At the lower boundary we assume surface pressure variations due to the earth's orography to be small perturbations compared with the mean surface pressure. This permits us to deal with linear boundary conditions and simply connected domains in each coordinate pressure surface. Hence

$$\omega_{3/2} = \mathbf{v}_h \cdot \nabla \bar{p}_h \quad [32]$$

where \bar{p}_h is the standard pressure of the large-scale smoothed orography and \mathbf{v} is the wind vector with components u and v . \mathbf{v}_h is interpolated from

$$\mathbf{v}_h = \frac{(\bar{p}_h - p_2) \mathbf{v}_1 - (\bar{p}_h - p_1) \mathbf{v}_2}{p_1 - p_2} \quad [33]$$

For lateral boundary conditions we take

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad [34]$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad [35]$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 0 \quad [36]$$

Hence the condition on ω can be obtained from [19]:

$$\omega_{k+1/2} = \frac{Z_{k+1/2}}{f(H_d)_{k+1/2}} J(\Phi_{k+1}, \Phi_k) \quad [37]$$

where we have taken for H its standard atmosphere dry value at $k+1/2$. We can compute $J(\Phi_{k+1}, \Phi_k)$ on the boundary making use of [35]. Numbering the horizontal grid points as in fig. 1, then Φ at the external point 2 must be

$$\Phi_2 = -\Phi_1 - \Phi_3 - \Phi_4 + 4\Phi_0. \quad [38]$$

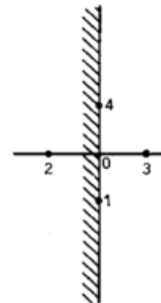


Fig. 1
Typical horizontal mesh at a lateral boundary.

4. Relaxation Methods

Eq. [21] can be solved by the extrapolated Liebmann procedure outlined by Charney and Phillips (3). The vertical motion equation [22] introduces additional complexities. Upon finite differencing the Laplacian operator, [22] is of the form

$$\nabla^2 (H\omega) - \beta^2 \omega = W \quad [39]$$

Eq. [20] may be written in the form

$$H = (1-\delta) H_d + \delta H_m \quad [40]$$

where H_d is the dry adiabatic value and H_m the moist adiabatic value of H . Therefore, H depends on ω through [4]; and r , r_s , H_d , H_m , and W are known variables. We denote the iteration number by the anterior superscript r . We scan from the lower left corner of the grid, denoting by the posterior subscript, points in a k surface arranged as in fig. 1, but where $()_0$ is at an interior point. Systems [39], [40], and [4] can be solved by the relaxation scheme

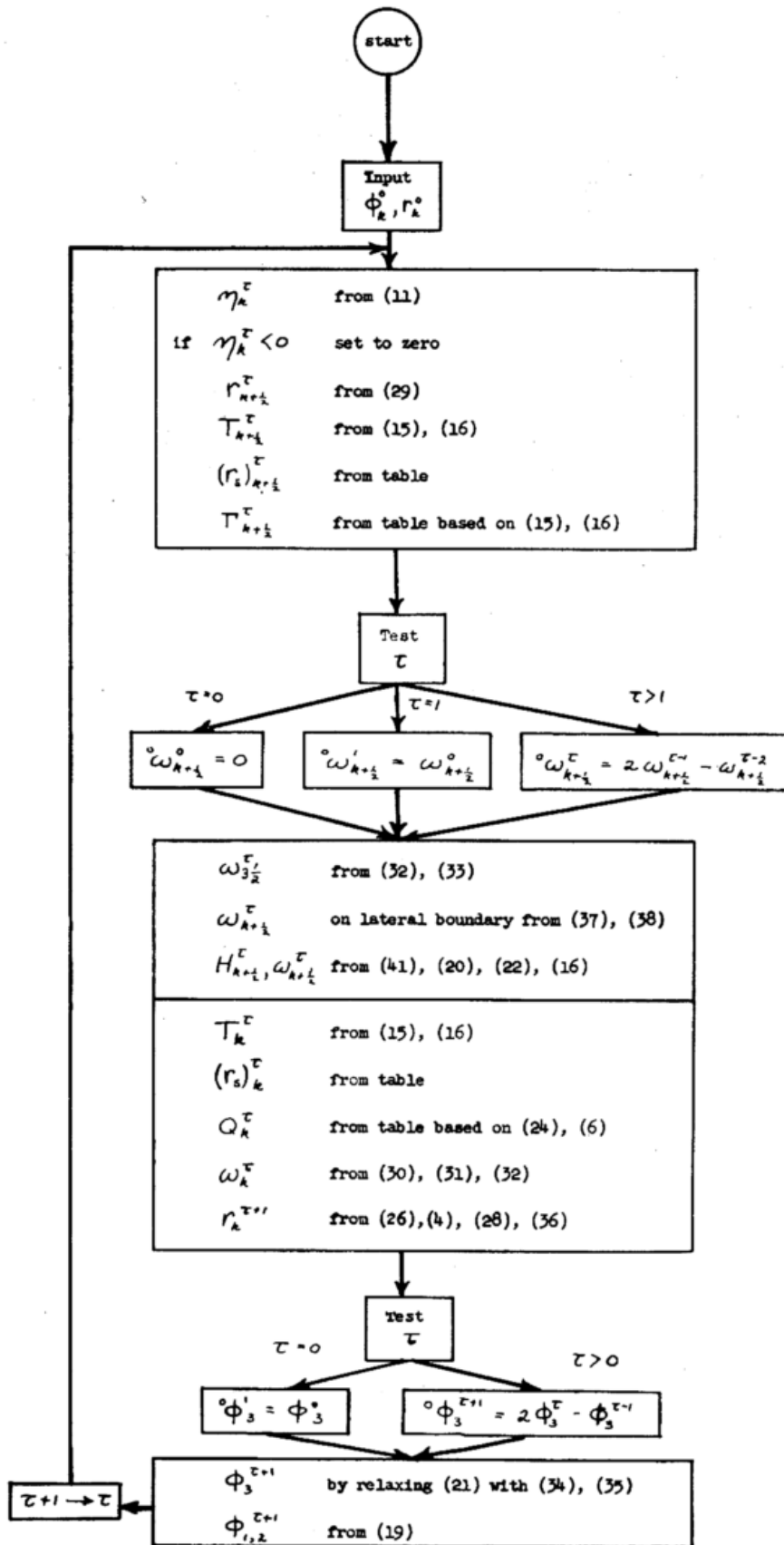


Fig. 2
Flow diagram for numerical solution of moist adiabatic model equations.

$$\left. \begin{aligned}
 \nu^{+1} \omega_0 &= (1-\lambda) \nu \omega_0 + \frac{\lambda}{4^{\nu} H_0 + \beta_0^2} \{ \nu^{+1} (H\omega)_1 + \\
 &+ \nu^{+1} (H\omega)_2 + \nu (H\omega)_3 + \nu (H\omega)_4 - W_0 \} \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \nu H &= H_d + (H_m - H_d) \nu \delta \\
 \text{if } \nu H < 0 &\text{ set to zero}
 \end{aligned} \right. \\
 \nu \delta &= \begin{cases} 0 & \text{if } \nu \omega \geq 0 \text{ or } r < r_s \\ 1 & \text{if } \nu \omega < 0 \text{ and } r = r_s \end{cases}
 \end{aligned} \right\} [41]$$

where $\left\{ \begin{aligned} \lambda > 1 &\text{ for over-relaxation} \\ \lambda < 1 &\text{ for under-relaxation} \end{aligned} \right.$

5. Computational Procedure

We will now outline in some detail, by means of a flow diagram, fig. 2, the order in which the model equations are used. Where an operation is more or less self-evident from precedent (e. g. (3)), the details of this operation are not indicated in the flow diagram, e. g., the formation of the horizontal finite difference operators, the map scaling, the time integration, and the solution of the absolute vorticity equation [21] by relaxation methods when ω is given. τ is the time index such that $t = \tau \Delta t$, where Δt is the time increment and $t = 0$ initially.

6. An Exeperimental Relaxation of the ω Differential Equation

It was desirable to study the convergence of the iterative scheme [41] and also to obtain a rough estimate of the effect of heat of condensation at one time. To simplify matters a 2-parameter model was constructed with p the vertical coordinate such that the vertical finite difference index $k = 2 (p/P) + 1/2$. Hence we have an equation of the form of [39] applying to the $k = 3/2$ level or $p = 500$ mb. For this experiment we take $\omega = 0$ on the lateral boundaries, and $\beta^2 = \text{constant} \approx 2 f^2$ ($\Delta s / \Delta p)^2 = 0.72 \times 10^{-4}$ cgs, where Δs is the horizontal mesh length. A reasonable field of points where $r = r_s$ was specified and the variability of H was simplified to

$$\begin{aligned}
 H &= \bar{H}_d = \text{const.} = 4 \times 10^{-4} \text{ cgs if } \delta = 0 \\
 H &= \bar{H}_m = \text{const.} \quad \quad \quad \text{if } \delta = 1
 \end{aligned}$$

A number of experiments were performed in which different values for \bar{H}_m were used. These values were confined to the range $0 \leq \bar{H}_m \leq \bar{H}_d$. The field of W was generated by taking $H = \bar{H}_d$ everywhere and using a field of ω at 550 mb which had been obtained from a 3-level model calculation. This field of ω was also used as the first guess in the iterative scheme [41].



Fig. 3
A field of vertical motion (cm sec⁻¹) assumed to occur with dry adiabatic motions.

Fig. 3 shows the field of $w \approx -g\varrho\omega$ for $\bar{H}_m = \bar{H}_d$. In figs. 4, the hatched areas contain points where $r = r_s$. These figures show the results of the relaxation of $\bar{H}_m = 0$ for the different scales of saturation area. The values of w where $r = r_s$ are considerably larger than in the dry case, whereas the remainder of the field of w was hardly influenced. The variation of the maximum value of w located in south-central, United States for

intermediate values of \bar{H}_m is shown in fig. 5. These are given in terms of the ratios of the moist to dry values of w . It is quite apparent that the influence of the heat of condensation through the effective static stability is one of destabilization. It is also to be noted that the smaller the scale of condensation the larger the vertical motions.



(a)



(b)

Fig. 4

The field of vertical motion corresponding to fig. 3 when moist adiabatic motions are introduced. $r = r_s$ in the hatched area. $\bar{H}_m = 0$. (a) large-scale saturation; (b) small-scale saturation.

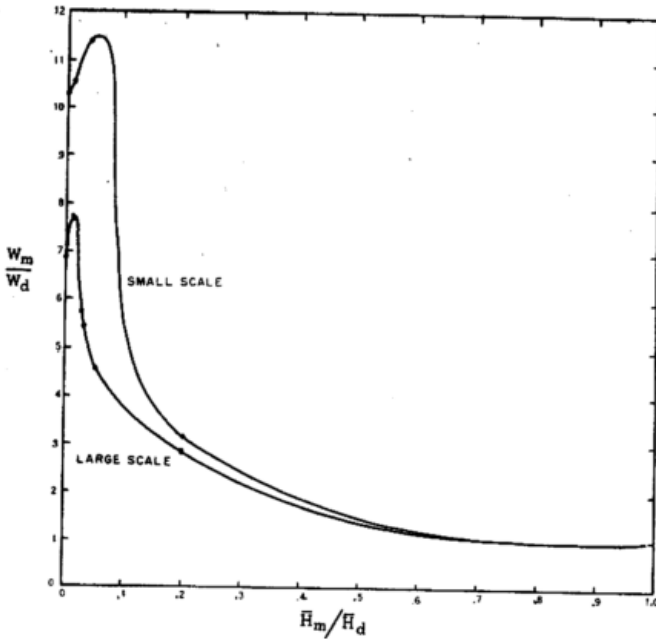


Fig. 5
The ratio of the moist-to-dry value of the maximum w located in south-central United States in figs. 3 and 4 for different values of \bar{H}_m/\bar{H}_d .

Experimentation with λ to optimize the convergence rate indicates that for $\bar{H}_m \sim \bar{H}_d$, over-relaxation is optimum with a value $\lambda \approx 1.5$. For $\bar{H}_m \ll \bar{H}_d$, under-relaxation with $\lambda = 0.25$ for one to four iterations and then over-relaxation with $\lambda = 1.5$ is optimum*). Convergence to the criterion $v^{n+1}w - v^n w \leq 0.025 \text{ cm sec}^{-1}$ in a 19×29 grid is accomplished by 9 iterations for $\bar{H}_m \sim \bar{H}_d$ and 18 iterations for $\bar{H}_m \ll \bar{H}_d$ in the case of the larger-scale saturation area. For the smaller scale, a greater number of iterations is required.

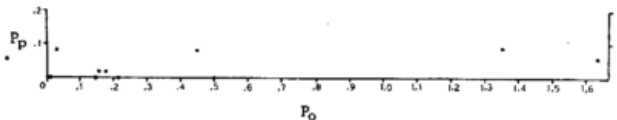
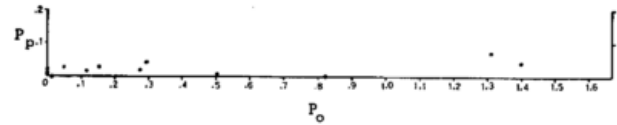
7. Analysis of „Dry-Adiabatic“ Precipitation Predictions

Four precipitation predictions assuming dry adiabatic processes were prepared in addition to the two published in (1). The results are summarized in figs. 6. Although 36-hour predictions were prepared, the degeneracy was already quite evident within 12 hours, hence only the 12-hourly precipitation is shown. The lower figure is a qualitative verification according to rain or no-rain. The upper diagram is a quantitative verification of the predicted precipitation against the spatial average of the observed precipitation taken over a grid square (approximately $90,000 \text{ km}^2$). The verification areas were restricted to hourly precipitation reports which were immediately available. Whereas the qualitative verification is fairly acceptable, the magnitude of these predictions is too small generally by at least a factor of 6 and by as much as a factor of 35. On the other hand, the two cases computed in (1) verified to within a factor of approximately two or three.

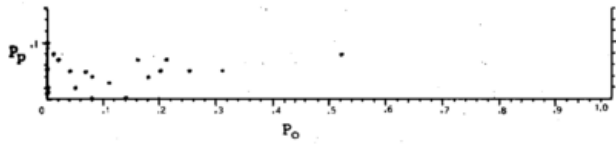
In order to estimate the effect of heat of condensation and variable static stability, the initial observed value of H at 800 mb was computed from [9] for some points in the vicinity of maximum observed average precipitation. This was also done for the two cases published in (1). Fig. 7 shows a plot of H/\bar{H}_d vs. P_o/P_p for these selected points, where P_p/P_o is the ratio of predicted precipitation to observed-average precipitation. We see that P_o/P_p tends to increase with decreasing H/\bar{H}_d . In parti-

*) This procedure was suggested by G. O. Collins.

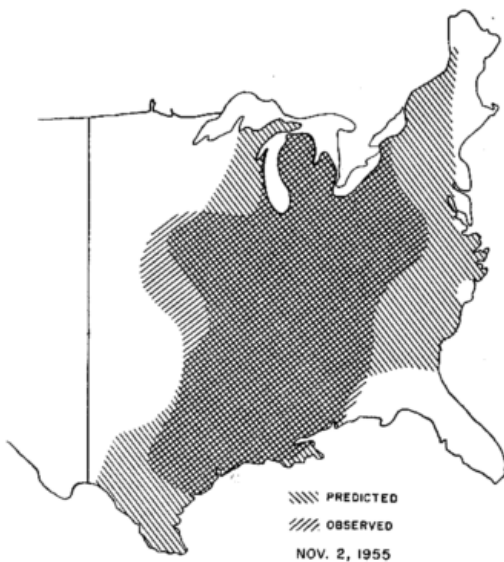
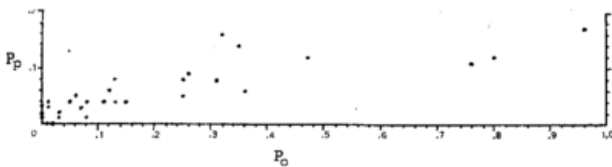
cular, the two relatively good predictions published in (1), November 5, 1953, and November 24, 1950, have relatively large values of H/\bar{H}_d . The situations of August 17, 18, 1955, are Hurricane Diane and are particularly small in scale. In these cases the ratio P_o/P_p was 35 and 20, respectively, at the precipitation maximum. On the other hand, this ratio was approximately 6 for the November 2, 1955, and October 13, 1955, situations, which were larger in scale. This is consistent with the results of the experimental computations which showed that for a given value of \bar{H}_m/\bar{H}_d , the smaller the scale of condensation the larger the vertical motion. Since convective instability was evident in all four cases, but to a greater extent in the hurricane situations, part of the discrep-



(b)



(c)



(d)

Fig. 6

Verification of "dry-adiabatic" precipitation predictions with linearized static stability. P_D is the predicted precipitation in inches/12hrs. P_0 is a spatial average of the observed precipitation in inches/12hrs. The verification period begins at 1500 z from the dates given.

any must be attributed to convective precipitation, although it is difficult to make a quantitative estimate. A more conclusive verification of the hypothesis will be possible when the system of prediction equations are actually integrated.

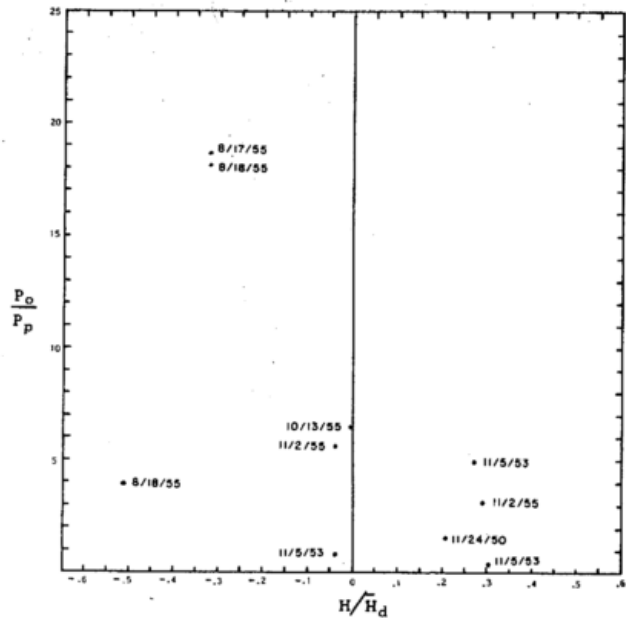


Fig. 7

\bar{H}_d is the assumed constant value of H in calculating P_D . H is the actual value corresponding to the observed precipitation P_0 .

Fig. 7 demonstrates the typical variability of H in the atmosphere. The major deviations from the standard value, \bar{H}_d , result from heat of condensation. Although the contribution from variable static stability is less, it is still significant.

It is of interest that most of the selected points in fig. 7 fall in the range $H < 0$. In the light of earlier discussion, these represent convective instability. For the purposes of the large-scale precipitation, these should be considered as $H = 0$. However, since the small-scale downward motions do not yield negative precipitation, the large-scale average effect of the convective motions is to increase the total precipitation.

Observations show a marked tendency for precipitation to occur where the relative humidity is less than 100 per cent. This may be a result of instrumental lag or of real pre-saturation. In a situation where there is likely to be considerable large-scale condensation, the effect of requiring 100 per cent relative humidity is to under-predict because of a delay in attaining saturation. The precipitation calculations were redone requiring only 80 per cent relative humidity for precipitation to occur. The result is that the boundary of the precipitation area is slightly enlarged and the maximum is increased by less than 10 per cent.

8. Concluding Remarks

To account for the observed large-scale precipitation and the vertical motions they imply, one must take account of heat of condensation, variable static stability, and convective instability. Although the first two can be dealt with dynamically, only the qualitative occurrence of the latter can be determined. Nevertheless, heat of condensation and variable static stability can account for an order of magnitude increase in the vertical motions computed from dry adiabatic quasi-linearized baroclinic models. A more precise study of the effect will be possible when the moist adiabatic model equations are actually integrated. The program for such a calculation by means of a high-speed computer is in the process of being prepared.

With large-scale vertical motions of the order of 30 cm sec⁻¹, some question is raised as to the validity of

the geostrophic approximation or of the quasi nondivergent approximation applied through the balance equations (see (4) for instance). However, since such large vertical motions would occur in small regions, the local invalidity of the filtering approximation may not be crucial. The quasi horizontal approximation may also be subject to some question.

Since heat of condensation is a destabilizing influence, one might anticipate overpredicting cyclogenesis. On the other hand, if one were to include the stabilizing influence of the stratosphere on baroclinic instability (5), the two effects would tend to compensate.

Acknowledgements

The writer wishes to acknowledge the assistance of his colleagues: G. O. Collins for doing the necessary programming, and R. D. Graham for analyzing the the data and results.

References

- (1) Smagorinsky, J. and Collins, G. O.: On the Numerical Prediction of Precipitation. *Monthly Weather Rev.* **83**, 53—68 (1955)
- (2) Charney, J. G.: Numerical Prediction of Cyclogenesis. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **40**, 99—110 (1954).
- (3) Charney, J. G. and Phillips, N. A.: Numerical Integration of the Quasi-Geostrophic Equations for Barotropic and Simple Baroclinic Flows. *J. Meteor.* **10**, 71—99 (1953).
- (4) Charney, J. G.: The Use of the Primitive Equations of Motion in Numerical Prediction. *Tellus* **7**, 22—26 (1955)
- (5) Gates, W. L.: Proceedings of this Symposium.

Report on Routine Operation and Development Program of the Joint Numerical Weather Prediction Unit — July 1954 to May 1956¹⁾

by

Philip Duncan Thompson

Abstract

The Joint Numerical Weather Prediction Unit (JNWP Unit) — established in Washington, D. C. by the Joint Meteorological Committee on 1 July 1954, and jointly staffed, financed, and administered by the U. S. Air Force, Navy, and Weather Bureau — has been producing daily numerical forecasts on a routine basis since 6 May 1955. The forecasts are computed by an IBM Model 701 Electronic Data Processing Machine, a high speed automatic computer of single-address, stored-program type. The machine's high-speed electrostatic memory (Williams tube) has a storage capacity of 4096 seventeen-bit half words (also addressable as full words), supplemented with magnetic drum and tape units of much larger capacity. With optimum programming, the multiplication time is 256 microseconds. Input is by card reader, and output by card punch and/or printer.

The forecast being prepared at the present time are of three types:

1) Forecasts of the heights of the 1000, 700 and 500 millibar surfaces and vertical air speed at the 800 and 550 millibar surfaces, based on the equations for the Charney-Phillips (1953) 3-level model. Forecasts for periods of 24 and 36 hours are computed once daily from 1500Z initial data. Initial heights at the points of a grid slightly larger than the U. S. (19 x 29 points about 275 kilometers apart) are obtained by automatic analysis of original teletype reports, supplemented by manually interpolated heights over oceans. Computation of forecasts begins at about 2200Z, and 36 hour forecasts are usually printed out and automatically analyzed by 2330Z. Copies are distributed to the three supporting services, with extra copies to the National Weather Analysis Center (NWAC), which is responsible for the preparation of short range area prognosis over the U.S. The forecasts are also relayed via facsimile over some Air Force and Navy circuits.

2) Forecasts of the height of the 500 millibar surface, based on the vorticity equation for the nondivergent barotropic model. Forecasts for periods of 24, 48, and 72 hours are computed once daily from 0300Z initial data. Initial 500 millibar heights are interpolated manually at the points of a large grid centered on S. Canada (20 x 23 points spaced about 550 kilometers apart). The initial stream-function is obtained by solving the so-called "balance" equation. Computation of the forecast begins at about 1630Z, and the forecasts are usually completed, printed out, and automatically analyzed by 1730Z. Distribution is the same as for 3-level forecasts, but only the 72 hour forecasts are relayed over facsimile circuits.

3) Forecasts of the heights of the 1000 and 500 millibar surfaces and the vertical air speed at the 500 millibar surface, based on the equations for the Thompson

son "thermotropic" model. These forecasts, which include the effects of major terrain features, are computed four times a week (Tuesday through Friday) from 0300Z initial data. At the present time, initial data are interpolated manually at the points of a very large grid centered on S. Canada (30 x 34 points spaced about 300 kilometers apart). Computation of the forecasts begins about 1000Z, and 36 hour forecasts are usually printed out and automatically analyzed by 1200Z. At present, distribution of these experimental forecasts is limited to the central offices of the supporting services. It is expected that they will replace the present 3-level forecasts in the near future.

Over a period of five months, the relative accuracy of the barotropic forecasts, the 3-level forecasts, and the prognoses prepared subjectively by the NWAC may be summarized as follows: The accuracy of the barotropic 500 millibar forecasts, as revealed by the S-scores**) officially adopted by the NWAC, is slightly but not significantly better than the 500 millibar forecasts based on the 3-level model. Both are quite as good as the subjective 500 millibar forecasts prepared by the NWAC. Judged subjectively, the 1000 millibar forecasts based on the 3-level model are slightly worse than the NWAC prognoses.

Very recent changes of operating procedure, such as the use of a balanced nongeostrophic initial wind field for the barotropic forecasts, have resulted in a perceptible increase in the accuracy of numerical forecasts of 500 millibar height. Moreover, 500 millibar forecasts based on the thermotropic model have established a clear and consistent advantage over subjective forecasts since the former were initiated on 3 April 1956. The thermotropic 1000 millibar forecasts are comparable in quality to the subjective forecasts.

As would be expected, the performance of numerical forecasts deteriorates with decreasing data coverage and increasing length of forecast period. About three days appears to be the upper limit on the period of useful forecasts, with present data coverage and with the relatively crude physical models now in use.

Daily inspection and post mortem analysis of over five hundred routine numerical forecasts have revealed that they suffer from several different types of systematic error, the most serious of which are listed below, together with their most plausible explanations.

1) False "baroclinic" anticyclogenesis, confined mainly to the lowest layers and resulting in strong intensification of the associated minimum of absolute vorticity — probably due to replacement of true absolute vorticity and true static stability by constant

¹⁾ A more complete report has been submitted for publication in the Bulletin of the American Meteorological Society.

²⁾ Essentially a measure of the ratio of the RMS vector error in forecast geostrophic wind to RMS geostrophic wind.

standard values, where they enter undifferentiated in the original vorticity and adiabatic equations. Thermotropic forecasts made with and without this type of "linearization" indicate that the explanation above is at least partially correct.

2) False "barotropic" anticyclogenesis, producing height errors of equal magnitude at all levels, most frequently along warm ridges (subtropical highs). Judging from comparisons between barotropic forecasts made from initially geostrophic wind fields and from initially nongeostrophic (balanced) wind fields, this type of error is due to the geostrophic approximation.

3) Errors due to incorrect specification of lateral boundary conditions. These errors may contaminate an area half the size of the U. S. in 36 hours. As indicated earlier, this difficulty has been met by extending the grid so far that the central portions are unaffected during the forecast period.

4) Errors due to incorrect specification of lower boundary conditions, frequently manifested in underprediction of cyclogenesis in the lee of the Rocky Mountains. The effect of large scale irregularities of terrain has been incorporated in both the thermotropic and 3-level models, with generally favorable results.

5) Systematic underprediction of speed of medium-scale features and growth of quasi-random, small-scale fluctuations—probably due to truncation error in approximating derivatives by finite differences. Numerical experiments have shown that these errors are correctable by:

- (a) use of higher order finite - difference approximations, coupled with
- (b) intermittent application of smoothing operators, which remove components with wavelengths of 2—4 grid intervals but which leave larger scale components intact.

As a result of the numerical experiments outlined briefly above, the JNWP Unit is either in the process of introducing, or soon plans to introduce appropriate modifications into its routine of operational forecasting. At the present time, the research staff of the JNWP Unit is concentrating on the development of nongeostrophic baroclinic models suitable for routine use.

In summary, it is our opinion that:

1) Numerical methods of short range area prognosis have already equalled the capabilities of subjective methods, and have exceeded them in ability to predict the pressure and flow patterns in the middle troposphere for periods of 36—72 hours. It is significant that numerical prediction, in its earliest stages, has essentially matched the wisdom and skill attainable from 20 years of a senior forecaster's experience.

2) Numerical prediction is still in the highly experimental stage, and has not yet reached its full potential. Present methods suffer from a variety of errors, which, although serious, have plausible explanations in existing theory. Accordingly, one should expect a continuous and gradual increase in forecasting accuracy as the underlying theory approaches greater generality.

3) The application of present and anticipated methods of numerical prediction is eminently feasible, from the standpoints of both engineering and economy.

Zusammenfassung

Die am 1. 7. 1954 von dem Joint Meteorological Committee in Washington D. C. gegründete und von

der US Air Force, Navy und Weather Bureau gemeinsam personell besetzte, finanzierte und verwaltete Joint Numerical Weather Prediction Unit (JNWP Unit) hat seit dem 6. Mai 1955 täglich numerische Wettervorhersagen auf routinemäßiger Basis aufgestellt. Die Vorhersagen werden mittels einer Elektronen-Rechenmaschine, Modell IBM 701, einer automatischen Hochgeschwindigkeitsmaschine, berechnet. Das hochgeschwindige elektrostatische Gedächtnis (Williams tube) hat eine Speicherkapazität von 4096 17-dualstelligen Halbwörtern, ergänzt durch Magnettrommeln und Bänder von sehr viel höherer Kapazität. Bei günstigster Programmierung beträgt die Multiplikationszeit 256 Mikrosekunden.

Die Eingabe erfolgt durch Kartenabfühler, Ausgabe durch Kartenstanzer bzw. Drucker.

Die Vorhersagen, die gegenwärtig berechnet werden, sind dreierlei Typs:

1) Vorhersagen der Topographien der 1000-, 700- und 500-mb-Flächen und der Vertikalbewegung im 800- und 550-mb-Niveau mit Hilfe der Gleichungen des Charney-Phillips-Modells (1953). Vorhersagen für 24 und 36 Stunden werden täglich einmal mit den Daten des 1500 Z-Termins berechnet. Die Anfangshöhen an den Punkten eines Gitters, welches etwas größer ist als das Gebiet der USA (19×29 Punkte mit etwa 275 km Abstand) werden durch automatische Analyse aus den Original-Fernschreiben gewonnen und durch manuell interpolierte Höhen über den Ozeanen ergänzt. Die Berechnung der Vorhersage beginnt um etwa 2200Z; die 36-stündigen Vorhersagen werden ungefähr um 2330Z von der Maschine ausgedruckt und automatisch analysiert. Kopien werden an die drei die JNWP-Unit unterstützenden Dienste weitergegeben, mit einer Sonderkopie für das National Weather Analysis Center (NWAC), welches für die Herausgabe kurzfristiger Vorhersagen in den Vereinigten Staaten verantwortlich ist. Die Vorhersagen werden auch durch Faksimile über einige Luftwaffen- und Marinenetze weitergegeben.

2) Vorhersagen der absoluten Topographie der 500-mb-Fläche mit Hilfe der Vorticity-Gleichung für das divergenzfreie barotrope Modell. Auf Grund der 0300Z-Daten wird täglich einmal eine 24-, 48- und 72stündige Vorhersage berechnet. Die Anfangswerte der 500-mb-Topographie werden manuell an den Gitterpunkten eines großen Gitternetzes interpoliert, dessen Zentrum über Südkanada liegt (20×23 Punkte mit ungefähr 550 km Abstand). Die Stromfunktion des Ausgangsfeldes wird durch Lösung der sog. Balance-Gleichung gewonnen. Die Berechnung der Vorhersage beginnt um etwa 1630Z und ist einschließlich automatischer Analyse um 1730Z beendet. Der Verteiler ist der gleiche wie in 1), doch wird nur die 72-stündige Vorhersage durch Faksimile verbreitet.

3) Vorhersagen der 1000- und 500-mb-Flächen und der Vertikalgeschwindigkeit im 500-mb-Niveau mit Hilfe der Gleichungen für Thompsons „thermotropes“ Modell. Diese Vorhersagen, welche die Haupteffekte der Gestalt des Erdbodens berücksichtigen, werden viermal wöchentlich (Dienstag bis Freitag) aus den 0300Z-Daten berechnet. Gegenwärtig werden die Anfangsdaten manuell interpoliert, und zwar an den Punkten eines sehr großen Gitternetzes, dessen Zentrum über Sükanada liegt (30×34 Punkte, ungefähr 300 km Abstand). Die Berechnung der Vorhersagen beginnt um etwa 1000 Z. Die 36-stündigen Vorhersagen sind einschließlich automatischer Analyse um etwa 1200Z fertig. Gegenwärtig werden diese versuchsweisen Vorhersagen an die Zentralämter der drei genannten Dienste weitergegeben. Es wird erwartet, daß diese Vorhersagen die gegenwärtigen 3-Schichten-Vorhersagen in Kürze ersetzen werden.

Für einen 5-monatigen Zeitabschnitt kann die relative Güte der barotropen Vorhersagen, der 3-Schichten-Vorhersagen und der subjektiven Vorhersagen des NWAC wie folgt zusammengefaßt werden: Die Güte der barotropen 500-mb-Vorhersagen, entsprechend dem vom NWAC offiziell verwendeten S_1 -Maß*), ist etwas, aber nicht wesentlich besser als die 500-mb-Vorhersage des 3-Schichten-Modells. Beide sind ungefähr so gut wie die subjektive 500-mb-Vorhersage des NWAC. Subjektiv beurteilt, sind die 1000-mb-Vorhersagen des 3-Schichten-Modells etwas schlechter als die des NWAC.

Die kürzliche Einführung eines nicht-geostrophischen Anfangs-Windfeldes für die barotrope Vorhersage hat eine merkliche Verbesserung der Güte der numerischen Vorhersage im 500-mb-Niveau ergeben. Außerdem haben sich mit Hilfe der 500-mb-Vorhersagen auf Grund des thermotropen Modells klare Vorteile gegenüber den subjektiven Vorhersagen ergeben, seitdem die ersteren am 3. 4. 1956 eingeführt wurden. Die thermotropen 1000-mb-Vorhersagen sind in ihrer Qualität mit den subjektiven Vorhersagen vergleichbar. Wie erwartet, verschlechtern sich die numerischen Vorhersagen mit abnehmender Dichte der Beobachtungsdaten und mit zunehmendem Vorhersagezeitraum. Etwa drei Tage scheinen die obere Grenze einer brauchbaren Vorhersage zu sein, jedenfalls bei dem gegenwärtigen Beobachtungsnetz und den z. Z. in Gebrauch befindlichen relativ groben physikalischen Modellen. Die tägliche Durchsicht und nachträgliche Analyse von über 500 numerischen Routine-Vorhersagen haben gezeigt, daß sie an mehreren systematischen Fehlern kranken. Die bedeutendsten von ihnen werden zusammen mit einer plausiblen Erklärung nachfolgend aufgeführt.

1) Falsche barokline Antizyklogenese, hauptsächlich beschränkt auf die unteren Schichten, mit einer starken Intensivierung des entsprechenden Minimums der absoluten Vorticity — wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß die wirkliche absolute Vorticity und statische Stabilität durch konstante Standardwerte ersetzt wird, wo diese Größen undifferenziert in der Vorticity- und Adiabatangleichung auftreten. Thermotrope Vorhersagen mit und ohne diese Art von „Linearisierung“ zeigen, daß die obige Erklärung mindestens teilweise richtig ist.

2) Falsche barotrope Antizyklogenese, welche Geopotentialfehler gleicher Größenordnung in allen Schichten erzeugt und welche am häufigsten entlang warmer Rücken (subtropische Hochs) auftritt. Vergleiche zwischen barotropen Vorhersagen mit einem geostrophischen Anfangswindfeld und einem nicht-geostrophischen (Balance-Gleichung) Anfangswindfeld zeigen, daß dieser Fehler auf die geostrophische Approximation zurückzuführen ist.

3) Fehler infolge unkorrekter Spezifizierung der seitlichen Randbedingungen. Diese Fehler beeinflussen

*) Ein Maß für das Verhältnis der Streuung des vorhergesagten geostrophischen Windes zum eingetretenen geostrophischen Wind.

nach 36 Stunden ein Gebiet von der Hälfte der Vereinigten Staaten. Wie vorher bereits festgestellt wurde, konnte diese Schwierigkeit dadurch überwunden werden, daß das Gitternetz so weit ausgedehnt wird, daß seine zentralen Gebiete während der Vorhersagezeit nicht erfaßt werden.

4) Fehler infolge unkorrekter Spezifizierung der unteren Randbedingungen wirken sich am häufigsten in einer zu gering berechneten Zyklogenese im Lee der Rocky Mountains aus. Der Effekt großräumiger Höhenunterschiede im Terrain wurde sowohl ins thermotrope als auch ins 3-Schichten-Modell mit günstigem Ergebnis einbezogen.

5) Systematisch zu langsame Berechnung der Geschwindigkeit mittelräumiger Feldeigenschaften und das Anwachsen willkürlich kleinräumiger Schwankungen sind wahrscheinlich auf den Verfahrensfehler (truncation error) zurückzuführen, indem die Ableitungen durch endliche Differenzen ersetzt werden. Numerische Experimente haben gezeigt, daß diese Fehler korrigiert werden können durch:

- (a) Verwendung von Differenzapproximationen höherer Ordnung zusammen mit
- (b) zeitweiser Anwendung von Glättungsoperatoren, welche Komponenten mit Wellenlängen von 2—4 Gitterintervallen beseitigen, jedoch die großräumigen Komponenten unberührt lassen.

Als Ergebnis der numerischen Experimente, die oben kurz beschrieben wurden, führt die JNWP-Unit gegenwärtig zweckmäßige Modifikationen in ihre Routinearbeiten ein bzw. plant dies. Zur Zeit konzentriert sich die Forschungsgruppe der JNWP-Unit auf die Entwicklung nicht-geostrophischer barokliner Modelle, die zur routinemäßigen Verwendung geeignet sind.

Zusammenfassend vertreten wir folgende Ansicht:

1) Numerische Methoden für kurzfristige Vorhersagen sind bereits mit den subjektiven Methoden vergleichbar und haben sie darin übertroffen, daß sie das Druck- und Strömungsfeld der mittleren Troposphäre auf 36 bis 72 Stunden vorausberechnen können. Es ist bedeutend, daß die numerische Vorhersage bereits in ihren Anfängen das Wesentliche der Kenntnisse und Erfahrungen eines 20 Jahre tätigen Forecaster erreicht hat.

2) Die numerische Vorhersage befindet sich noch in einem Experimentierstadium und hat noch nicht volle Wirksamkeit erreicht. Die gegenwärtigen Methoden kranken an einer Reihe von Fehlern, die — wenn auch ernsthaft — doch eine plausible theoretische Erklärung haben. Daher darf man eine ständige Verbesserung der Vorhersagegüte erwarten, und zwar in dem Maße, wie die zugrundeliegende Theorie ausgeweitet wird.

3) Die Anwendung der gegenwärtigen und zukünftigen Methoden der numerischen Wettervorhersage ist sehr ausbaufähig, sowohl vom technischen wie auch vom wirtschaftlichen Standpunkt.

A Theory of Large-Scale Disturbances in Nongeostrophic Flow¹⁾

by

Philip Duncan Thompson

Abstract

The primary aim of this article is to derive a complete system of modified hydrodynamical equations which govern a large class of "meteorological" motions of the atmosphere, but which cannot generate solutions corresponding to sound and gravity waves. The latter have no significant effect on the behavior of the large-scale disturbances; they do, however, create serious computational problems (through the mere possibility of their mathematical existence), and cannot be resolved by measurements at widely separated points.

By a detailed analysis of the motions of a linear system, it has been found that the omission of the total derivative of the horizontal divergence from the divergence equation is necessary to exclude gravity-wave solutions. In effect, this modification diverts all of the transformed internal and potential energy into the wave energy of the large-scale disturbances. In slightly stronger form, this type of modification is also sufficient to exclude gravity-wave solutions from the general non-linear equations, and is essentially a generalization of the "filtering approximations" introduced by Charney (1948).

The scheme proposed for integrating the modified non-linear equations is an iterative method, whereby a conditionally convergent sequence of approximate solutions can be generated from a known initial distribution of pressure. This method is applied to the solution of a system of equations which is one order of approximation higher than the equations of quasigeostrophic motion, and provides the basis for a practicable method of numerical forecasting.

The average rate of "development" or increase of the total rotational energy has been investigated in the case of the general two-level model, and compared with the average rates of development in the quasi-geostrophic model and the quasi-nondivergent models recently proposed by Kuo and others. The mechanism of instability, whereby potential energy is transformed into rotational energy or kinetic energy of the amplifying disturbances, is found to be the same in all cases. Other conditions remaining the same, however, the average rate of development in the quasi-geostrophic and quasi-nondivergent models is exactly twice that in the general divergent model. Such differences are not apparent in very nearly barotropic flow, but become more accentuated in cases of strong baroclinic development. These results, which may account for a general tendency to overpredict increases in total kinetic energy in quasi-geostrophic baroclinic models, indicate that the horizontal advection of absolute vorticity with the divergent component of the wind is an important effect in strongly baroclinic flow.

Finally, we have proposed a relatively simple "divergent" nongeostrophic model, in which the filtering is accomplished by introducing the geostrophic approxima-

tion into the adiabatic equation. The velocity potential and vertical air speed are related to the streamfunction through a pair of linear diagnostic equations. Both of the latter are of elliptic type, and can be solved by wellknown numerical methods.

Zusammenfassung

Das Hauptziel dieser Arbeit besteht darin, ein vollständiges System modifizierter, hydrodynamischer Gleichungen abzuleiten, die eine große Klasse „meteorologischer“ Bewegungen der Atmosphäre beherrschen, die aber keine Lösungen für Schall- und Gravitationswellen enthalten. Die letzteren sind ohne bedeutende Wirkung auf das Verhalten großräumiger Störungen; sie bedingen jedoch unangenehme mathematische Probleme, die nicht durch die Weitmaschigkeit des Beobachtungsnetzes ausgeschaltet werden können.

Aus einer detaillierten Analyse eines linearen Gleichungssystems ergab sich, daß die Vernachlässigung der individuellen Ableitung der horizontalen Divergenz in der Divergenzgleichung notwendig ist, um Lösungen für Gravitationswellen auszuschließen. Tatsächlich lenkt diese Modifikation alle transformierte innere und potentielle Energie in die Wellenenergie großräumiger Störungen. Diese Art der Modifikation ist auch hinreichend, Lösungen für Gravitationswellen aus den allgemeinen nicht-linearen Gleichungen auszuschalten und bedeutet im wesentlichen eine Verallgemeinerung der Filterapproximationen, die von Charney (1948) eingeführt wurden.

Das Schema, welches für die Integration der modifizierten nicht-linearen Gleichungen vorgeschlagen wird, besteht in einer Iterationsmethode, wobei eine bedingt-konvergente Folge von approximativen Lösungen aus einer bekannten Anfangsverteilung des Druckfeldes erzeugt werden kann. Diese Methode wurde auf die Lösung eines Gleichungssystems angewandt, welches einer besseren Approximation als der geostrophischen entspricht und liefert die Grundlage für eine praktisch anwendbare Methode der numerischen Vorhersage.

Die durchschnittliche „Entwicklung“ oder Zunahme der gesamten Rotationsenergie wurde für den Fall eines allgemeinen Zwei-Schichten-Modells untersucht und mit der durchschnittlichen Entwicklung quasigeostrophischer und der kürzlich von Kuo und anderen vorgeschlagenen quasi-divergenzfreien Modelle verglichen. Der Vorgang der Instabilität, bei welcher potentielle Energie in Rotationsenergie der anwachsenden Störungen umgewandelt wird, hat sich in allen Fällen als gleich erwiesen. Auch andere Bedingungen bleiben gleich, jedoch ist der mittlere Betrag der Entwicklung in quasigeostrophischen und quasi-divergenzfreien Modellen genau doppelt so groß wie in allgemeinen Modellen unter Berücksichtigung der Divergenz. Solche Diffe-

¹⁾ Most of the material included in this lecture appeared in an article under the same title in *Journal of Meteorology* 13, 251-267 (1956).

renzen sind in nahezu barotropen Störungen nicht offensichtlich, treten jedoch in Fällen starker barokliner Entwicklung mehr hervor. Diese Ergebnisse sprechen dafür, daß die Zunahme der kinetischen Energie in quasi-geostrophischen baroklinen Modellen zu groß ausfällt und kennzeichnen, daß die horizontale Advektion der absoluten Vorticity mit dem Divergenzanteil des Windes einen bedeutenden Effekt in stark baroklinen Strömungen ausübt.

Schließlich haben wir ein relativ einfaches „divergentes“ nichtgeostrophisches Modell vorgeschlagen, bei dem die Filterung durch Einführung der geostrophischen Approximation in die Adiabatangleichung bewerkstelligt wird. Geschwindigkeitspotential und Vertikalbewegung stehen zur Stromfunktion durch ein Paar linearer diagnostischer Gleichungen in Beziehung. Beide sind von elliptischem Typ und können durch bekannte numerische Methoden gelöst werden.

A Theory of Ultra Large-Scale Turbulence and Long Period Velocity Variations in Barotropic Flow¹⁾

by

Philip Duncan Thompson

Abstract

By combining an equation for the conservation of zonal momentum with the eddy vorticity equation for nondivergent barotropic flow through a channel, it has been found possible to express the time variations of the longitude-averaged zonal wind in terms of the mean zonal wind itself and certain statistics of the eddy velocity field. In large-scale turbulence... where the characteristic dimension of the eddies is comparable with the entire "width" of the flow... these eddy statistics take on the properties of autocorrelation functions; thus, they depend primarily on the overall scale of the eddies and intensity of turbulence, rather than on details of the flow pattern. Changes in the scale and intensity of large-scale turbulence are related to changes in the mean zonal flow through the principles of conservation of total kinetic energy and variance of vorticity. Under a general hypothesis regarding the "stability" of the eddy statistics, the equations for the zonally-averaged motion comprise a complete system of nonlinear equations, which can be integrated by finite-sum and -difference methods. Accordingly, these equations constitute a mathematical theory of large-scale "free" turbulence, and provide the basis for a numerical method of predicting the zonally-averaged motion.

With the assumption that the eddy scale is invariant, the equation governing the mean zonal wind takes a form related to that of the classical wave equation. Numerical integrations of this equation verify that extremes of mean wind (e. g., pronounced jets) maintain their identity over long periods of time, and migrate either northward or southward (or in both directions at once) in a very regular way... a phenomenon that has been observed by Riehl et al (1950). The results also show that a strong jet in the mean westerlies tends to split into two weaker jets, which then move in opposite directions to produce the separated double jet structure typical of widespread blocking. The latter has been described as a characteristic denouement from strong zonal flow by Cressman (1950). The theoretical speed of migration of extremes in the mean zonal wind is found to agree closely with the observed speed in a case where published data are available.

Since these features of long-period velocity variations — the most striking and regular discovered to date — have a characteristic time scale of a week or two, numerical prediction methods based on the present theory show some promise of aiding in the preparation of extended-range forecasts.

Zusammenfassung

Durch Kombination einer Gleichung für die Erhaltung des Zonalimpulses mit der Störungsvorticitygleichung für divergenzfreie barotrope Strömungen in einem Kanal ist es möglich, die zeitlichen Änderungen

der über die geographische Länge gemittelten Zonalgeschwindigkeit durch die mittlere Zonalgeschwindigkeit selbst und bestimmte statistische Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes der Störungen auszudrücken. In großräumiger Turbulenz — wo die charakteristische Wellenlänge der Störungen mit der gesamten Ausdehnung der Strömungen vergleichbar ist — nehmen diese statistischen Größen des Störungsfeldes die Eigenschaften von Autokorrelationsfunktionen an; daher hängen sie in erster Linie von der mittleren Größe der Störungen und der Intensität der Turbulenz ab und nicht so sehr von den Einzelheiten des Strömungsfeldes. Änderungen in der Ausdehnung und Intensität großräumiger Störungen stehen in Beziehung zu Änderungen der mittleren Zonalströmung, und zwar durch die Prinzipien der Erhaltung der gesamten kinetischen Energie und Vorticity-Abweichungen. Unter der Annahme allgemeiner Hypothesen betreffend die Stabilität der statistischen Größen stellen die Gleichungen für die zonal gemittelte Strömung ein vollständiges System nicht-linearer Gleichungen dar, welches durch Differenzmethoden gelöst werden kann. Entsprechend stellen diese Gleichungen eine mathematische Theorie großräumiger „freier“ Turbulenz dar und liefern die Grundlage für eine numerische Methode zur Vorhersage der zonal gemittelten Strömungen.

Unter der Annahme, daß die Ausdehnung der Störungen unveränderlich ist, nimmt die Gleichung für die mittlere Zonalströmung die Form der klassischen Wellengleichung an. Numerische Integrationen dieser Gleichung zeigen, daß Extreme des mittleren Zonalwindes (z. B. ausgeprägte Strahlströme) ihre Eigenheit über lange Zeitperioden aufrechterhalten und nordwärts oder südwärts oder in beiden Richtungen in sehr regelmäßiger Weise wandern — ein Phänomen, das von Riehl und anderen (1950) beobachtet wurde. Die Ergebnisse zeigen auch, daß eine starke Strahlströmung die Tendenz hat, sich in zwei schwächere Strahlströme aufzuspalten, die sich dann in entgegengesetzten Richtungen bewegen, um die doppelte Strahlstromstruktur zu erzeugen, welche für Blockierungen typisch ist. Das letztere wurde als charakteristisch für die Ausgangssituation starker Zonalströmungen durch Cressman (1950) beschrieben. Die theoretische Verlagerungsgeschwindigkeit der Extreme der mittleren Zonalströmung stimmt in einem Fall, wo veröffentlichte Beobachtungsdaten zur Verfügung stehen, gut mit der beobachteten Geschwindigkeit überein.

Da diese Merkmale langperiodischer Geschwindigkeitsänderungen — die auffallendsten und regelmäßigsten, die bisher entdeckt wurden — ein charakteristisches Zeitmaß von 1—2 Wochen aufweisen, versprechen numerische Methoden auf Grund dieser Theorie einigen Nutzen bei der Aufstellung langfristiger Vorhersagen.

¹⁾ An article, containing substantially the same material included in this lecture, has been submitted for publication in *Tellus*.

Über den Einfluß der Orographie auf den meridionalen makroturbulenten Impulstransport in der Atmosphäre¹⁾

von

Friedrich Wippermann

Zusammenfassung

Fast alle quantitativen Untersuchungen, die sich mit zeitlichen Mittelwerten einer atmosphärischen Feldgröße befassen, machen die Auswertung von Termen notwendig, welche den turbulenten Transport irgendeiner Quantität darstellen. Diese Turbulenzterme werden zumeist durch die Korrelation zwischen den Abweichungen der Geschwindigkeitskomponenten von ihrem zeitlichen Mittelwert einerseits und denjenigen der zu transportierenden Quantität andererseits beschrieben. In theoretischen Untersuchungen vernachlässigt man solche Turbulenzterme im allgemeinen aus Gründen der mathematischen Schwierigkeiten, indem man den zeitlichen Mittelwert mit dem zum Falle der Stationarität gehörenden Wert identifiziert; in empirischen Untersuchungen erfordert die Auswertung der Einzeldaten zur Bestimmung solcher Turbulenzterme einen sehr hohen Arbeitsaufwand.

Es wird eine Methode angegeben, die es gestattet, durch Aneinanderreihung von in Teilintervallen nahezu gültigen stationären Zuständen die Turbulenzterme näherungsweise zu berechnen. Hierzu ist lediglich die Kenntnis einiger statistischer Maßzahlen bezüglich des zeitlichen Auftretens der zu transportierenden Quantität erforderlich. Die Größe der Teilintervalle wird mit 2^{1/2} bis 5 Tagen bestimmt.

Das Verfahren wird zur Lösung von zwei meteorologischen Problemen angewendet:

A Die Berechnung zeitlicher Mittelwerte der Höhen der 500-mb-Fläche unter Berücksichtigung des Einflusses der Orographie macht die Auswertung eines Termes der Form $\overline{(U^{-1})^v v^v}$ erforderlich. Mit dem vorgenannten Verfahren wird die Berechnung der Höhenwerte unter Berücksichtigung dieses Termes für drei verschiedene Häufigkeitsverteilungen des Auftretens der Zonalströmung durchgeführt. Die

Rechenergebnisse werden mit den Beobachtungsdaten verglichen.

B. In hemisphärischen Bilanzuntersuchungen des Strömungsimpulses (im Rahmen der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation) wird stets eine Berücksichtigung des meridionalen, makroturbulenten Transportes zonaler Bewegungsgröße $\overline{U^v v^v}$ erforderlich. Auch diese Größe wird für verschiedene Häufigkeitsverteilungen der Zonalströmung U berechnet und mit den Ergebnissen der Auswertung von Einzelbeobachtungen verglichen.

Es ist nicht möglich, den über einen geschlossenen Breitenkreis hinweggehenden, planetarischen Anteil dieses turbulenten Flusses mit dem vorgenannten Verfahren zu berechnen, sondern vielmehr nur die orographisch bedingten (sich über einen ganzen Breitenkreis aufhebenden) Abweichungen hiervon. Hierdurch wird es möglich, Entscheidungen darüber zu treffen, inwieweit der aus Beobachtungsdaten ermittelte turbulente Impulsfluß über einen Breitenkreis-sektor als repräsentativ für den über den geschlossenen Breitenkreis hinweggehenden planetarischen Fluß angesehen werden kann. Es erweist sich, daß die beiden mit Beobachtungsdaten am besten besetzten Sektoren, nämlich der amerikanische (ca. 120° W — 60° W) und der europäische (ca. 20° W — 60° E) als repräsentativ gelten können.

Die Anwendung des Verfahrens setzt die Existenz stationärer Lösungen voraus, wodurch in den meisten Fällen wiederum eine vorherige Linearisierung (in der räumlichen Abhängigkeit) notwendig wird. Die Lösung der beiden Probleme A und B muß somit auf die Anwendung eines eindimensionalen atmosphärischen Modells beschränkt bleiben.

¹⁾Die vollständige Arbeit wurde in den Berichten des Deutschen Wetterdienstes Band 5, Nr. 30, veröffentlicht.

