

Berichte
des
Deutschen Wetterdienstes

Nr. 133
(Band 17)

DK 551.511 : 551.558.1

**Numerische Simulation hochreichender
Feuchtkonvektion auf der Basis der
ursprünglichen Eulerschen Gleichungen**

von
Eberhard Müller

(mit 61 Abbildungen im Anhang und 9 Tabellen im Text)

Offenbach a. M. 1974
Selbstverlag des Deutschen Wetterdienstes

Inhalt

	Seite
Zusammenfassung	3
Abstract	4
1. Konvektion im numerischen Experiment	5
1.1. Definition	5
1.2. Phänomen und Modell	6
1.3. Einordnung und Aufgabe	20
2. Physik und Numerik des Modells	24
2.1. Die Gleichungen	24
2.1.1. Trockene Konvektion	24
2.1.2. Schallfilterung	33
2.1.3. Feuchte Konvektion ohne Niederschlag	38
2.2. Das numerische Schema	49
2.3. Lineare Analyse	57
2.4. Das K-Problem	69
2.5. Randbedingungen	81
2.6. Anfangsbedingungen	86
3. Experimente	92
3.1. Statische Umschichtung	93
3.2. Dynamische Umschichtung	99
3.2.1. Phasenablauf	99
3.2.2. Struktur der Konvektionszelle	105
3.2.3. Umschichtungsvorgang	112
3.2.4. Energetik	116
3.2.5. Einfluß von K-Parametrisierung und vorgegebener Zellbreite auf den konvektiven Prozeß	123
4. Bilanz und Perspektiven	129
Literatur	134
Anhang (Abbildungen 1–61)	A 1–A 22

Anschrift des Verfassers:

Dr. Eberhard Müller, 6050 Offenbach (Main), Frankfurter Straße 135
Deutscher Wetterdienst, Zentralamt

Zusammenfassung

Der numerischen Simulation feuchtkonvektiver Prozesse werden erstmalig die unverkürzten Eulerschen Gleichungen der Hydro-Thermodynamik zugrundegelegt, spezialisiert auf reversible Vorgänge (Sättigungsgleichgewicht, kein Niederschlag). Dieses ungefilterte System bedingt zwar wegen der enthaltenen Schallphänomene numerisch (Courant-Friedrichs-Lewy-Kriterium) einen kleinen Zeitschritt; dafür ist es vom rein prognostischen Typ (Entfallen einer zwischengeschalteten Randwertaufgabe) und entbindet von unberechtigten physikalischen Voraussetzungen, die bisher im Falle hochreichender Feuchtkonvektion gemacht werden mußten. Nichtlineare numerische Instabilität in Zusammenhang mit dem räumlich und zeitlich zentrierten Differenzschema läßt sich durch geeignete Wahl der turbulenten Diffusionskoeffizienten (K) vermeiden; deren zugleich realistische Felddarstellung gelingt über die quasistationäre Behandlung der Bilanzgleichung für die Turbulenzenergie. Eine bei bedingt labiler, d.h. trockenstabiler, Schichtung mögliche Form linearer numerischer Instabilität kann durch eine Analyse der linearisierten Gleichungen in Differenzenform erklärt und beseitigt werden.

Das 2dimensionale Modell beschreibt den vertikalen Querschnitt einer langgestreckten Zelle hochreichender Feuchtkonvektion (Böenlinie); das vorgegebene Integrationsgebiet ist physikalisch abgeschlossen. Die hypothetische Anfangsatmosphäre, zusammengesetzt aus einem Grundzustand und einer auslösenden Störung, wird einer Schallfilterung unterworfen. 3 numerische Experimente, die sich hinsichtlich der seitlichen Ausdehnung des Integrationsgebietes und der K -Parametrisierung unterscheiden, werden vergleichend untersucht. Hierbei geht es einmal um den Phasenablauf und die Organisationsstruktur eines feuchten Konvektionsvorganges; zum anderen wird der Aspekt der vertikalen Umschichtung, demonstriert an Vertikalflüssen, Vertikalprofilen und Energieumsetzungen, besonders herausgearbeitet. Es zeigt sich, daß das Parallelmodell der statischen Umordnung einer Luftsäule einen nützlichen Verständnishintergrund zu liefern vermag.

Abstract

Numerical simulation of deep moist convection based on the original Eulerian equations

For the first time the numerical simulation of moist convection is based on the original Eulerian equations of hydro-thermodynamics, specialized for reversible processes (saturation equilibrium, no precipitation). Including the sound phenomena this unfiltered system involves a small numerical time step (CFL criterion); on the other hand, it is of a pure marching type and dispenses from unjustified physical assumptions till now necessarily made in the case of deep moist convection. Nonlinear computational instability in connection with the centered (in space and time) finite-difference scheme can be avoided by a suitable choice of the turbulent diffusion coefficients (K); a realistic field representation is developed starting from the turbulent energy equation in its stationary form. A special, removable, type of linear computational instability occurring under conditionally unstable, i.e. dry stable, conditions is explained by an analysis of the linearized equations in finite-difference form.

The two-dimensional model refers to the vertical cross-section of a very long cell of deep convection (squall line); the given domain is physically closed. The hypothetical initial atmosphere, consisting of a basic state and a starting disturbance, has been subjected to a sound filtering procedure. 3 numerical experiments which differ with respect to the lateral extent of the domain and the parameterization of K are investigated in comparison. On the one side, we are interested in the development and organisational structure of a moist convective process; on the other side, the aspect of vertical turnover of air masses is especially demonstrated by means of vertical fluxes and profiles as well as energy transformations. It turns out that a parallel model managing static rearrangements of the initial order of thin layers can be helpful in the interpretation and understanding of the results.

Kontinuum durch Gitterpunkte bzw. Spektralkomponenten so diskretisiert, daß der untersuchte Vorgang durch diese ("skalig" genannten) Größen befriedigend aufgelöst wird; subskalige Prozesse müssen parametrisiert, d.h. durch skalige Größen ausgedrückt werden. Der meteorologisch relevante Maßstab der Mikroturbulenz schließt sich im Fall der Cumulus-Konvektion unmittelbar an den skaligen Spektralbereich an (vgl. z.B. das Maßstabsdiagramm in (29)); turbulente Prozesse nehmen auf Ablauf und Ergebnis konvektiver Umlagerungen erheblichen Einfluß. Eine geeignete Parametrisierung, die der hohen Raum-Zeit-Abhängigkeit der skaligen Größen Rechnung trägt, gehört zu den zentralen Problemen numerischer Konvektionsmodelle.

Durch die Anwendung numerischer Modelle (numerische Experimente) lassen sich Naturvorgänge nachvollziehen (simulieren). Dabei ergeben sich nicht nur Einsichten in den Mechanismus des simulierten Prozesses, sondern auch Größen, die den Prozeß als Ganzes betreffen. Gerade die über den konvektiven Maßstab horizontal gemittelten Vertikalflüsse von fühlbarer und latenter Wärme, Wassersubstanz, Impuls und anderen Luftmasseneigenschaften müssen in großmaßstäbigen Modellen als subskalige Prozesse parametrisiert werden. Diese Aufgabe ist wegen des geordneten Charakters dieser Prozesse durch Gradientansätze od.ä. nicht zu bewältigen.

1.2. Phänomen und Modell

Die Vertikalverlagerung einer anfangs vorgegebenen Masse, die sich gegenüber ihrer Umgebung durch unterschiedliche Dichte auszeichnet (konvektives Element), ist eines der Urphänomene der Konvektion. Für den Fall eines in geschichteter Atmosphäre aufsteigenden Warmluftkörpers (thermal) wurde dieser Vorgang bereits 1959 von Malkus und Witt (54) numerisch simuliert. Bei allen Experimenten entwickelte sich die Anfangsstörung in eine pilzförmige Gestalt, deren abgerundete Kappe eine frontale Verdichtung der Isentropen und

eine wirbelförmige Zirkulation am seitlichen Rand aufweist. In zahlreichen weiteren Arbeiten bis zum heutigen Tage (68, 42, 43, 67, 19, 30) dient das konvektive Element sozusagen als Testphänomen numerischer Konvektionsmodelle. Es läßt sich in Laborexperimenten mit Flüssigkeiten simulieren (z.B. (83, 108)) und in der organisierten Phase (Verzögerungsphase) durch einfache Relationen charakterisieren, die aus dimensionsanalytischen Betrachtungen hervorgehen. In der Atmosphäre finden wir den Vorgang verbreitet in der Grenzschicht (durch thermische Inhomogenitäten der Unterlage) realisiert; er kann die Auslösung eines feuchtkonvektiven Prozesses veranlassen. Dieser entwickelt darauf seine eigene Dynamik, bei der vor allem der Gesamtauftrieb nicht länger als eine konservative Eigenschaft anzusehen ist.

Erfolgt in einer thermisch feuchtlabil geschichteten Atmosphäre ein Anstoß nach oben, so resultiert - sofern Sättigung gegeben ist - durch Phasenübergänge des Wassers (Kondensation, Gefrieren, Sublimation) eine beschleunigte Aufwärtsbewegung. Sättigung im Aufstiegsbereich ist neben der geeigneten thermischen Schichtung eine weitere, erschwerende Bedingung für das Zustandekommen von Feuchtkonvektion. Die im Luftkontinuum zu beachtende kompensierende Absinkbewegung geht im wesentlichen trockenadiabatisch vor sich, wodurch sich auch diese Luft relativ zur unbewegten Umgebung erwärmt und damit zu einer Dämpfung des Gesamtvorgangs führt. In trockenlabiler Schichtung verläuft hingegen Auf- und Absteigen gleichermaßen beschleunigt. Ferner muß berücksichtigt werden, daß die aufsteigende Luftmasse durch materielle und diffusive Eigenschaftsflüsse mit ihrer Umgebung in Austausch steht (dynamisches und turbulentes Entrainment bzw. Detrainment). Schließlich führt erzwungenes Aufsteigen ungesättigter Luft oberhalb des Cumuluskopfes zu dynamischer Abkühlung und damit zur Ausbildung von Abtriebskräften.

Diesem Versuch einer anschaulichen Beschreibung läßt sich entnehmen, wie kompliziert die Struktur organisierter Feuchtkonvektion

ist. Sowohl die Betrachtung isolierter Luftballen, die unter seitlicher Vermischung aufsteigen (z.B. (59)), als auch die Schicht-Methode von J. Bjerknes (13), die kompensierendes Absinken berücksichtigt, beinhalten jeweils nur einen Teil der oben angegebenen Effekte.

Der feuchtkonvektive Prozeß und seine numerische Simulation kann unter 2 Gesichtspunkten gesehen werden. Der erste betrifft die Umschichtung und folgt unmittelbar aus der einleitenden Definition. Ein Teil der statischen Energie (Summe aus potentieller und innerer Energie) der instabilen Vertikalschichtung wird in kinetische Energie der Konvektionsbewegungen umgewandelt und schließlich dissipiert. Dabei kommt es im Aufwindbereich zum Aufsteigen potentiell wärmerer Luft, die sich später über der absinkenden, potentiell kälteren Luft ausbreitet. Besonders durchsichtig wird dieser Vorgang bei reversibler Behandlung des Kondensats, indem hier individuelle Quasiinvarianten (potentiell-äquivalente Temperatur, Gesamtwassergehalt) als Tracer dienen können. Da hinsichtlich der Vertikaltransporte die Konvektion in der freien Atmosphäre weitgehend die Rolle der Mikroturbulenz in der Grenzschicht übernimmt, besteht dringender Bedarf an einer geeigneten Parametrisierung des konvektiven Maßstabs in großmaßstäbigen Modellen mit horizontalen Gitterpunktabständen der Größenordnung 10^2 km. Durch numerische Konvektionsexperimente lassen sich hier für quantitative Unterlagen gewinnen. Merkwürdigerweise ist dieser Aspekt bisher weitgehend unbeachtet geblieben. Die Aufmerksamkeit richtet sich vielmehr auf den zweiten Gesichtspunkt.

Da feuchtkonvektive Umschichtungen Phasenübergänge des Wassers voraussetzen, sind sie stets mit der Entwicklung von Cumulus- bzw. Cumulonimbus-Wolken verknüpft. Die Wolke ist also Instrument und äußeres Merkmal der Feuchtkonvektion. Die in einer solchen Wolke ablaufenden mikrophysikalischen Prozesse, welche die Partikelverteilung des flüssigen und festen Kondensats und dessen

Bewegung relativ zur gasförmigen Luft bestimmen, können auf den makrophysikalischen Prozeß, die Dynamik der Umschichtung, zurückwirken. Gerade bei konvektiven Wolken, deren Lebensdauer gewöhnlich unter einer Stunde liegt, hat die spezifische Ausbildung der wolkenphysikalischen Komponente sicher einen erheblichen Einfluß auf die spätere Wolkenentwicklung und vor allem den Niederschlagsvorgang (15, 58). Mithilfe fortgeschrittener Konvektionsmodelle läßt sich die Interdependenz systematisch untersuchen (64, 6) und somit das - methodisch bedingte - Nebeneinander der Erforschung von Mikrophysik und Dynamik in eine Art Iterationsvorgang überführen. Über die Grundlagenforschung hinaus kommen vereinfachte Modelle (103) bei praktischen Versuchen zur Wolkenmodifikation (104) und der klimatologischen Ermittlung des Modifikationspotentials (79) zum Einsatz.

Seit langem ist aus der Beobachtung bekannt, daß ein horizontaler Grundstrom mit vertikaler Scherung auf den feuchtkonvektiven Prozeß Einfluß nimmt. Die Entwicklung von Cumulus- und kleineren Cumulonimbus-Wolken wird gedämpft (53, 15); das Auftreten schwerer Unwetter ist jedoch häufig an starke Windscherungen gebunden (z.B. (23)), die zur Organisation der Dynamik wesentlich sind (14, 65, 66). Numerische Simulationen in einer Vertikalebene (transversale Wolkenwalzen) ergaben, daß höhenkonstante Scherung stabilisierend wirkt, indem kinetische Energie der Konvektion in solche des Grundstromes übergeht (8), während Richtungswechsel der Scherung in einem kritischen Höhenbereich zur Bildung einer langlebigen Wolke führen kann (94). Nun haben Untersuchungen der linearisierten Konvektionsgleichungen einer ebenen Couette-Strömung ergeben (36), daß sich bevorzugt longitudinale Konvektionswalzen ausbilden, die kinetische Energie aus dem Grundstrom empfangen und dessen Scherung reduzieren (9). Durch numerische Integration konnte Lipps (47) diese Aussagen auch für die nichtlinearen Gleichungen flacher Trockenkonvektion bestätigen. Da 2dimensionale Modelle für eine grundstromorientierte Vertikalebene grundsätzlich nur transversale Walzen zulassen (8, 76, 50, 78, 90, 92, 93, 94),

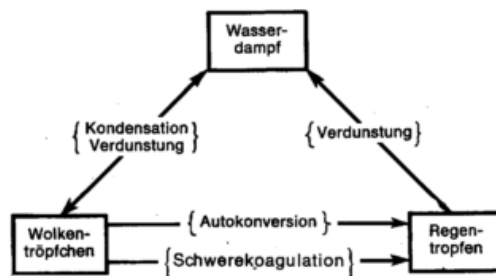
sind ihre Ergebnisse, den Einfluß der vertikalen Windscherung betreffend, mit Vorsicht aufzunehmen. Die 3dimensionale Formulierung (88) erlaubt letzten Endes auch die Behandlung des allgemeinen Falls, in dem die Schervektoren des Grundstromes unterschiedliche Richtung haben.

Die einem numerischen Modell zur Feuchtkonvektion zugrundeliegenden Gleichungen gliedern sich in einen hydro-thermodynamischen und einen mikrophysikalischen Komplex. Da das hydro-thermodynamische Prognosesystem in Abschnitt 2.1. ausführlich betrachtet wird, seien hier nur einige grundsätzliche Bemerkungen dazu gemacht. Neben meteorologisch relevanten Vorgängen beschreiben die unverkürzten Eulerschen Gleichungen - sie seien als ursprüngliche Gleichungen bezeichnet - auch Schallphänomene. Da diese hochfrequenten Prozesse in numerischen Modellen einen sehr kleinen Zeitschritt bedingen, ist ihre Elimination aus der Physik des Gleichungssystems (Filterung) wünschenswert. Für großmaßstäbige atmosphärische Prozesse kann hydrostatisches Gleichgewicht vorausgesetzt werden. Diese Bedingung unterdrückt die vertikale Ausbreitung von Schallwellen (z.B. (31)); verbleibende horizontale Schallwellen (Lamb-Wellen) sind wegen des großen horizontalen Auflösungsmaßstabs entsprechender Modelle ohne Belang. Für konvektive Prozesse hingegen haben gerade die Abweichungen vom hydrostatischen Gleichgewicht, im wesentlichen Auftriebskräfte, fundamentale Bedeutung. Die Gewinnung eines schallgefilterten (anelastischen) Gleichungssystems basiert auf der Verwendung von $\nabla \cdot \mathbf{g} \omega = 0$ anstelle der vollständigen Kontinuitätsgleichung (nicht-explicite Berücksichtigung der lokalen Dichteänderung). Die daraus resultierende diagnostische Beziehung für den Druck p ist allerdings schon im trockenen Fall unvertretbar kompliziert. Vereinfachungen ergeben sich, wenn man den Zustand der Atmosphäre als Abweichung von dem einer hydrostatisch geschichteten Referenzatmosphäre formuliert und Ergebnisse der Maßstabsanalyse (71, 25) beachtet. Die zentrale Aussage maßstabsanalytischer Betrachtungen besteht darin, daß bei hochreichender Konvektion der Stördruck p' nicht nur in den Bewe-

gungsgleichungen sondern auch im 1. Hauptsatz und in der thermischen Zustandsgleichung - und damit im Auftriebsterm der vertikalen Bewegungsgleichung - berücksichtigt werden muß. Die mögliche Entkopplung der thermodynamischen Gleichungen von der p' -Beziehung liefert für flache Konvektion im trockenen und feuchten Fall praktikable Prognosesysteme. Die Filterbedingung kann hierbei zu $\nabla \cdot \omega = 0$ (Inkompressibilität) verschärft werden. Ein konsistentes Prognosesystem für hochreichende Konvektion mit der Filterbedingung $\nabla \cdot \varrho_0 \omega = 0$ (ϱ_0 Dichte der Referenzatmosphäre) existiert z.Zt. nur für den trockenen Fall. Die Herleitung gelang Ogura und Phillips (71), indem sie die potentielle Temperatur Θ als prognostische Variable verwenden und eine Referenzatmosphäre konstanten Θ zugrundelegen. Feuchtkonvektive Vorgänge machen die Berechnung des Sättigungsdampfdrucks erforderlich, der eine Funktion der Temperatur ist. Infolgedessen stehen alle thermodynamischen Variablen in einer höchst impliziten Relation zueinander. Bis auf eine Ausnahme (106), über deren Problematik noch zu sprechen sein wird (Abschn. 2.1.2.), hat man in allen Prognosesystemen, die bisher auf hochreichende Feuchtkonvektion angewandt worden sind (8, 90, 92, 93, 94, 38, 39, 3, 4, 62, 63, 64, 78) diese Schwierigkeit durch Vernachlässigungen umgangen, die physikalisch nicht zu rechtfertigen sind. Als Lösung bietet sich an, die Filterbedingung fallenzulassen und von den ursprünglichen Gleichungen auszugehen. Es sei angemerkt, daß das Problem in 1dimensionalen Modellen, die wegen ihres geringen Rechenaufwandes als Notbehelf für Fragen hochreichender Feuchtkonvektion eingesetzt werden, nicht aufscheint, weil hier der Stördruck der Berechnung grundsätzlich nicht zugänglich ist.

Auch ohne nähere Erläuterungen ist einzusehen, daß die Mannigfaltigkeit der mikrophysikalischen Prozesse in numerischen Konvektionsmodellen nur stark vereinfacht abgebildet werden kann. Vereinte Anstrengungen in der theoretischen, experimentellen und empirischen Wolkenforschung müssen unternommen werden, um geeignete Gesetzmäßigkeiten und Parameter zu finden, die eine Simulation der wesentlichen Vorgänge gestatten. Das Konvektionsmodell bietet sich dabei

als Kontaktstelle an. Vom theoretischen Standpunkt kann man die feuchtkonvektive Umschichtung auch ohne spezifizierte Mikrophysik simulieren, denn das Freisetzen von Kondensations- bzw. Sublimations- oder Gefrierwärme im aufsteigenden Luftstrom ist deren charakteristisches Merkmal. In diesbezüglichen Modellen führt man entweder das Kondensat reversibel mit (69, 3, 4, 76, 62, 88) oder läßt es im Augenblick seiner Entstehung mit unendlicher Geschwindigkeit ausfallen (7, 8). Nach Bemühungen von Das (21), Lebedev (37, 38) und Takeda (90, 91, 92), wenigstens eine vertikale Relativbewegung des tropfbaren Wassers parametrisch zu berücksichtigen, brachte die Konzeption von Kessler (Zusammenstellung diesbezüglicher Arbeiten in (33)) einen entscheidenden Durchbruch in der Behandlung der Mikrophysik. Entsprechend dem abgebildeten Schema



wird das flüssige Kondensat in Wolkentröpfchen und Regentropfen unterteilt. Die Menge der Wolkentröpfchen ist spektral nicht gegliedert; sie steht mit dem Wasserdampf stets im thermodynamischen Gleichgewicht. Für die Größenverteilung der Regentropfen wird der Marshall-Mac Palmer-Typ (inverses Exponentialgesetz) vorausgesetzt, der durch Messungen am Boden (57) und in der freien Atmosphäre (16) - sogar für größere Eisteilchen (Graupel; (32)) - gerechtfertigt wird. Regentropfen fallen relativ zur feuchten Luft mit Gleichgewichtsgeschwindigkeit; ihre Verdunstung im ungesättigten Gebiet wird thermodynamisch berechnet. Über einen freien Parameter in der Größenverteilung lassen sich alle Prozesse durch die Gesamttropfenmasse ausdrücken, so daß im Vergleich zur reversiblen Kondensatbehandlung nur eine weitere prognostische Variable hinzutritt. Der Übergang tropfbaren Wassers aus der Wolkentröpfchen- in die Regentropfenform wird durch 2 Prozesse geregelt. 1. Autokonversion: durch

stochastische Vorgänge kommt es zur primären Entstehung großtropfiger Elemente (Überschreitung des für Kondensationsvorgänge kritischen Radiussschwellwertes $30-40\mu\text{m}$). In der parametrisierten Form von Kessler setzt dieser Übergang oberhalb eines kritischen Wolkenwassergehaltes ein, wobei die Übergangsrate dem Überschuß proportional ist. In einer Untersuchung der Empfindlichkeit, mit der sein Wolkenmodell auf Änderungen mikrophysikalischer Parameter reagiert, fand Weinstein (102), daß der Wolkenwasserschwellwert eine Schlüsselgröße darstellt. In einer von Berry (12) auf Grund numerischer Experimente vorgeschlagenen und von Simpson und Wiggert (84), Murray und Koenig (64), Wisner u.a. (107), Wilhelmson und Ogura (106) angewendeten verbesserten Parametrisierung spielt diese Größe keine Rolle; es gehen vielmehr die anfängliche Zahl und relative Streuung der Größenverteilung der Wolkenentröpfchen als - meßbare - Parameter ein. 2. Schwerekoagulation: die relativ zur Luft fallenden Regentropfen sammeln die auf ihrer Bahn liegenden, gleichmäßig verteilt gedachten, Wolkenentröpfchen ein.

Diese komplette Parametrisierung der Mikrophysik einer Allwasserwolke ist in vielen Modellen benutzt worden (87, 103, 5, 84, 50, 64, 106). Einflüsse, die vom Niederschlagsvorgang durch Umverteilung der Abtriebskräfte des Kondensats oder durch Verdunstungsabkühlung unterhalb der Wolke auf die Dynamik (Entwicklung bzw. Verstärkung einer Abdrift) ausgehen, lassen sich hiermit untersuchen. Darüber hinausgehend sind in jüngerer Zeit verschiedene Versuche unternommen worden, die eingebaute Mikrophysik zu verfeinern. Eine Möglichkeit besteht darin, die Massenbilanzen für diskrete Radiusintervalle der Kondensatpartikel zu berechnen (93, 94, 6, 20). Weitere Gesichtspunkte ergeben sich aus der Einführung der Eisphase (102, 72, 20, 107), wofür die theoretischen Grundlagen allerdings noch mangelhaft entwickelt sind, oder einer thermodynamischen Behandlung der Kondensation (Auftreten von Übersättigungen; (6)).

Zusätzlich zur Prozeßphysik müssen bei einem mathematisch-numerischen Modell noch folgende Angaben - der Problemstellung angepaßt - spezi-

fiziert werden: Integrationsraum (Geometrie und Ausdehnung), Auflösung (Diskretisierung des Kontinuums durch Gitterpunkte bzw. Spektralkomponenten) und Differenzenschema, Parametrisierung subskaliger (nicht aufgelöster) Prozesse, Randbedingungen, Anfangsbedingungen.

Während die vertikale Ausdehnung des Integrationsraumes durch die Mächtigkeit der labilen Schicht physikalisch vorgezeichnet ist, bleibt seine horizontale Dimensionierung eine Ermessensfrage. Wünschenswert wäre es, sie quasiunendlich groß zu machen, damit die Konvektionselemente sich ihren horizontalen Maßstab selbst auswählen können. Das scheitert jedoch heute noch am erforderlichen Rechenaufwand. Nur für flache Trockenkonvektion zwischen horizontalen Platten, die auf konstanter Temperatur gehalten werden (Bénard-Rayleigh-Konvektion), sind entsprechende 2dimensionale Experimente durchgeführt worden (z.B. (73, 70, 47)). Dabei zeigte sich u.a. (70), daß der horizontale Maßstab der sich einstellenden stationären Lösung durch Rayleigh- und Prandtl-Zahl nicht eindeutig festgelegt ist, sondern auch von den Anfangsbedingungen beeinflusst wird. Die Frage der natürlichen Zellgröße wird noch komplizierter, wenn Konvektion und bedingende Instabilität als ein instationäres Phänomen betrachtet wird, wie es im Fall der Feuchtkonvektion allgemein geschieht. Bei der praktisch notwendigen Beschränkung auf die Simulation einer Einzelzelle kommt es darauf an, einen angemessenen Lebensraum bereitzustellen, wofür man aus der Störungstheorie (35), aus der Beobachtung oder aus dem Vergleich numerischer Experimente unterschiedlicher Horizontalausdehnung (s. Abschn. 3.2.5.) Hinweise gewinnen kann. Die im allgemeinen 3dimensionale Struktur von Konvektionszellen sollte auch in 3dimensionalen Modellen simuliert werden. Diese Forderung erhält besonderes Gewicht, wenn ein Grundstrom mit vertikaler Scherung berücksichtigt wird (s.o.), und durch den 3dimensionalen Charakter mikroturbulenter Bewegungen, den auch die skaligen Prozesse im Bereich der Auflösungsgrenze zeigen sollten (s. Abschn. 2.4.). Solche Modelle gibt es heute erst in Ansätzen, und zwar von Lebedev (38, 39) und Steiner (88) für

Feuchtkonvektion, von Fox (30) für einen aufsteigenden trockenen Warmluftkörper. Die Berechnungen für die als quadratisch vorausgesetzte Zelle werden durch Symmetrieannahmen auf einen Quadranten bzw. - bei Windscherung - auf die Hälfte der Grundfläche begrenzt. Die Berücksichtigung von nur 2 Raumkoordinaten führt auf 2 Systeme unterschiedlicher Geometrie. Die Annahme von Rotationssymmetrie um eine zentrale Vertikalachse gestattet eine Darstellung mithilfe der Zylinderkoordinaten r und z . Diese Formulierung wird dem Phänomen einer isolierten Konvektionszelle in ruhender Umgebung wohl am ehesten gerecht, da die 3dimensionale Geometrie gewahrt ist. Modelle dieses Typs wurden von Ogura (68, 69), Amirov (3, 4), Murray (62, 63, 64) sowie Daley und Merilees (19) entwickelt. Demgegenüber beschränkt man sich bei Verwendung von 2 kartesischen Koordinaten (x, z -System) von vornherein auf Phänomene mit 2dimensionaler Struktur. Sie dürften in der Natur am ehesten in langgestreckten Böenlinien verkörpert sein, wenn auch Beobachtungen zu entnehmen ist (z.B. (11, 66)), daß die Wolkenwalze gewöhnlich in individuelle Zellen verfällt. Im Gegensatz zu axialsymmetrischen Modellen läßt sich der Einfluß eines gescherten Grundstroms berücksichtigen (8, 90, 92, 93, 94, 76, 50, 78). Allerdings gestattet die ebene Geometrie nur Bewegungen in der Form transversaler bzw. longitudinaler (47) Walzen. Trotz aller Einschränkungen muß betont werden, daß das ebene Modell ein mathematisch bequemes (Nichtauftreten der Singularität in der zentralen Achse; siehe (62)) und numerisch sparsames Hilfsmittel darstellt, die charakteristischen Merkmale trockener (54, 42, 43, 67) und feuchter (69, 5, 6, 62, 106) Konvektionszellen zu simulieren. Im Vergleich mit dem axisymmetrischen Modell, den Ogura (69) und Murray (62) mittels numerischer Experimente durchgeführt haben, darf von vornherein keine gleichzeitige Übereinstimmung linearer und flächenhafter Abmessungen erwartet werden. Für beide Geometrien macht die lineare Theorie (35) Aussagen über die Größenstruktur der Zellen maximaler Entwicklung bei vorgegebener Schichtung. Es ergibt sich bei annähernd gleicher linearer Zellausdehnung und gleichem Flächenanteil der Aufstiegsbewegung nur eine etwa halb so große lineare Abmessung des Aufstiegsgebietes im ebenen Fall.

Allen bisher angeführten Konvektionsmodellen liegt eine echte Kontinuumsphysik zugrunde, was sich auch in ähnlichen numerischen Verfahren äußert. Das trifft nicht zu für die sog. 1dimensionalen Modelle, die hier nur am Rande erwähnt seien. Die Reduktion der Raumabhängigkeit auf die Vertikalkoordinate wird durch horizontale Mittelung über den inneren Bereich der Konvektionszelle - für alle in Frage kommenden Felder gleich - erreicht. Der erforderliche Austausch mit der Umgebung muß i.a. durch einen sog. Entrainmentprozeß (89) simuliert werden, dessen Parametrisierung eines der Kernprobleme darstellt. Zeitabhängige Modelle zielen auf eine Erfassung des Lebenszyklus einer Konvektionszelle. Die physikalisch überzeugendste Version stammt von Asai und Kasahara (10). Hier werden auch zeitliche Änderungen der Variablen des Umgebungsraumes (dessen Horizontalausdehnung in einem höhenunabhängig vorgegebenen Flächenverhältnis zum inneren Bereich steht) durch horizontale Flüsse und kompensierendes Absinken berücksichtigt. Üblicherweise (37, 21, 91, 87, 102, 72, 107) geschieht das nicht. In einer von Danielsen u.a. (20) angewandten Lagrangeschen Integrationstechnik werden nacheinander aufsteigende individuelle Luftballen verfolgt, womit auch der vertikale Strömungszusammenhang aufgegeben ist. Stationären Wolkenmodellen (103, 84) liegt die Vorstellung zugrunde, daß beim vertikalen Aufbau einer Konvektionszelle quasistationäre Verhältnisse eingeleitet werden. Bei der Ermittlung der entsprechenden Vertikalprofile bis zur Gipfelhöhe bleibt die Zeitabhängigkeit des Vorgangs außer Betracht. Mit 1dimensionalen Modellen lassen sich die wichtigsten Merkmale hochreichender Feuchtkonvektion zumindest qualitativ reproduzieren. Wegen ihres geringen Rechenaufwandes finden sie in angewandten Fragestellungen (Test des Einflusses mikrophysikalischer Parameter, Wolkenmodifikation, Parametrisierung der Konvektion) noch vielfach Verwendung. Die Kritik von Warner (101) am stationären Modell von Weinstein und Davis (103) trifft möglicherweise auf alle 1dimensionalen Modelle zu. Sie besagt, daß solche Modelle aufgrund ihrer nicht-intakten Physik grundsätzlich nur für einzelne Größen (z.B. Wolkentiefe oder Flüssigwassergehalt) in ähnlichen Wettersituationen quantitativ erfolg-

reiche Prognosen gestatten, was durch Justierung freier Parameter gelingt. Eine umfassende Beurteilung dieser wichtigen Frage sollte sich allerdings eher auf Parallelexperimente 1- und mehrdimensionaler Modelle als auf unvollständige Beobachtungsdaten stützen. Vergleiche dieser Art zwischen dem in dieser Arbeit dargestellten 2dimensionalen Modell und einem von Edelman (Deutscher Wetterdienst) entwickelten 1dimensionalen Modell vom Typ Asai und Kasahara sind bereits aufgenommen worden.

Für die numerische Diskretisierung wird bei Modellen zur Feuchtkonvektion ausnahmslos der physikalische Raum zugrundegelegt. Orszag (75) hat am Beispiel der Advektion in einem inkompressiblen Medium nachgewiesen, daß spektrale Modelle zur Erzielung der gleichen Simulationsgenauigkeit höchstens halb so viele Freiheitsgrade pro Raumdimension benötigen. Spektrale Methoden lassen sich vermutlich gewinnbringend auf trockenkonvektive Prozesse anwenden. Ansätze hierzu liegen von Ogura und Yagihashi (73, 74) sowie Daley und Merilees (19) vor. Im feuchtkonvektiven Fall erfordern thermodynamische und mikrophysikalische Berechnungen ständige Transformationen zwischen physikalischem und Wellenraum, die der oben erwähnten Verminderung des Rechenaufwandes entgegenwirken. Das Gitternetz zur Auflösung des physikalischen Raumes muß so bemessen sein, daß der Maßstab der simulierten Phänomene von der Auflösungsgrenze hinreichend weit entfernt ist. Eine Maschenweite von 100 oder 200 m, die üblicherweise in horizontaler und vertikaler Richtung verwendet wird, dürfte dem Phänomen einer feuchten Konvektionszelle als Ganzes angemessen sein. Feinere Konvektionsstrukturen - nach Untersuchungen von Ackermann (1) reichen sie bis etwa 350 m hinab - und der Zerfall der konvektiven Zirkulation in kleinere Wirbel bleiben außerhalb einer realistischen Simulation. Gitterpunktabständen von 500 m und mehr (7, 8, 38, 39, 90, 92, 93, 94, 106) muß allerdings mit Vorbehalt begegnet werden. Zur Wahrung linearer numerischer Stabilität erfordern schallgefilterte Modelle Zeitschritte von einigen Sekunden.

Die Wahl einer numerisch allgemein stabilen Differenzenapproximation der Prognosegleichungen und die Parametrisierung stochastischer subskaliger Prozesse (Turbulenz) sind voneinander nicht unabhängig. Die meisten verwendeten Differenzenschemata bewirken eine auf Abschneidefehler zurückgehende implizite - nicht beeinflussbare - Dämpfung vor allem der kurzwelligen Feldanteile. Speziell für ein Schema, das zeitliche Vorwärtsdifferenzen mit räumlichen Stromaufwärtsdifferenzen in den Advektionstermen verbindet (69, 90, 92, 93, 94, 76, 50, 106), ist dieser Effekt u.a. von Crowley (18) nachgewiesen worden. Wie Molenkamp (61) zeigte, ist er einem Diffusionsterm äquivalent, wobei der Pseudo-Diffusionskoeffizient vom Betrag der Advektionsgeschwindigkeit abhängt. Infolgedessen besteht die stärkste Glättungstendenz in Strömungsrichtung, was von Orville und Sloan (77) an vergleichenden numerischen Experimenten gezeigt wurde. Bei numerisch ungedämpften Systemen, wie z.B. einem räumlich und zeitlich zentrierten Bocksprungschema, hingegen gewinnen die Turbulenzterme physikalische und numerische Relevanz. In physikalischer Hinsicht gilt es, der empirisch festgestellten ausgeprägten Raum-Zeit-Abhängigkeit der Turbulenz im Konvektionsraum (86, 2, 98) Rechnung zu tragen. Andererseits sind zur Vermeidung nichtlinearer numerischer Instabilität Ausgleichs- und Dissipationsvorgänge in einer gewissen Mindestintensität zu berücksichtigen. Systematische Experimente haben ergeben (Abschn. 2.4.), daß der innere Zusammenhang, der offenbar zwischen beiden Forderungen besteht, auch eine kompatible Lösung ermöglicht. Üblicherweise wird über Gradientansätze das Turbulenzproblem auf die Bestimmung der turbulenten Diffusionskoeffizienten abgewälzt. Von der Annahme ihrer raum-zeitlichen Konstanz ist man bisher nur in Ausnahmefällen zu einer feldmäßigen Darstellung übergegangen: Steiner (88) setzte analog Smagorinsky (85) den turbulenten Reibungskoeffizienten K_M dem Betrag der Deformationsdyade, aufgefaßt als Abweichung von der mittleren Strömung (22), proportional; Amirov (4) beschränkte sich auf deren wichtigste Komponente, $\partial w / \partial r$. Ein Einfluß der thermischen

Schichtung auf die Intensität der Turbulenz bzw. die Größe der entsprechenden Diffusionskoeffizienten ist dagegen in feucht-konvektiven Modellen noch nicht ins Auge gefaßt worden. Während in der Regel dem Diffusionskoeffizienten für skalare Austauschgrößen, K_H , der gleiche Wert wie K_M zugeteilt wird, setzen ihn neuerdings verschiedene Autoren in Anlehnung an die Behandlung in Grenzschichtmodellen (22) als ein konstantes Vielfaches (Faktor 3-4: (19, 88, 106)) von K_M an.

Da die Integration über ein vorgegebenes Teilvolumen der Atmosphäre erstreckt wird, sind die Randbedingungen für raumfeste Flächen zu formulieren. Die fast allgemein vorausgesetzte materielle Undurchdringlichkeit des oberen und unteren Randes (horizontale Flächen bzw. Berücksichtigung der Topographie unten (76, 50, 78)), die für den Erdboden angemessen ist, verbietet es andererseits den konvektiven Bewegungen wie auch der Zelle als Ganzes, mit der darüberliegenden Atmosphärenmasse in Energieaustausch zu treten (s. Abschn. 3.1.). Die seitlichen Ränder lassen sich nur bei fehlendem Grundstrom als materiell abgeschlossen behandeln; die andernfalls offenen Ränder werden entweder zyklisch aneinander angeschlossen (8, 90, 92, 88), oder es werden alle Normalgradienten hier Null gesetzt (76, 50, 78) bzw. durch ein System von Vorschriften für die abhängigen Variablen dafür gesorgt, daß die konvektive Zirkulation auf den Integrationsraum beschränkt bleibt (94). Unter den weiteren Randeigenschaften ist Undurchlässigkeit auch für diffusive Flüsse (glatt, isolierend) physikalisch ausgezeichnet, da hierbei der konvektive Prozeß innerhalb eines abgeschlossenen Systems abläuft (62, 63, 64, 88), das sich über Gebietsinvarianten numerisch kontrollieren läßt. Bei der Entwicklung eines Modells sollte man diesen Fall gründlich studieren, ehe man zu meteorologisch realistischeren Randbedingungen, wie z.B. rauhe (3, 4) und temperaturgesteuerte (3, 4, 38, 39, 76, 50, 78) Unterlage, übergeht.

Numerischen Experimenten zur Feuchtkonvektion liegen normalerweise theoretische Anfangsschichtungen zugrunde, die bequem variierbar

sind; ebensogut lassen sich aber typische gemessene Vertikalverteilungen (62, 63, 64, 88) verwenden. Die Wahl der Anfangsstörung zur Auslösung der Konvektion stellt ein gewisses Problem dar. Einerseits soll diese Störung so klein sein, daß sie Maßstab und Verlauf des angestoßenen Prozesses nicht beeinflußt. Andererseits muß sie groß genug sein, den Abbau bedingter Instabilitäten einzuleiten sowie die Anlaufzeit und die sich währenddessen einstellenden numerischen Fehler klein zu halten. (Auch in der feuchtlabil geschichteten, nichtgesättigten realen Atmosphäre sind vermutlich kräftige Anstöße wirksam, deren Formulierung durch derzeitige Modelle nicht simuliert werden kann.) Zu diesem Zweck wird i.allg. ein endliches Luftvolumen durch Dichtedefizit und/oder Vertikalimpuls ausgezeichnet. Für maritime Verhältnisse scheint nach Murray (63) die Dichteverminderung eher durch Feuchte- als durch Temperaturerhöhung repräsentiert zu sein. Der relative Anteil der Anfangsstörung am gesamten Übergang statischer in kinetische Energie (s. Abschn. 3.2.4.) darf jedoch nicht so groß sein, daß davon - wie etwa Vergleichsläufe von Murray (63) oder Steiner (88) zeigen - erhebliche oder gar dominierende Einflüsse ausgehen.

1.3. Einordnung und Aufgabe

Es sei nunmehr der Standort des numerischen Modells einer hochreichenden feuchten Konvektionszelle, das den wesentlichen Inhalt dieser Arbeit bildet, in der aufgezeichneten Modelllandschaft bestimmt.

Dem Modell liegen die unverkürzten Eulerschen Gleichungen der Hydro-Thermodynamik zugrunde. Entsprechende Gleichungen für trockene Prozesse sind bereits 1962 einmal von Lilly (42) auf flache Konvektion angewendet worden. Probleme der numerischen Stabilität, die sich bei bedingt labiler Schichtung ergeben (s. Abschn. 2.2. und 2.3.), und die Notwendigkeit der Schallfilterung des Anfangsfeldes im hochreichenden Fall (s. Abschn. 2.6.) konnten dabei nicht offenbar werden.

Mikrophysikalische Prozesse bleiben unberücksichtigt; das sich bildende flüssige Kondensat steht ständig im Sättigungsgleichgewicht mit der gasförmigen Phase und besitzt ihr gegenüber keine Relativgeschwindigkeit.

Für die Konvektionszelle wird ebene Geometrie (x, z -System) vorausgesetzt. Durch die Annahme bilateraler Symmetrie bezüglich der zentralen Vertikalachse können alle Berechnungen auf die Hälfte des Integrationsraumes beschränkt werden.

Der Integrationsraum bildet ein abgeschlossenes System: alle Ränder sind undurchlässig für materielle und diffusive Flüsse.

Das Kontinuum wird durch 2 Gitterpunktfamilien diskretisiert, die gegeneinander räumlich (diagonal) und zeitlich versetzt sind; auf ihnen wird ein räumlich und zeitlich zentriertes Differenzenschema definiert.

Die Parametrisierung turbulenter Flüsse von Wärme und Wasser stützt sich auf individuelle Invarianten. Die für alle Eigenschaften gleichgesetzten turbulenten Diffusionskoeffizienten werden als Funktion von Ort und Zeit bzw. - in vorbereitenden Experimenten - als Funktion der Zeit allein bestimmt.

Den Experimenten liegt eine theoretische Anfangsschichtung zugrunde. Die auslösende Störung in Form eines Warmluftkörpers ist in eine ungesättigte, neutral geschichtete Grundschicht eingebettet. Auf diese Weise werden konvektive Prozesse in der feuchtlabilen Ober-schicht nur indirekt angestoßen.

Durch das Modell und seine Anwendung können einige wesentliche wissenschaftlichen Lücken geschlossen werden.

1. Durch Verwendung der ursprünglichen Gleichungen wird die numerische Simulation hochreichender Feuchtkonvektion erstmalig auf eine physikalisch einwandfreie Basis gestellt. Die ursprünglichen Gleichungen sind sozusagen die primitiven Gleichungen des konvektiven Maßstabs. Sie entsprechen denjenigen

des Großmaßstabs darin, daß eine natürliche - nicht vorge-schriebene - Adaptation der Felder durch relativ hochfre-
quente Prozesse (Schallwellen hier, Trägheits-Schwere-Wellen
dort) bewerkstelligt wird und daß der numerische Gewinn kon-
sequenter Vorwärtsextrapolation durch einen relativ kleinen
Zeitschritt erkaufte werden muß. Da jedoch der Lösungsaufwand
einer Randwertaufgabe, wie sie sich aus der Auferlegung einer
Schallfilterbedingung ergibt, höher als linear mit der Zunahme
der Gitterpunktzahl anwächst, dürfte letzterer Nachteil bei
zukünftigen Modellverbesserungen (Ausweitung des Integrations-
raumes, Übergang auf 3 Dimensionen, Verkleinerung der Maschen-
weite) allmählich zurücktreten.

2. Über die Bilanzgleichung der Turbulenzenergie lassen sich die
turbulenten Prozesse energetisch konsistent formulieren; mit
der erwähnten Parametrisierungsform des Wärmeflusses wird hier-
bei die Feuchtlabilität als Turbulenzenergiequelle erschlossen.
Mittels Dimensionsbetrachtungen und einiger Annahmen kann aus
dieser Gleichung der turbulente Diffusionskoeffizient feldmäs-
sig bestimmt werden. Die Resultate werden durch verfügbare Meß-
ergebnisse gestützt und gewährleisten numerische Stabilität.
3. Reversible Behandlung des Kondensats und Abgeschlossenheit des
Integrationsraumes lassen das Modell prädestiniert erscheinen,
den Aspekt der konvektiven Umschichtung herauszuarbeiten. Das
geschieht vor dem Hintergrund einer statischen Umschichtung,
bei der die Schichten einer Luftsäule individuell in eine
physikalisch sinnvolle neue vertikale Anordnung gebracht wer-
den.

Nach einer Analyse der physikalischen und numerischen Grundlagen
des Modells werden die Ergebnisse eines Standardexperiments dazu
benutzt, die Raum-Zeit-Struktur eines feuchtkonvektiven Umschich-
tungsprozesses zu erläutern. 2 Parallelexperimente gleicher An-
fangsschichtung dienen dazu, den Einfluß von Unterschieden in der
Parametrisierung des turbulenten Diffusionskoeffizienten und in

der horizontalen Abmessung des Integrationsraumes zu verdeutlichen. Ergebnisse vorangehender Experimente zur Trockenkonvektion (in neutraler Umgebung aufsteigender Warmluftkörper, Umschichtung einer trockenlabilen Atmosphäre) sollen nur bei speziellen Gesichtspunkten herangezogen werden. Abschließend wird das Modell bezüglich seiner Ausbaufähigkeit und Anwendungsmöglichkeiten beurteilt.

1. Konvektion im numerischen Experiment

1.1. Definition

Unter Konvektion versteht man einen Vorgang in Flüssigkeiten oder Gasen, der den Abbau hydrostatischer Instabilität durch Massenumlagerungen zum Ziel hat. Die erforderlichen Bewegungen werden durch Auftriebskräfte verursacht.

In der Atmosphäre treten 2 Arten von statischer Instabilität auf: absolute oder Trocken-Instabilität und bedingte oder Feucht-Instabilität. Entsprechend unterscheidet man zwischen Trocken- und Feuchtkonvektion. Das Auftreten von Feuchtkonvektion ist an Phasenübergänge des Wassers gebunden. Wie jedes Instabilitätsphänomen stellt die Konvektion einen geordneten Prozeß dar, der sich in identifizierbaren Einzelelementen (Konvektionszellen) manifestiert. Der Maßstab (charakteristische Abmessung) von Konvektionszellen wird im wesentlichen durch die Mächtigkeit der labilen Schicht bestimmt. Die Maßstabsanalyse der Gleichungen, die konvektive Prozesse beschreiben, führt auf eine Unterscheidung zwischen flacher Konvektion (Höhe bis etwa 3 km) und hochreichender Konvektion (die gesamte Troposphäre umfassend). Da in der Atmosphäre Trockenlabilität nur in relativ flachen Schichten angetroffen wird, ist hier Trockenkonvektion immer flache Konvektion, während es sich bei hochreichender Konvektion immer um Feuchtkonvektion handelt. Konvektionszellen können einzeln (z.B. Gewittertürme) oder in Verbänden (Zellularkonvektion), die zuweilen durch Prozesse größeren Maßstabs (Beispiel: tropische Zyklone) gesteuert werden, auftreten.

Wegen der Nichtlinearität der Konvektionsgleichungen lassen sich derartige Vorgänge nur durch die Methode der numerischen Modellierung hinreichend vollständig beschreiben und verstehen. Laborexperimente mit Flüssigkeiten stellen vor allem für Probleme der Trockenkonvektion eine wichtige unabhängige Informationsquelle dar, welche die Güte numerischer Experimente zu beurteilen gestattet. In einem numerischen Modell wird ein begrenztes Raum-Zeit-

Sie erhielt ihre endgültige Gestalt über die linearisierte Gleichung [14]

$$\Theta'' = \frac{\hat{\Theta}}{\hat{T}} T'' - \frac{R}{\hat{c}_p} \frac{\hat{\Theta}}{\hat{p}} p' \quad , \text{ aus deren Anwendung}$$

$$\frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}} \hat{f}_p = \frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}} \overline{\omega'' \zeta c_p \Theta''} = \overline{\omega'' \zeta c_p T''} - \frac{R \hat{T}}{\hat{p}} \overline{\omega'' \zeta p'} = \hat{f} - \frac{1}{\hat{\zeta}} \overline{\omega'' \zeta p'}$$

hervorgeht.

Ein Vergleich der Gleichungen [15] - [19] mit [6] - [9] lehrt, daß die prognostischen Gleichungen [10] - [12] im Gegensatz zu [1] - [3] energetisch nicht abgeschlossen sind. Es muß vielmehr die Bilanz der Turbulenzenergie als zusätzlicher, den gemittelten Zustandsgrößen $(\hat{\omega}, \hat{\zeta}, \hat{T}, \hat{p})$ nicht zu entnehmender Energieform berücksichtigt werden, die über die Transformationsterme $\overline{\tau_r \cdot \nabla \hat{\omega}}$, $-\hat{f}_p \cdot \nabla \frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}}$ und den Dissipationsterm $\overline{\tau_m \cdot \nabla \omega''}$ mit der kinetischen Energie der mittleren Bewegung und der fühlbaren Wärme in Kontakt steht. Unter der Voraussetzung, daß eine Parametrisierung der turbulenten Fluktuationsterme gelingt, könnte Gleichung [19] dem Prognosesystem angegliedert werden. So weit wollen wir noch nicht gehen, werden aber zur Herstellung energetischer Konsistenz die entsprechende Gleichung im feuchten Fall in zeitunabhängiger Form bei der Parametrisierung turbulenter Prozesse verwenden (Abschn. 2.4.).

Bei Nichtberücksichtigung der molekularen Reibung enthalten die prognostischen Gleichungen [10] - [12] neben skaligen Größen mit τ_r und \hat{f}_p Ausdrücke subskaliger Herkunft. Ihrer Parametrisierung wird die Voraussetzung zugrundegelegt, daß die Turbulenz isotrop ist. Das erscheint nach Messungen von Steiner und Rhyne für den freien Konvektionsraum gerechtfertigt (86).

Den symmetrischen Tensor τ_r zerlegen wir zunächst in einen spurfreien (Deviator) und einen spurbehafteten Anteil:

$$-\tau_r = \overline{\omega'' \zeta \omega''} = \left(\overline{\omega'' \zeta \omega''} - \frac{\zeta \overline{\omega''^2}}{\epsilon_1} \mathcal{E} \right) + \frac{\zeta \overline{\omega''^2}}{\epsilon_1} \mathcal{E}$$

\mathcal{E} , \mathcal{E}_r bedeuten den Einheitstensor bzw. seine Spur. Die Anteile repräsentieren physikalisch die turbulente Scherungs- und Volumensviskosität. Die Volumensviskosität hat letztlich skalaren Charakter und könnte als Turbulenzdruck dem thermodynamischen Druck \bar{p} in [11] zugeschlagen werden. Sofern in gefilterten Gleichungen für flache Konvektion der Stördruck (Abweichung vom Druck einer Standardatmosphäre) über die Bewegungsgleichungen diagnostisch bestimmt wird, bei thermodynamischen Berechnungen aber außer acht gelassen wird, ist das Verfahren anwendbar (88). Andernfalls müßte der Turbulenzdruck gesondert parametrisiert werden; wir wollen ihn hier gegenüber \bar{p} vernachlässigen. Analog zum Vorgehen im molekularen Fall soll die Scherungviskosität zum entsprechenden Tensoranteil der lokalen Dyade in Beziehung gesetzt werden:

$$\overline{\omega'' \mathcal{E} \omega''} - \frac{\overline{\mathcal{E} \omega''^2}}{\mathcal{E}_r} \mathcal{E} = -\bar{\zeta} K_M (\nabla \hat{\omega} + \hat{\omega} \nabla - \frac{2}{\mathcal{E}_r} \nabla \cdot \hat{\omega} \mathcal{E}) \quad , \text{ d. h.}$$

$$[20a] \quad \tau_T = \bar{\zeta} K_M (\nabla \hat{\omega} + \hat{\omega} \nabla - \frac{2}{\mathcal{E}_r} \nabla \cdot \hat{\omega} \mathcal{E}) = \bar{\zeta} K_M \mathcal{D} \quad .$$

K_M stellt einen turbulenten Reibungskoeffizienten (Dimension $\frac{cm^2}{s}$) dar. Im 2dimensionalen Fall ($\mathcal{E}_r=2$) kann für den komplizierten Ansatz [20a] eine Näherungsform bereitgestellt werden. Da in den prognostischen Gleichungen nur $\nabla \cdot \tau_T$ auftritt, ergibt sich bei Vernachlässigung der Ortsabhängigkeit von $\bar{\zeta}$ und K_M in diesem Zusammenhang

$$\nabla \cdot \tau_T = \bar{\zeta} K_M (\nabla^2 \hat{\omega} + \nabla \nabla \cdot \hat{\omega} - \nabla \nabla \cdot \hat{\omega}) \quad .$$

Indem sich also das dritte, isotrope, Glied der τ_T -Parametrisierung [20a] in der Divergenz gegen das zweite Glied annähernd aufhebt, ist es nicht sinnvoll, ersteres von vornherein zu vernachlässigen (wie z.B. in (106)). Hierzu besteht nach den Ergebnissen der Maßstabsanalyse (s.u.) auch keine Berechtigung.

Im 2dimensionalen Modell wollen wir vielmehr den Ansatz

$$[20b] \quad \tau = \bar{\rho} K_M \nabla \hat{\omega}$$

verwenden. Die Transformationsrate der kinetischen Energie der mittleren Bewegungen in Turbulenzenergie ist in jedem Falle positiv definit, und zwar ergibt sich mit [20a]

$$[21a] \quad \tau \cdot \nabla \hat{\omega} = \frac{1}{2} \bar{\rho} K_M |\mathcal{D}|^2, \quad |\mathcal{D}|^2 = \mathcal{D} \cdot \tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cdot \mathcal{D},$$

mit [20b]

$$[21b] \quad \tau \cdot \hat{\omega} \nabla = \bar{\rho} K_M |\nabla \hat{\omega}|^2, \quad |\nabla \hat{\omega}|^2 = \nabla \hat{\omega} \cdot \hat{\omega} \nabla.$$

Bei [21b] war die aus der Herleitung von [16] folgende Stellung der dyadischen Faktoren ∇ und $\hat{\omega}$ zu berücksichtigen, da nach [20b] τ nicht länger ein symmetrischer Tensor ist.

Auf skalare spezifische Eigenschaften wird die Mischungswegbetrachtung angewendet. Luftquanten, die sich mit ihrer - gemittelten - Umgebung im Gleichgewicht befinden, werden mit einer charakteristischen turbulenten Geschwindigkeit eine charakteristische Wegstrecke verfrachtet, um sich dann mit der neuen Umgebung zu vermischen. Der an sich kontinuierliche Vermischungsvorgang, für den letztlich die explizit vernachlässigten molekularen Ausgleichsvorgänge verantwortlich sind, wird damit durch einen diskontinuierlichen Prozeß beschreiben. Während der Austauschwegstrecke soll das Luftquantum seine Identität bewahren (vgl. die mittlere freie Weglänge eines Moleküls), weshalb als Austauschigenschaften nur individuelle Invarianten in Frage kommen. Das ist der Grund, weshalb die Form [3b] gegenüber [3a] bei der Mittelbildung bevorzugt wurde.

Entsprechend diesen Vorstellungen lautet der Ansatz für f_p :

$$[22] \quad f_p = -\bar{\rho} K_H \nabla (c_p \hat{\Theta}) \quad ;$$

K_H ist ein turbulenter Diffusionskoeffizient mit der Dimension Geschwindigkeit mal Länge.

Für ein 2dimensionales ebenes Modell trockener Konvektion läßt sich somit auf der Basis der ursprünglichen Gleichungen folgendes Prognosesystem - unter Weglassung der Mittelungssymbole - formulieren:

$$[23] \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho) = 0$$

$$[24] \quad \frac{\partial \varrho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho \omega) = -\nabla p - g \varrho k + \nabla \cdot (\varrho K_M \nabla \omega)$$

$$[25] \quad \frac{\partial \varrho \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho \Theta) = \nabla \cdot (\varrho K_H \nabla \Theta)$$

$$[26] \quad p = \frac{R \varrho}{p_n} (\varrho \Theta)^{\frac{c_p}{R}} .$$

Zur Bestimmung der 5 abhängigen Variablen ϱ, u, w, Θ, p stehen 4 prognostische und eine diagnostische Gleichung zur Verfügung. Die Temperatur T , deren Kenntnis für den prognostischen Prozeß nicht erforderlich ist, kann über die thermische Zustandsgleichung [13] natürlich jederzeit berechnet werden. Glieder, die den molekularen Reibungstensor τ_M enthalten, wurden in [24] und [25] vernachlässigt. Bei einer energetisch ausgerichteten Bestimmung der turbulenten Koeffizienten K_M und K_H auf der Basis der stationären Form von [19] (s. Abschn. 2.4) bedeutet die Nichtberücksichtigung der Dissipationswärme aus turbulenten Bewegungen " $\overline{\tau_M \cdot \nabla \omega}$ " in [25], daß die skalige Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ständig abnehmen muß.

2.1.2. Schallfilterung

Zur Darstellung der Schallfilterung gehen wir von den Gleichungen [10] - [14] aus und lassen diejenigen Terme, die auf subskalige Prozesse zurückgehen, außer Betracht. Die Analyse des Schallphänomens zeigt, daß es nur dann durch die Konvektionsgleichungen reproduziert wird, wenn neben den Bewegungsgleichungen der 1. Hauptsatz und die Kontinuitätsgleichung prognostischen Charakter haben. Als

Verfahren zur Elimination von Schallprozessen bietet sich demnach an, die lokale zeitliche Änderung der Dichte nicht explizit zu berechnen und die Bedingung

$$[27] \quad \nabla \cdot (\varrho \mathbf{w}) = 0$$

als diagnostische Beziehung an die Stelle von [10] treten zu lassen. [27] liefert, angewandt auf [11], eine diagnostische Gleichung für den Druck p :

$$[28] \quad \nabla^2 p = \frac{1}{\varrho} \nabla \nabla \cdot \varrho \mathbf{w} \varrho \mathbf{w} + \varrho \mathbf{w} \varrho \mathbf{w} \cdot \nabla \frac{1}{\varrho} + 2 \varrho \mathbf{w} \nabla \frac{1}{\varrho} \cdot \nabla \varrho \mathbf{w} - g \frac{\partial \varrho}{\partial z} \cdot$$

Ein Prognosesystem, in dem eine Bewegungsgleichung über [27] eliminiert und der Druck gemäß [28] berechnet wird, enthält keine Schallprozesse mehr. Aus der Störungsrechnung für eine ruhende geschichtete Atmosphäre (Index 0) geht hervor, daß für die auftretenden Frequenzen die Ungleichung

$$\omega^2 < N^2 = \frac{g}{\Theta_0} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \quad (N \text{ Brunt-Väisälä-Frequenz})$$

gilt, während Schallwellen höhere Frequenzen aufweisen (26, S. 108). Die Adaptation der Anfangsfelder mittels [28] garantiert ihre Schallfreiheit (s. Abschn. 2.6.).

Nun ist [28], vom Typ der Poisson-Gleichung, in der Anwendung problematisch, da die rechte Seite nicht nur eine komplizierte Struktur aufweist, sondern wegen $\varrho(p, T)$ bzw. $\varrho(p, \theta)$ in die Lösungsiteration einbezogen werden muß. Es ist zu überlegen, ob der Maßstab konvektiver Prozesse approximative Prognosegleichungen zuläßt, die diese Schwierigkeit nicht aufweisen.

In einer Maßstabsanalyse der Konvektionsgleichungen, bei der die thermodynamischen Variablen in einen z -abhängigen Standardwert (Index 0) und eine Abweichung davon (gestrichene Größen) zerlegt werden, kommen Dutton und Fichtl (25) zu dem Ergebnis, daß für hochreichende Konvektion folgende Terme in den Prognosegleichungen

zu berücksichtigen sind:

$$[29] \quad \nabla \cdot (\varrho_0 \mathbf{w}) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{w}}{\alpha_0} \right) = 0$$

$$[30] \quad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\alpha_0 \nabla p' + g \frac{\alpha'}{\alpha_0} \mathbf{k}$$

$$[31] \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha'}{\alpha_0} + \frac{c_v}{c_p} \frac{p'}{p_0} \right) + \frac{w}{T_0} \left(\frac{dT_0}{dz} + \frac{g}{c_p} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Theta'}{\Theta_0} \right) + \frac{w}{\Theta_0} \frac{d\Theta_0}{dz} = 0$$

$$[32] \quad \frac{\alpha'}{\alpha_0} = \frac{T'}{T_0} + \frac{p'}{p_0}$$

$$[33] \quad \frac{\Theta'}{\Theta_0} = \frac{T'}{T_0} - \frac{R}{c_p} \frac{p'}{p_0} \quad ,$$

wobei $\alpha = \frac{1}{\varrho}$ das spezifische Volumen bedeutet. Für flache Konvektion, deren vertikaler Prozeßmaßstab klein ist gegen die verwendete Skalenhöhe von etwa 10 km, können die Stördruckterme in [31] bis [33] und die z-Abhängigkeit der Bezugsdichte ϱ_0 vernachlässigt werden (Boussinesq-System). Auf die Relevanz des Stördruckes bei Cumulonimbus-Konvektion haben insbesondere List und Lozowski (48) hingewiesen. Der hierbei zugrundegelegte, von Barnes (s. in (48)) in 500 mb gemessene Stördruck von 3 mb steht in guter Übereinstimmung mit den Aussagen des ungefilterten Modells hochreichender Feuchtkonvektion (s. Abschn. 3.2.2.). Außerdem ist im hochreichenden Fall das $\nabla \cdot \mathbf{w}$ enthaltende Glied des Reibungsansatzes [20a] zu berücksichtigen.

Besondere Vorzüge liegen in der Wahl einer adiabatischen Schichtung ($\Theta = \Theta_c = \text{const}$) als Referenzatmosphäre. Die Skalenhöhe von etwa 30 km erlaubt es, den Gültigkeitsbereich der flachen Konvektion auf etwa 3 km auszudehnen. Es lassen sich konsistente Energiegleichungen herleiten (25). Das von Ogura und Phillips 1962 (71) aufgestellte Gleichungssystem für hochreichende Konvektion hat folgendes Aussehen:

$$[34] \quad \nabla \cdot (\varrho_0 \mathbf{w}) = 0$$

$$[35] \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -c_p \Theta_c \nabla \pi' + g \frac{\Theta'}{\Theta_c} k$$

$$[36] \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\Theta'}{\Theta_c} \right) = 0$$

$$[37] \quad \frac{T'}{T} = \frac{\Theta'}{\Theta_c} + \frac{\pi'}{\pi_0} \quad .$$

Hierin bedeutet

$$\pi = \left(\frac{p}{p_n} \right)^{\frac{R}{c_p}}$$

die Exnerfunktion; für die z-abhängigen Werte der Referenzatmosphäre ergibt sich

$$\pi_0 = 1 - \frac{gz}{c_p \Theta_c} \quad , \quad \varrho_0 = \frac{p_n}{R \Theta_c} \pi_0^{\frac{c_p}{R}} \quad .$$

Die der Gleichung [28] entsprechende Beziehung für den Stördruck lautet:

$$[38] \quad \nabla^2 \pi' + \frac{1}{\varrho_0} \frac{d\varrho_0}{dz} \frac{\partial \pi'}{\partial z} = \frac{1}{c_p \Theta_c \varrho_0} \left(-\nabla \nabla \cdot \varrho_0 \vartheta \vartheta + g \frac{\partial}{\partial z} \left(\varrho_0 \frac{\Theta'}{\Theta_c} \right) \right) \quad ;$$

in ihr tritt die Unbekannte π' wirklich explizit auf, alle übrigen Größen können als gegeben betrachtet werden. Im 2dimensionalen Fall wird die prognostische Auswertung des Systems [34] - [36] dadurch etwas vereinfacht, daß wegen [34] eine Stromfunktion definiert werden kann. Damit wird π' aus dem Prognosesystem vollständig eliminiert.

Die Kenntnis der Temperatur ist für den prognostischen Prozeß im trockenen Fall nicht erforderlich. Sollte man sie für diagnostische Zwecke brauchen, so steht [37] zur Verfügung. Diese Gleichung setzt nur bei hochreichender Konvektion die Lösung von [38] voraus, da bei flacher Konvektion das π' -Glied in [37] - und die z-Abhängigkeit von ϱ_0 - wie gehabt vernachlässigt werden kann.

Problematisch wird die Situation dagegen im Fall hochreichender Feuchtkonvektion. In [36] ist die Phasenübergangswärme zu berücksichtigen, deren Bestimmung über den Sättigungsdampfdruck die

Kenntnis der Temperatur voraussetzt. Zu deren Ermittlung gemäß [37] wird aber π' benötigt, dessen Bestimmungsgleichung [38] wiederum über Θ' mit [36] und [37] rückgekoppelt ist. Versuche von Ogura und Phillips (71), durch Verwendung einer gesättigt feuchtadiabatisch geschichteten Referenzatmosphäre die Berücksichtigung der Temperaturstörung entbehrlich zu machen, führten im Hinblick auf den abgeschätzten Einfluß mikrophysikalischer Prozesse nicht zur erforderlichen Genauigkeit. Die aufgezeigte hochimplizite Relation zwischen den thermodynamischen Variablen verhinderte bisher die praktische Anwendung eines konsistent approximierten Gleichungssystems für hochreichende Feuchtkonvektion. Nur in einer Grundsatzstudie von Wilhelmson und Ogura (106), die dem Einfluß des Stördruckterms bei der Berechnung des Sättigungsdampfdrucks gewidmet ist, wurde das Problem in einem 2dimensionalen Modell durch ein Iterationsverfahren angegangen. Dabei offenbarte sich ein prinzipielles Problem bei der Anwendung der - im feuchten Fall geringfügig modifizierten - Gleichung [38]: Infolge Neumann'scher Randbedingungen am oberen und unteren Rand liefert die Lösung den Stördruck π' nur bis auf eine willkürliche Konstante. Absolutwerte werden aber benötigt. Als Notbehelf wurde der Druck an der oberen linken Ecke eines auf mindestens 64 km Horizontalerstreckung ausgedehnten Integrationsgebietes festgehalten. Wie ein Vergleich mit unseren Ergebnissen zeigt (s. Abschn. 3.2.2.), läßt sich hierdurch zwar der auf Term 1 der rechten Seite von [38] basierende dynamische Stördruckanteil realistisch simulieren; statische, durch Umschichtung bedingte, Effekte, deren Größe überwiegt und die die Forderungen der Maßstabsanalyse bestätigen, werden jedoch völlig falsch wiedergegeben.

Für alle approximierten Gleichungssysteme gilt zudem die Bemerkung von Dutton und Fichtl (25), daß die in einem speziellen Fall erhaltene Lösung darauf zu prüfen ist, ob die Approximationsbedingungen tatsächlich Gültigkeit haben.

2.1.2. Feuchte Konvektion ohne Niederschlag

Das atmosphärische Medium wird gegenüber Abschnitt 2.1.1. um die Substanz Wasser erweitert. Für das Wasser ist vorausgesetzt, daß es nur im gasförmigen (Wasserdampf) und flüssigen (tropfbares Wasser) Aggregatzustand auftreten kann. Das Kondensat möge man sich als ein im Volumen ρ element gleichmäßig verteiltes Tröpfchenkollektiv vorstellen. Die 3 Komponenten trockene Luft, Wasserdampf und Flüssigwasser, durch die Indizes L, D und W gekennzeichnet, bilden ein thermodynamisches System, das aus einer gasförmigen und einer flüssigen Phase besteht.

Den molekularen Gleichungen für das angesprochene atmosphärische Medium werden neben den in Abschnitt 2.1.1. gemachten Voraussetzungen folgende Annahmen zugrundegelegt:

1. Neben dem molekularen Wärmefluß bleiben auch die molekularen Diffusionsflüsse der Komponenten im Hinblick auf die entsprechenden turbulenten Flüsse unberücksichtigt.
2. Die Gasphase ist eine Mischung zweier idealer Gase: trockene Luft und Wasserdampf. Dieser Satz ist wiederholt geprüft und als gute Approximation befunden worden (60, S. 56 und 58; 24, S. 55).
3. Die flüssige Phase stimmt in Bewegung und Temperatur mit der Gasphase überein. Sie steht ständig im Gleichgewichtszustand mit dem Wasserdampf, wobei der Sättigungsdampfdruck sich bei allen Temperaturen auf eine ebene Fläche reinen Wassers bezieht. Das spezifische Volumen der flüssigen Phase wird Null gesetzt; diese Voraussetzung schlägt sich in der Formulierung der thermischen Zustandsgleichung, der Clausius-Clapeyron'schen Gleichung, der spezifischen Wärme des Flüssigwassers und der Kondensationswärme nieder.

Das Gesetz der Erhaltung der Masse bringt die Bilanzgleichung (Kontinuitätsgleichung) der Gesamtmasse

$$[39] \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

zum Ausdruck. Dabei ist die Dichte ρ als Masse des Gemischs pro Volumeneinheit definiert. Die Zusammensetzung des Gemischs wird durch die Konzentrationen - das sind die relativen Massenanteile am Gemisch - k_L , k_D , k_W der Komponenten beschrieben. Sie genügen der Definitionsgleichung

$$[40] \quad k_L + k_D + k_W = 1$$

Es ergeben sich als Bilanzgleichungen für trockene Luft

$$[41] \quad \frac{\partial \rho k_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} k_L) = 0 \quad ,$$

für Wasserdampf

$$[42] \quad \frac{\partial \rho k_D}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} k_D) = -u_K \quad ,$$

für tropfbares Wasser

$$[43] \quad \frac{\partial \rho k_W}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} k_W) = u_K \quad ;$$

u_K bezeichnet die Kondensationsrate pro Volumeneinheit. Summation von [41] - [43] liefert unter Beachtung von [40] selbstverständlich die Gleichung [39]. Addiert man [42] und [43], so erhält man für die Konzentration der Wassersubstanz $k_{DW} = k_D + k_W$ die Beziehung (Kontinuitätsgleichung der Substanz Wasser)

$$[44] \quad \frac{\partial \rho k_{DW}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} k_{DW}) = 0 \quad .$$

Aus [41] und [44] folgt mit [39], daß sowohl k_L als auch k_{DW} individuelle Invarianten ($dk_L/dt = 0$, $dk_{DW}/dt = 0$) darstellen.

Die Bilanzgleichung des Impulses

$$[45] \quad \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \rho \omega) = -\nabla p - g \rho k + \nabla \cdot \tau_m$$

hat wegen der Annahmen über die flüssige Phase die gleiche Gestalt wie im trockenen Fall ([2]); man muß jedoch die veränderte Bedeutung von ρ und p (Gesamtdruck der Gasphase) im Auge behalten.

Die Bilanzgleichung der fühlbaren Wärme

$$[46] \quad \frac{\partial \rho c T}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \rho c T) = -p \nabla \cdot \omega + L_K^c u_K + \tau_m \cdot \nabla \omega$$

wird durch Addition der mit L_K^c multiplizierten Gleichung [42] - Bilanzgleichung der latenten Wärme - zur Bilanzgleichung der Gesamtwärme

$$[47] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho [cT + k_D L_K^c]) + \nabla \cdot \{ \omega \rho [cT + k_D L_K^c] \} = -p \nabla \cdot \omega + \tau_m \cdot \nabla \omega$$

erweitert. Die Wärmegleichung [47] entspricht der Bilanzgleichung der inneren Energie des Gemischs (1. Hauptsatz), die sich von der Gesamtwärme nur um Terme unterscheidet, deren materielle Ableitung ($\partial/\partial t \dots + \nabla \cdot \omega \dots$) verschwindet. Spezifische Größen, die das Gemisch charakterisieren, setzen sich aus partiellen spezifischen Größen, welche die Komponenten (Partialmassen) kennzeichnen, nach der Formel

$$[48] \quad \Psi = k_L \Psi_L + k_D \Psi_D + k_w \Psi_w$$

zusammen. Speziell erhalten wir für die spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen bzw. Druck die Ausdrücke

$$[49] \quad C_v = k_L C_{vL} + k_D C_{vD} + k_w C_w \quad , \quad C_p = k_L C_{pL} + k_D C_{pD} + k_w C_w \quad ,$$

wobei die partiellen spezifischen Wärmen als konstant angesehen werden können ($c_w = 42,178 \cdot 10^6 \text{ erg/g} \cdot \text{grad}$) und für die gasförmigen Komponenten den Relationen

$$[50] \quad c_{pL} - c_{wL} = R_L \quad (\text{Werte s. Abschn. 2.1.1.})$$

$$c_{pD} - c_{wD} = R_D \quad (R_D = 4,615 \cdot 10^6 \text{ erg/g} \cdot \text{grad Gaskonstante des Wasserdampfes; } c_{pD} = 18,586 \cdot 10^6 \text{ erg/g} \cdot \text{grad, } c_{vD} = 13,971 \cdot 10^6 \text{ erg/g} \cdot \text{grad})$$

genügen. Für die Kondensationswärme gilt

$$[51] \quad L_K = L_K^0 + (c_{pD} - c_w)(T - T_0) = L_K^c + (c_{pD} - c_w)T$$

mit den Konstanten $L_K^0 = 2,5008 \cdot 10^{10} \text{ erg/g}$, $T_0 = 273,15^\circ\text{K}$ und entsprechend L_K^c . Unter den gemachten Voraussetzungen hat die thermische Zustandsgleichung die Gestalt

$$[52] \quad p = p_L + p_D = \varrho (k_L R_L + k_D R_D) T$$

Unter der Voraussetzung $u_K = 0$ (ungesättigt feuchte Zustandsänderungen; wolkenfreier Raum) kann die Bilanzgleichung für die fühlbare Wärme [46] in die Form

$$[53] \quad \frac{\partial \varrho c_{pf} \Theta_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \varrho c_{pf} \Theta_f) = \frac{\Theta_f}{T} \varrho_m \cdot \nabla \varrho$$

übergeführt werden; hierin bedeuten

$$[54] \quad c_{pf} = k_L c_{pL} + k_D c_{pD}$$

die spezifische Wärme bei konstantem Druck und

$$[55] \quad \Theta_f = T \left(\frac{p_a}{p} \right)^{\frac{k_L R_L + k_D R_D}{c_{pf}}}$$

die potentielle Temperatur ungesättigter Feuchtluft. Entsprechend geht für Gleichgewichtszustandsänderungen gesättigter Feuchtluft (Wolke) die Bilanzgleichung für die Gesamtwärme [47] über in

$$[56] \quad \frac{\partial \varrho c_{p\ddot{a}} \Theta_{\ddot{a}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \varrho c_{p\ddot{a}} \Theta_{\ddot{a}}) = \frac{\Theta_{\ddot{a}}}{T} \varrho_m \cdot \nabla \varrho$$

mit der spezifischen Wärme

$$[57] \quad c_{pa} = k_L c_{pL} + k_{ow} c_w$$

und der potentiell-äquivalenten Temperatur (82)

$$[58] \quad \Theta_a = T \left(\frac{p_n}{p_L} \right)^{\frac{k_L R_L}{c_{pa}}} e^{\frac{K_D L_K}{c_{pa} T}}$$

Bei der Herleitung wurde von der Clausius-Clapeyron'schen Gleichung

$$[59] \quad \frac{dP_D}{dT} = \varrho \frac{K_D L_K}{T}$$

Gebrauch gemacht; P_D und K_D stellen Dampfdruck und Wasserdampfkonzentration im Sättigungsfall dar. Die Gleichungen [53] und [56] sind analog [3b] gebaut. Sicht man wiederum vom Dissipationsterm auf der rechten Seite ab, so erweisen sich sowohl die Produkte $c_{pf} \Theta_f$ bzw. $c_{pa} \Theta_a$ als auch wegen [41] und [42] bzw. [44] deren Faktoren als individuelle Invarianten. Während im ungesättigten Fall fühlbare und latente Wärme unabhängig bilanziert sind, stehen sie im gesättigten Fall über die Gleichgewichtsbedingung in Zusammenhang.

Auch die Energiebilanzgleichungen haben eine der trockenen Version analoge Struktur. Wir erhalten für die kinetische Energie

$$[60] \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \frac{w^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left\{ w \varrho \frac{w^2}{2} + p w - \tau_M \cdot w \right\} = p \nabla \cdot w - \varrho g w - \tau_M \cdot \nabla w,$$

die potentielle Energie

$$[61] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varrho \phi) + \nabla \cdot \{ w \varrho \phi \} = \varrho g w,$$

die Gesamtwärme

$$[62] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varrho [cT + k_D L_K]) + \nabla \cdot \{ w \varrho [cT + k_D L_K] \} = -p \nabla \cdot w + \tau_M \cdot \nabla w$$

und die Gesamtenergie

$$[63] \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left[\frac{w^2}{2} + \phi + c_p T + k_D L_k^c \right] \right) + \nabla \cdot \left\{ \rho \rho \left[\frac{w^2}{2} + \phi + c_p T + k_D L_k^c \right] - \tau_M \cdot w \right\} = 0 .$$

Bei der Mittelung molekularer Gleichungen über den Spektralbereich der Mikroturbulenz wird die in Abschnitt 2.1.1. gemachte Voraussetzung, daß turbulente Prozesse als in den thermodynamischen Variablen linear behandelt werden können, übernommen. Sie erstreckt sich jetzt sinngemäß auch auf die Konzentrationen. Die Rolle des Gewichts bei gewogener Mittelbildung übernimmt die Gesamtmasse pro Volumeneinheit .

Die gemittelte Form der Gleichungen [39] , [44] und [45] lautet:

$$[64] \quad \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{w} \bar{\rho}) = 0$$

$$[65] \quad \frac{\partial \bar{\rho} \hat{k}_{Dw}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{w} \bar{\rho} \hat{k}_{Dw}) = - \nabla \cdot \tau_w$$

$$[66] \quad \frac{\partial \bar{\rho} \hat{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{w} \bar{\rho} \hat{w}) = - \nabla p - g \bar{\rho} k + \nabla \cdot (\tau_M + \tau_T) \quad ;$$

für den turbulenten Gesamtwasserfluß und den turbulenten Reibungstensor wurden dabei die Abkürzungen

$$\tau_w = \overline{w'' g k_{Dw}''} \quad \text{und} \quad \tau_T = - \overline{w'' g w''} \quad \text{benutzt.}$$

Um eine skalige Bilanzgleichung für die Gesamtwärme zu gewinnen, behandeln wir wolkenfreien Raum und Wolke getrennt. Im ersten Fall ergibt die Mittelung von [53]

$$[67] \quad \frac{\partial \bar{\rho} \hat{c}_{pf} \hat{\theta}_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{w} \bar{\rho} \hat{c}_{pf} \hat{\theta}_f) = \frac{\hat{\theta}_f}{T} \overline{\tau_M \cdot \nabla w} - \nabla \cdot f_{pf}$$

$$\text{mit} \quad f_{pf} = \overline{w'' g (c_{pf} \theta_f)''} \quad \text{und} \quad \hat{c}_{pf} = \hat{k}_{Lc_{pL}} + \hat{k}_{Dc_{pD}} \quad ;$$

im zweiten Fall geht aus [56]

$$[68] \quad \frac{\partial \bar{\rho} \hat{c}_{pa} \hat{\theta}_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{w} \bar{\rho} \hat{c}_{pa} \hat{\theta}_a) = \frac{\hat{\theta}_a}{T} \overline{\tau_M \cdot \nabla w} - \nabla \cdot f_{pa}$$

$$\text{mit} \quad f_{pa} = \overline{w'' g (c_{pa} \theta_a)''} \quad \text{und} \quad \hat{c}_{pa} = \hat{k}_{Lc_{pL}} + \hat{k}_{Dw} c_w \quad \text{hervor.}$$

Mithilfe der gemittelten Formen von [52]

$$[69] \quad \bar{p} = \bar{p}_L + \bar{p}_D = \bar{g} (\hat{k}_L R_L + \hat{k}_D R_D) \hat{T}$$

und [55]

$$[70] \quad \hat{\Theta}_f = \hat{T} \left(\frac{p_a}{\bar{p}} \right) \frac{\hat{k}_L R_L + \hat{k}_D R_D}{\hat{c}_{pf}}$$

läßt sich [67] überführen in

$$[71] \quad \frac{\partial \bar{g} \hat{c}_v \hat{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\omega} \bar{g} \hat{c}_v \hat{T}) = -\bar{p} \nabla \cdot \hat{\omega} + \overline{\hat{\omega} \nabla \cdot \hat{\omega}} - \frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}_f} \nabla \cdot \hat{f}_{pf} \quad ,$$

wenn die substantielle zeitliche Ableitung des Exponenten in [70] vernachlässigt wird, wozu die Gleichungen [41] und [42] mit $u_K = 0$ berechtigen. Addiert man zu [71] die mit L_K^c multiplizierte gemittelte Gleichung [42], so erhält man die skalige Bilanzgleichung für die Gesamtwärme im ungesättigten Fall

$$[72] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{g} [\hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_D L_K^c]) + \nabla \cdot \{ \hat{\omega} \bar{g} [\hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_D L_K^c] \} = -\bar{p} \nabla \cdot \hat{\omega} + \overline{\hat{\omega} \nabla \cdot \hat{\omega}} - \frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}_f} \nabla \cdot \hat{f}_{pf} - L_K^c \nabla \cdot \vartheta$$

mit $\vartheta = \overline{\hat{\omega} \nabla \cdot \hat{k}_D}$

Bedienen wir uns andererseits der gemittelten Formen von [58], [59] und [51]

$$[73] \quad \hat{\Theta}_a = \hat{T} \left(\frac{p_a}{\bar{p}} \right) \frac{\hat{k}_L R_L}{\hat{c}_{pa}} e^{\frac{\hat{k}_D L_K^c}{\hat{c}_{pa} \hat{T}}}$$

$$[74] \quad \frac{d\bar{p}}{d\hat{T}} = \bar{g} \frac{\hat{k}_D L_K^c}{\hat{T}}$$

$$[75] \quad \hat{L}_K = L_K^c + (c_{pD} - c_w) \hat{T}$$

und vernachlässigen im Hinblick auf [41] und [44] die substantielle Zeitableitung von \hat{k}_L und \hat{c}_{pa} , so läßt sich [72] in einer [72] analogen Form schreiben:

$$[76] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} [\hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_0 L_k^c]) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} [\hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_0 L_k^c] \} = -\bar{p} \nabla \cdot \hat{w} + \overline{\tau_M \cdot \nabla w} - \frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}_a} \nabla \cdot f_{pa} .$$

Die Gleichungen [72] und [76] unterscheiden sich nur in der Formulierung der turbulenten Flüsse und können zu einer allgemeinen Bilanzgleichung der Gesamtwärme

$$[77] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} [\hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_0 L_k^c]) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} [\hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_0 L_k^c] \} = -\bar{p} \nabla \cdot \hat{w} + \overline{\tau_M \cdot \nabla w} \\ \ominus \left[\begin{array}{l} \frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}_f} \nabla \cdot f_{pf} + L_k^c \nabla \cdot \vartheta \\ \frac{\hat{T}}{\hat{\Theta}_a} \nabla \cdot f_{pa} \end{array} \right]$$

zusammengezogen werden.

Bei der Aufstellung gemittelter Energiebilanzgleichungen beginnen wir wiederum mit der Gesamtenergie und ziehen dann die Bilanzen der Energieformen gemittelter Felder ab, um so eine Bilanzgleichung für die Turbulenzenergie zu gewinnen. Die Gleichungen lauten für die Gesamtenergie

$$[78] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} [\frac{w^2}{2} + e_T + \phi + \hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_0 L_k^c]) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} [\frac{w^2}{2} + e_T + \phi + \hat{c}_v \hat{T} + \hat{k}_0 L_k^c] \\ + \overline{w'' \rho \frac{w''^2}{2}} + f + L_k^c \vartheta - (\overline{\tau_M + \tau_T}) \cdot \hat{w} - \overline{\tau_M \cdot w''} \} = 0$$

mit $f = \overline{w'' \rho (c_p T)''}$,

die kinetische Energie

$$[79] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \frac{w^2}{2}) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} \frac{w^2}{2} + \bar{p} \hat{w} - (\overline{\tau_M + \tau_T}) \cdot \hat{w} \} = -g \bar{\rho} \hat{w} + \bar{p} \nabla \cdot \hat{w} \\ - (\overline{\tau_M + \tau_T}) \cdot \nabla \hat{w} ,$$

die potentielle Energie

$$[80] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \phi) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} \phi \} = g \bar{\rho} \hat{w} ,$$

die Gesamtwärme

$$\begin{aligned}
 [81] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} [\hat{c}_T + \hat{k}_0 L_k^c]) + \nabla \cdot \{ \hat{\omega} \bar{\rho} [\hat{c}_T + \hat{k}_0 L_k^c] + \left. \begin{array}{l} \textcircled{U} \left[\frac{\hat{T}}{\hat{C}_f} f_{pf} + L_k^c \vartheta \right] \\ \textcircled{G} \left[\frac{\hat{T}}{\hat{C}_a} f_{pa} \right] \end{array} \right\} = -\bar{p} \nabla \cdot \hat{\omega} \\
 + \bar{\tau}_M \cdot \nabla \hat{\omega} + \left. \begin{array}{l} \textcircled{U} f_{pf} \cdot \nabla \frac{\hat{T}}{\hat{C}_f} \\ \textcircled{G} f_{pa} \cdot \nabla \frac{\hat{T}}{\hat{C}_a} \end{array} \right\} + \overline{\tau_M \cdot \nabla \omega''}
 \end{aligned}$$

die Turbulenzenergie

$$\begin{aligned}
 [82] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} e_T) + \nabla \cdot \left\{ \hat{\omega} \bar{\rho} e_T + \overline{\omega'' \rho' \frac{\omega''^2}{2}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\omega'' \rho' p'} - \overline{\tau_M \cdot \omega''} \right\} = \\
 \bar{\tau}_T \cdot \nabla \hat{\omega} - \left. \begin{array}{l} \textcircled{U} f_{pf} \cdot \nabla \frac{\hat{T}}{\hat{C}_f} \\ \textcircled{G} f_{pa} \cdot \nabla \frac{\hat{T}}{\hat{C}_a} \end{array} \right\} - \overline{\tau_M \cdot \nabla \omega''}
 \end{aligned}$$

Bei der endgültigen Formulierung der Gleichung [82] wurde von den Beziehungen

$$\begin{aligned}
 [83] \quad \frac{\hat{T}}{\hat{C}_f} f_{pf} &= f - \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\omega'' \rho' p'} \\
 \frac{\hat{T}}{\hat{C}_a} f_{pa} &= f + L_k^c \vartheta - \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\omega'' \rho' p'}
 \end{aligned}$$

Gebrauch gemacht, die aus den linearisierten Gleichungen [70] und [73] folgen.

Vergleicht man die Energiegleichungen [78] - [82] mit der trockenen Variante [15] - [19], so ist zu erkennen, daß an die Stelle der fühlbaren Wärme und ihres skaligen und turbulenten Flusses entsprechende Ausdrücke für die Gesamtwärme getreten sind. Während nun der turbulente Gesamtwärme fluß gemäß [81] und [83] den Wolkenrand stetig passiert, weist die Transformation zwischen Gesamtwärme und Turbulenzenergie dort eine Unstetigkeit auf, wenn f_{pf} und f_{pa} nach den Vorstellungen von Abschnitt 2.1.1. parametrisiert werden.

Für den turbulenten Reibungstensor übernehmen wir den Ansatz [20a] bzw. [20b]. Die aus [44] für k_{DW} , aus [42] mit $u_K = 0$ für k_D und - angenähert - aus [53] für $C_{pf} \hat{\Theta}_f$ im ungesättigten Bereich bzw. aus [56] für $C_{pa} \hat{\Theta}_a$ im gesättigten Bereich hervorgehende individuelle Invarianz gibt zu den Ansätzen

$$[84] \quad u_{\theta} = -\bar{\xi} K_H \nabla \hat{k}_{0W}$$

$$[85] \quad \vartheta = -\bar{\xi} K_H \nabla \hat{k}_D$$

$$[86] \quad f_{pf} = -\bar{\xi} K_H \nabla (\hat{c}_{pf} \hat{\Theta}_f)$$

$$[87] \quad f_{pa} = -\bar{\xi} K_H \nabla (\hat{c}_{pa} \hat{\Theta}_a)$$

für die turbulenten Flüsse skalarer spezifischer Eigenschaften Veranlassung. Der Diffusionskoeffizient wird dabei von vornherein für alle Größen gleich angenommen, zumal in f_{pa} (siehe [77]) fühlbarer und latenter Wärmefluß sowie in u_{θ} die Flüsse von Wasserdampf und tropfbarem Wasser gekoppelt auftreten.

Der nunmehr auswertbare Transformationsterm in [82] lautet approximiert (Ableitungen der Druckexponenten und spezifischen Wärmen wurden vernachlässigt):

$$[88] \quad -f_{pf} \cdot \nabla \frac{\hat{I}}{\hat{\Theta}_f} = K_H \left\{ \frac{1}{\hat{\Theta}_f} \nabla \hat{\Theta}_f \cdot \nabla \bar{p} \right\}$$

$$-f_{pa} \cdot \nabla \frac{\hat{I}}{\hat{\Theta}_a} = K_H \left\{ \frac{1}{\hat{\Theta}_a} \nabla \hat{\Theta}_a \cdot \nabla \bar{p} - \frac{\bar{\xi}}{\hat{\Theta}_a} \nabla \hat{\Theta}_a \cdot \nabla (\hat{K}_D \hat{L}_K) \right\}$$

Wegen der dominierenden z-Abhängigkeit des Druckes kann man also in erster Näherung sagen, daß im ungesättigten Bereich bei trockenlabiler Schichtung, im gesättigten Bereich bei feuchtlabiler Schichtung innere Energie in Turbulenzenergie umgewandelt wird. Dieses physikalisch plausible Ergebnis hat sich durch die Bevorzugung von [53] und [56] gegenüber [46] bei der Mittelbildung und die naheliegenden Ansätze [86] und [87] zwanglos ergeben.

Aus den verfügbaren Beziehungen wollen wir abschließend ein Prognosesystem für ein 2dimensionales ebenes Modell zusammenstellen, wiederum unter Vernachlässigung der molekularen Reibung. Als abhängige Variable werden die 7 Größen $\varrho, k_D, k_W, u, w, T, p$ angesehen. Zu ihrer Prognose werden 5 prognostische und 2 diagnostische Gleichungen bereitgestellt:

$$[89] \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho) = 0$$

$$[90] \quad \frac{\partial \varrho k_{Dw}}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho k_{Dw}) = \nabla \cdot (\varrho K_H \nabla k_{Dw})$$

$$[91] \quad \frac{\partial \varrho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho \omega) = -\nabla p - g \varrho k + \nabla \cdot (\varrho K_M \nabla \omega)$$

$$[92] \quad \frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho e) = -p \nabla \cdot \omega + \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \left[\begin{matrix} \int_{\Theta_f} \nabla \cdot (\varrho K_H \nabla c_{pf} \Theta_f) + L_k^c \nabla \cdot (\varrho K_H \nabla k_D) \\ \int_{\Theta_a} \nabla \cdot (\varrho K_H \nabla c_{pa} \Theta_a) \end{matrix} \right]$$

mit $e = c_w T + L_k^c k_D$

$$[93] \quad p = p_L + p_D = \varrho (k_L R_L + k_D R_D) T$$

$$[94] \quad p_D = 6,11 \exp\left(17,27 \frac{T-273,16}{T-35,86}\right) \text{ (Tetens'sche Formel für den Sättigungsdampfdruck in mb).}$$

Hierbei gehen $k_L, c_{pf}, c_{pa}, \Theta_f, \Theta_a$ aus den Definitionsgleichungen [40], [54], [57] (jeweils gemittelte Form), [70], [73] hervor. Das Verfahren, zunächst den Gesamtwasser- und -wärmegehalt prognostisch zu bestimmen und dann durch einen diagnostischen Prozeß (s. Abschn. 2.2.) über [94] k_D, k_W und T zu gewinnen, stellt bei der vorliegenden Physik die einzige Möglichkeit dar, exakte und explizite prognostische Gleichungen zu verwenden. Darin kommt die Tatsache zum Ausdruck, daß zwischen den Gleichungen [42], [43] und [46] über die Kondensationsrate u_K ein Zusammenhang besteht, der bei Anwendung der thermodynamischen Gleichgewichtsbedingung dazu führt, daß das Prognosesystem gegenüber der trockenen Version um eine prognostische und eine diagnostische Beziehung erweitert wird.

Die den numerischen Experimenten zugrundeliegenden Gleichungen weichen in ihrer Form etwas vom System [89] - [94] ab, obwohl sie den gleichen physikalischen Sachverhalt widerspiegeln. Im Hinblick auf eine spätere Berücksichtigung der Mikrophysik wurde es für zweckmäßiger erachtet, spezifische Größen auf die trockene Luft bezogen zu definieren. Formuliert man nämlich die skaligen Transporte mithilfe der Geschwindigkeit des Gasgemischs, dann hat [39] wegen der Relativgeschwindigkeit des Kondensats nicht mehr den Charakter einer Kontinuitätsgleichung; an ihre Stelle tritt [41]. Das hat zur Folge, daß als abhängige Variablen die Dichte der trockenen Luft ρ_L und die Mischungsverhältnisse des Wasserdampfes m_D und des tropfbaren Wassers m_W anstelle von ρ , k_D , k_W auftreten.

Am Wolkenrand sind die zu [53] und [56] führenden Bedingungen nicht erfüllt. Um ihn thermodynamisch mitbehandeln zu können, wurde für [92] eine Näherungsform hinsichtlich des turbulenten Wärmeflusses hergeleitet, durch die wolkenfreier Raum und Wolkenrand methodisch zusammengefaßt werden können, wenn c_{pf} durch

$$[95] \quad c_p = k_L c_{pL} + k_D c_{pD} + k_W c_W$$

und Θ_f durch

$$[96] \quad \Theta = T \left(\frac{p_n}{p} \right)^{\frac{k_L R_L + k_D R_D}{c_p}}$$

ersetzt werden.

2.2. Das numerische Schema

Die Bilanzform, in der die prognostischen Gleichungen [89] - [92] bzw. [23] - [25] geschrieben wurden, legt es nahe, ein räumlich und zeitlich zentriertes Differenzenschema auf einem raum-zeit-versetzten Gitter zu definieren. Das zugrundegelegte Gitter (Abb. 1a) setzt sich aus 2 Punktsystemen zusammen, wobei an geraden Zeitpunkten

($t = n\Delta t$, n gerade) auf \circ -Punkten, an ungeraden auf \times -Punkten alle Variablen bekannt sind. Die beiden Systeme sind gegeneinander diagonal verschoben, so daß jeweils der Mittelpunkt eines Elementarquadrats durch das eine System, die Eckpunkte durch das andere System repräsentiert werden. Analog läßt sich ein 3dimensionales Gitter konstruieren, für das die Elementarquadrate in Elementarwürfel übergehen. Die numerischen Prognosegleichungen werden für die jeweiligen Gitterpunkte des Integrationsgebietes einschließlich des Randes gelöst. Um die Prozedur unverändert auch auf die Randpunkte anwenden zu können, müssen mithilfe der Randbedingungen (Abschn. 2.5.) Variablenwerte auf außerhalb liegenden Hilfspunkten bestimmt werden. In zeitlicher Hinsicht kommt das sog. Bocksprungverfahren zur Anwendung. Es besteht in der alternierenden Prognose der Werte für die beiden Punktsysteme über eine Distanz von $2\Delta t$; dabei stützen sich die Berechnungen im wesentlichen auf das zeitlich in der Mitte liegende Punktsystem. Nur am Anfang ist ein Vorwärtsschritt erforderlich. Der Abstand zwischen 2 Gitterpunkten eines Systems beträgt in horizontaler und vertikaler Richtung $\Delta x = \Delta z = \Delta = 333,3$ m. Dementsprechend ergibt sich für das Gesamtgitter ein Abstand von $\Delta/\sqrt{2} = 235,7$ m zwischen den Punkten und $\Delta/2 = 166,7$ m zwischen den Punktzeilen. Unter Beachtung des linearen numerischen Stabilitätskriteriums (s.u.) wurde der entsprechende Zeitschritt auf $\Delta t = 0,4$ festgelegt.

Neben lokalen Zeitableitungen enthalten die prognostischen Gleichungen folgende Typen von Termen: Gradienten, Divergenzen ohne und mit variablem Faktor, ein lineares Glied. Zur numerischen Darstellung von Gradienten und Divergenzen skaliger Flüsse werden zentrierte Differenzen in den entsprechenden Koordinatenrichtungen gebildet und lateral gemittelt. Die am Zentralpunkt benötigten, aber nicht vorhandenen Werte für Q ([91] bzw. [24]) und p ([92]) werden durch räumliche Mittel über die 4 Eckpunkte ersetzt. Die Turbulenzterme erfahren eine Sonderbehandlung. Es hat sich nämlich gezeigt, daß wegen der erforderlichen großen Zahl von Zeitschritten Inkonsistenzen in der Formulierung turbulenter Flüsse über fiktive

Quellen zu beträchtlichen Fehlern in den Gebietsbilanzen führen können, obwohl diese Flüsse um mindestens eine Zehnerpotenz kleiner als skalige Flüsse sind. Inkonsistenzen betreffen die in diesem Zusammenhang i.allg. vernachlässigte Ortsabhängigkeit der Dichte und eine behelfsmäßige Definition des Zentralwertes (Wert des Vorzeitpunktes). Für die Bilanzierung turbulenter Flüsse denken wir uns das Integrationsgebiet so unterteilt (Abb. 1a, gestrichelte Linien), daß jedem Gitterpunkt die Elementarfläche $F_E = \Delta^2/2$ zugeordnet wird. In der Mitte der 4 Randstrecken der Länge $\Delta/\sqrt{2}$ (Abb. 1a, Vollkreise) lassen sich die Variablen durch Mittelwerte und ihre Normalableitungen durch zentrierte Differenzen zwischen jeweils einem Eckwert und dem Zentralwert darstellen. Die Gitterformel für die turbulenten Divergenzausdrücke - als Mittelwert über F_E betrachtet und nach dem Gaußschen Integralsatz umgewandelt - lautet dann:

$$[97] \quad \nabla \cdot (\varrho K \nabla \psi) = \frac{1}{F_E} \oint_{S_E} \varrho K \nabla \psi \cdot \mathbf{n} \, ds \rightarrow \frac{2}{\Delta^2} \sum_{i=1}^4 \varrho_{i0} K_{i0} (\psi_i - \psi_0)$$

mit $f_{i0} = (f_i + f_0)/2$, wobei f_i Eckwerte, f_0 den Zentralwert bedeuten. Tritt ein variabler Faktor vor dem Divergenzausdruck auf (Gl. [92]), so heißt die der Zerlegung

$$[98a] \quad \varphi \nabla \cdot (\varrho K \nabla \psi) = \nabla \cdot (\varrho K \varphi \nabla \psi) - \varrho K \nabla \varphi \cdot \nabla \psi$$

entsprechende Gitterformel:

$$[98b] \quad \frac{2}{\Delta^2} \varphi_0 \sum_{i=1}^4 \varrho_{i0} K_{i0} (\psi_i - \psi_0) = \frac{2}{\Delta^2} \sum_{i=1}^4 \varrho_{i0} K_{i0} \varphi_{i0} (\psi_i - \psi_0) - \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i=1}^4 \varrho_{i0} K_{i0} (\varphi_i - \varphi_0) (\psi_i - \psi_0)$$

Der Term auf der linken Seite wird in der prognostischen Gleichung [92], der zweite Term der rechten Seite bei der Auswertung der Gleichung [82] (s. Abschn. 2.4.) verwendet. Die Variablenwerte f_0 am Zentralpunkt werden konsequent als zeitliche Mittelwerte aufgefaßt. Löst man die Kontinuitätsgleichung [89] bzw. [23] zuerst, so ergeben sich bezüglich Q keine Probleme. Ebenso lassen sich [90],

[91] bzw. [24], [25] explizit lösen, da der vorherzusagende Variablenwert in der Differenzgleichung algebraisch eliminiert werden kann. Lediglich in [92] erfolgt eine Approximation durch einmalige Iteration des Lösungsvorganges. Die Benutzung zeitlicher Mittelwerte erbrachte eine wesentliche Genauigkeitsverbesserung der Gebietsbilanzen (s.u.). Verwendet man wie üblich Werte des Vorzeitpunktes, so kommt es besonders in Achsennähe einer sich entwickelnden Konvektionszelle zu Raum-Zeit-Korrelationen, infolge derer die an der Grenze zwischen 2 Elementarflächen aus- bzw. eintretenden Flüsse nicht mehr annähernd gleich sind, sondern fiktive Quellen erzeugen.

Gegenüber gewöhnlichen Differenzenschemata gestattet es das angegebene raum-zeit-versetzte Gitter, bei vorgegebener Punktzahl den Rechenaufwand etwa auf die Hälfte zu reduzieren. Ein ähnliches Gitter (Abb. 1b) wurde von Lilly 1961 (41) vorgeschlagen und 1962 (42) einem numerischen Konvektionsexperiment zugrundegelegt. Formal geht dieses Gitter aus dem unsrigen durch eine Drehung um 45° hervor. Wegen der Nichtisotropie der konvektiven Antriebe (Priorität der Vertikalen) müssen aber Unterschiede im numerischen Verhalten daraus gefolgert werden, daß Differenzen über eine größere Distanz ($\Delta_L = \sqrt{2}\Delta$) und lateral ungemittelt zu bilden sind. Eine vergleichende Untersuchung für den Fall linearer Gleichungen enthält Abschnitt 2.3.. Im nichtlinearen Fall mag sich eine Distanzverkürzung präzisierend (75) und eine laterale Mittelung stabilisierend auswirken. Am Rande erwähnt sei ein unlängst von Fox (30) in 3dimensionalen Konvektionsexperimenten angewandtes Gitter, bei dem die Geschwindigkeitskomponenten an Punkten definiert sind, die in den entsprechenden Koordinatenrichtungen gegen die "thermodynamischen" Punkte um einen halben Gitterabstand versetzt sind. Da hierdurch die meisten Differenzen über eine Distanz von nur einem einzigen Gitterabstand erstellt werden, ergibt sich eine im Vergleich zum gewöhnlichen zentrierten Differenzenschema (2Δ -Differenzen) verbesserte Genauigkeit (75). Ein weiterer Vorteil liegt darin, daß die Normalgeschwindigkeiten an den Rändern definiert sind.

Zufriedenstellende numerische Lösungen der Prognosegleichungen erfordern einen hohen Grad an numerischer Stabilität. Die verschiedenen Formen der Instabilität numerischer Schemata lassen sich entweder an den linearisierten Gleichungen analysieren (lineare numerische Instabilität) oder resultieren aus nichtlinearen Wechselwirkungen (nichtlineare numerische Instabilität).

Soweit zu übersehen ist, können die Prognosegleichungen [89] - [94] bzw. [23] - [26] in Verbindung mit dem raum-zeitversetzten Gitter 3 Typen linearer numerischer Instabilität erzeugen.

1. Der erste Typ tritt dann auf, wenn die Bedingung $c\Delta t/\Delta \leq 1$ (Courant-Friedrichs-Lewy-Kriterium) nicht erfüllt ist. Demgemäß muß der zentrierte Zeitschritt $2\Delta t$ so klein gewählt werden, daß die schnellste Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c die Strecke Δ währenddessen nicht zurücklegen kann. Der Physik der linearisierten Trockenkonvektionsgleichungen entsprechend ist für c in erster Näherung die Schallgeschwindigkeit c_s einzusetzen (Abschn. 2.3., (42)). Der verwendete Zeitschritt von $\Delta t = 0,4$ s erlaubt ein $c = 417$ m/s, weshalb mit c_s (30°C , maximale Temperatur im Modell) = 349 m/s noch konvektive Trägerschwindigkeiten bis zu 68 m/s hinzutreten können.
2. Numerische Instabilität, die der diffusiven Prozeßkomponente der Gleichungen entspringen kann (31, S. 108), wurde in der angegebenen Differenzenformulierung von vornherein ausgeschaltet, da die Verwendung zeitlich gemittelter Zentralwerte absolute Stabilität verbürgt (28, S. 127).
3. Eine problemspezifische Form linearer Instabilität birgt der lineare Term $g\theta$ bzw. der Auftriebsterm in der linearisierten Version der vertikalen Bewegungsgleichung in sich. Lilly (41) schlug für die numerische Darstellung Zeitmittel aus Gründen der Genauigkeit vor und benutzte in trockenen Konvektionsexperimenten mit neutraler Grundschichtung (42) Zeitmittel neben Raummitteln mit ähnlichem Erfolg. Zeitliche Mittelbildung führte

jedoch bei Experimenten zur Feuchtkonvektion stets zu zeitlich anwachsenden numerischen Fehlstrukturen, die sich mit einer horizontalen Wellenlänge von 4Δ an der Grenze zwischen trocken-neutraler und trockenstabiler Grundsichtung ausbildeten, das ganze Feld überzogen und mit Schallfrequenz oszillierten. Die lineare Analyse der Differenzgleichungen liefert denn auch das Ergebnis (Abschn. 2.3.), daß zeitliche Mittelbildung des Auftriebsterms zu selektiver numerischer Amplifikation der Schallschwingungen führt, die vorzugsweise durch Schwereschwingungen an Schichtungsdiskontinuitäten ausgelöst werden. Systeme mit räumlicher Mittelung verhalten sich dagegen neutral.

Nichtlineare numerische Instabilität geht im wesentlichen auf spektralen Energiefluß und eine numerisch bedingte ("aliasing") Energieanhäufung in den größten skaligen Wellenzahlen zurück. Das Phänomen äußert sich in kurzwelligen Fehlstrukturen, die von kritischen Bereichen eines Prozesses ausgehen und allmählich die physikalisch relevanten Strukturen vollständig überdecken. Da das verwendete Differenzschema, das auf eine möglichst genaue Form- und Phasendarstellung abzielt, die Energieanhäufung weder durch Konservierungseigenschaften ausschließt noch ihr durch implizite Glättung bzw. selektive Dämpfung entgegenwirkt, müssen die Diffusionsterme eine kompensierende Energieabfuhr bewerkstelligen. Das Auffinden geeigneter zeit- oder raum-zeit-abhängiger Diffusionskoeffizienten stellt die numerische Seite des K-Problems (Abschn. 2.4.) dar. Seine befriedigende Lösung eliminiert zugleich eine mögliche schwache Instabilität, die das Bocksprungverfahren nach sich zieht (44). Bei Nullsetzen der K-Werte kommt es zu einem allmählichen Auseinanderlaufen der beiden Zeitfamilien (Punktsysteme). Die in Beziehung [97] zum Ausdruck kommende numerische Kopplung ist dagegen schon bei relativ kleinen K-Werten hinreichend, so daß andere Verfahren, wie gelegentliche Einschaltung eines Vorwärtszeitschrittes (30) oder einer gewissen zeitlichen Mittelung (47) entbehrlich sind.

Zur Einschätzung der numerischen Simulationsgenauigkeit seien einige Zahlenangaben für die feuchtkonvektiven Experimente KONFEU 43-45 (Abschn. 3.2.) gemacht. Die Auswertung umfaßt die 0-Punkte; sie liegen im Mittelpunkt von Elementarquadraten, in die sich das Integrationsgebiet vollständig zerlegen läßt. In Verbindung mit der Randbedingung verschwindender skaliger und turbulenter Flüsse besagen die Gleichungen [89] und [90], daß φ und k_{DW} - bzw. q_L und m_{DW} in der Anwendungsformulierung - im Gebietsmittel konstant bleiben müßten. Der relative Fehler für q_L , der keine systematische Zeitabhängigkeit aufweist, liegt allgemein in der Größenordnung 10^{-10} und damit an der Grenze der Rechengenauigkeit des Computers. Bei m_{DW} hat der maximale relative Fehler die Größenordnung 10^{-4} . In den Experimenten verhält sich der maximale Gehalt an tropfbarem Wasser zum Gesamtwassergehalt etwa wie 1:10. Somit sind physikalisch relevanter Prognosewert und Fehler um 3 Größenordnungen getrennt. Bleibt dagegen die Ortsabhängigkeit der Dichte im Diffusionsterm unberücksichtigt, so erhöht sich der relative m_{DW} -Fehler um 1-2 Größenordnungen; benutzt man den Zentralwert des Vorzeitpunktes, so resultiert bei ortsabhängigem Diffusionskoeffizienten ein Genauigkeitsverlust von einer Zehnerpotenz. Aussagen über die Gebietsbilanzen der skaligen Energieformen folgen an anderer Stelle (Abschn. 3.2.4.).

Abschließend wollen wir einige Bemerkungen zum Ablauf eines Prognosezyklus machen. Das Differenzenanalogon des trockenen Systems [23] - [26] bedarf keines Kommentars. Im feuchten Fall erfolgt zunächst über [89], [90] und [92] die Erstellung der Werte φ , k_{DW} und e für den neuen Zeitpunkt. Danach wird ein diagnostischer Prozeß eingeschaltet (Abb. 2). Aus der Definitionsgleichung für e lassen sich mit k_{DW} 2 Temperaturen berechnen:

$$[99a] \quad T_u = \frac{e - k_{ow} L_k^c}{(1 - k_{ow}) C_{VL} + k_{ow} C_{VO}}$$

für den ungesättigten oder gerade gesättigten Fall (Zustand I),

$$[99b] \quad T_G = \frac{e - K_D L_k^c}{(1 - k_{Dw})c_{vL} + K_D c_{vD} + (k_{Dw} - K_D)c_w}$$

für den gesättigten Fall mit Kondensat (Zustand II), wobei definitionsgemäß gilt:

$$[100] \quad K_D = \frac{P_D}{g R_D T}$$

In Gleichung [99a] ist die rechte Seite bekannt; [99b] stellt jedoch wegen [100] in der nicht approximierten Form (vgl. dagegen z.B. (69, 76, 88)) eine transzendente Gleichung der Bauart $T = \Phi(T)$ dar. Sie wird mittels konvergenzverbesserter Iteration (109, S. 22 ff.) gelöst. Infolge der guten Anfangsnäherungen (Wert des Vorzeitpunktes oder des ersten N-Durchlaufs) braucht die Iterationsschleife i.allg. nur 1-2 mal durchlaufen werden, damit die Bedingung $|T_n - \Phi(T_n)| \leq 10^{-6} \text{ grad}$ erfüllt ist. Die Zustände I und II sind durch die Bedingungen

$$(Ia) \quad K_D(T_u, g) \geq k_{Dw} \qquad (Ib) \quad T_u \geq T_G$$

bzw.

$$(IIa) \quad K_D(T_G, g) < k_{Dw} \qquad (IIb) \quad T_u < T_G$$

gekennzeichnet. Wir berechnen zunächst T_u . Gilt (Ia), so muß es sich um Zustand I handeln, weil wegen (IIb) die Relation (IIa) sicher nicht gegeben ist (Eine auf T_G gegründete umgekehrte Schlußrichtung ist nicht möglich.). Die Werte der endgültigen Variablen lauten:

$$T = T_u, \quad k_D = k_{Dw}, \quad k_w = 0.$$

Andernfalls ergeben sich über die Bestimmung von T_G :

$$T = T_G, \quad k_D = K_D(T_G, g), \quad k_w = k_{Dw} - K_D(T_G, g).$$

Die Bedingungen (Ib), (IIb) reichen zwar allein für eine eindeutige Zustandsdiagnose aus (69), machen jedoch in jedem Falle die hier relativ aufwendige T_0 -Berechnung erforderlich. Da sich aber jederzeit der größere Teil des Integrationsgebietes im Zustand I befindet, kann durch das geschilderte Verfahren erheblich Rechenaufwand gespart werden.

Wegen der benötigten zeitlich gemittelten Zentralwerte von Θ_f bzw. Θ_a in den Diffusionstermen (s.o.) wird der diagnostische Prozeß einschließlich der e -Prognose zweimal durchlaufen. Aus seinen Ergebnissen folgt über [93] der Druck p . Abschließend bestimmen wir die Geschwindigkeitskomponenten u, w aus den beiden Gleichungen [91]. Diese Reihenfolge ergibt sich im angewendeten $q_{l,m}$ -System als zwingend, da die - nur - in der Impulsbilanzgleichung auftretende Gesamtdichte ρ eine vorherige Erledigung des diagnostischen Prozesses erzwingt.

2.3. Lineare Analyse

Für die Frequenzanalyse linearisierter Konvektionsgleichungen besteht eine mehrfache Motivation. Zunächst geht es um die Wiedergabe der in den Differentialgleichungen enthaltenen skaligen Physik durch verschiedene Differenzenapproximationen. Konkreten Anlaß bot eine bereits geschilderte (Abschn. 2.2.) Form numerischer Instabilität, die an die zeitlich gemittelte Darstellung des linearen Terms in der vertikalen Bewegungsgleichung geknüpft ist. Sie wurde in trockenstabilen Schichten feuchter (Abb. 3) und trockener Experimente beobachtet und durch Prüfung der Gleichungsterme als linear erkannt. Des weiteren kann der Einfluß der Reibung in Differential- und Differenzensystem auf die frequenzmäßig deutlich unterschiedenen Schall- und Schwerewellen untersucht werden. Schließlich ergibt sich über die Berechnung von Eigenfrequenzen bzw. -perioden in einem abgeschlossenen Integrationsgebiet die Möglichkeit, Fluktuationen, die dem großzügigen zeitlichen Gang überlagert sind, physikalisch zu

interpretieren und eventuell Abhilfemaßnahmen (s. z.B. Abschn. 2.6.) zu entwickeln.

Den 2dimensionalen Störungsgleichungen legen wir eine ruhende, trockene Grundatmosphäre zugrunde. Ausgehend von den Gleichungen [23] - [26] gelangen wir - wenn zunächst die Turbulenzterme vernachlässigt und am Schluß nur in Form einer vereinfachten Reibung wieder hinzugefügt werden - über einige Umformungen zu folgendem Gleichungssystem:

$$[101] \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha_0 \frac{\partial p}{\partial x} + K_M \nabla^2 u$$

$$[102] \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha_0 \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\alpha}{\alpha_0} + K_M \nabla^2 w$$

$$[103] \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -w \frac{d\alpha_0}{dz} + \alpha_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$[104] \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{g}{\alpha_0} w - \frac{c_p}{c_v} p_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Nichtindizierte Variable stellen Störgrößen dar; der Index 0 kennzeichnet die Grundatmosphäre, für die eine Mitteltemperatur $T_0 = -10^\circ\text{C}$, und eine stabile Schichtung mit dem Temperaturgradienten $\gamma_0 = -\frac{dT_0}{dz} = 8 \frac{\text{grad}}{\text{km}}$ vorausgesetzt wird.

Der Ansatz

$$[105] \quad \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \alpha \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_A \\ w_A \\ \alpha_A \\ p_A \end{Bmatrix} e^{i(lx + kz + \omega t)}$$

verknüpft die Wellenzahlen $l = 2\pi/\lambda_x$ und $k = 2\pi/\lambda_z$ in x- und z-Richtung mit i.allg. komplexen Kreisfrequenzen $\omega = \omega_r + i\omega_i$; der Index A charakterisiert konstante Amplitudenwerte. Diese Darstellung wandernder durch stehende Wellen ist der Simulation abgeschlossener Integrationsgebiete (Abschn. 2.5.) angepaßt. Einsetzen von [105] in [101] bis [104] führt auf ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Amplituden. Damit nichttriviale Lösungen existieren, muß die Koeffizientendeterminante verschwinden; diese Bedingung liefert die Frequenzgleichung

$$[106] \quad [\omega(\omega - i K_M(l^2 + k^2))]^2 - [\omega(\omega - i K_M(l^2 + k^2))]((l^2 + k^2)c_s^2 + \frac{g}{\alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dz}) + l^2 c_s^2 N^2 = 0.$$

Hierin bedeuten

$$c_s^2 = \frac{c_p}{c_v} p_0 \alpha_0 = \frac{c_p}{c_v} R T_0 \quad \text{und}$$

$$N^2 = \frac{1}{c_s^2} \left(\frac{c_p}{c_v} p_0 \alpha_0 \frac{g}{\alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dz} - g^2 \right) = \frac{g}{T_0} \left(\frac{g}{c_p} - \gamma_0 \right) = \frac{g}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz}$$

die Quadrate der Schallgeschwindigkeit und der Brunt-Väisälä-Frequenz. Der durchgestrichene Term kann im weiteren vernachlässigt werden (s. auch (31, S. 21)), denn eine Maßstabsanalyse liefert:

$$\frac{\frac{g}{\alpha_0} \frac{d\alpha_0}{dz}}{(l^2 + k^2)c_s^2} \sim \frac{\frac{g}{H}}{(2\pi)^2 \left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} \right)} \cong \frac{gH}{\pi^2 c_s^2} \approx 10^{-1} \quad ;$$

der Maximalwert ergibt sich bei unserem Modell nämlich für $\lambda_x = \infty$ und $\lambda_z = 2H$ ($H = 9,33$ km), für die kleinsten Wellenlängen $\lambda_x = \lambda_z = 2\Delta$ folgt ein Wert von $0,5 \cdot 10^{-4}$. Neben den Differentialgleichungen (System I) werden 3 Differenzenschemata vergleichend untersucht: als System II das den numerischen Experimenten zugrundeliegende Gitter (Abb. 1a) mit räumlicher Mittelbildung von α in [102], als System III dasselbe Gitter mit zeitlicher Mittelbildung von α , als System IV das Lilly-Gitter (Abb. 1b) mit räumlicher α -Mittelung.

Die Frequenzgleichungen der Systeme I-IV besitzen die allgemeine Struktur

$$[107] \quad \Omega^2 - P\Omega + Q = 0 \quad ,$$

wobei die Größen Ω, P, Q durch die Vierfachbeziehungen

$$[108] \quad \Omega = \begin{cases} \text{I} & \left(\omega(\omega - i K_M(l^2 + k^2)) \right) \\ \text{II} & \left(\frac{\sin \omega \tau}{\tau} \left(\frac{\sin \omega \tau}{\tau} - i \frac{2K_M}{\mu^2} (\cos \omega \tau - \cos |\mu \cos k \mu|) \right) \right) \\ \text{III} & \left(\frac{\sin \omega \tau}{\tau} \left(\frac{\sin \omega \tau}{\tau} - i \frac{2K_M}{\mu^2} (\cos \omega \tau - \cos |\mu \cos k \mu|) \right) \right) \\ \text{IV} & \left(\frac{\sin \omega \tau}{\tau} \left(\frac{\sin \omega \tau}{\tau} - i \frac{4K_M}{\mu^2} (\cos \omega \tau - \frac{\cos |\mu + \cos k \mu|}{2}) \right) \right) \end{cases}$$

$$[109] \quad P = \begin{cases} \text{I} & (l^2 + k^2) c_s^2 \\ \text{II} & \left(\left(\frac{\sin l\mu}{\mu} \cos k\mu \right)^2 + \left(\frac{\sin k\mu}{\mu} \cos l\mu \right)^2 \right) c_s^2 \\ \text{III} & \left(\left(\frac{\sin l\mu}{\mu} \cos k\mu \right)^2 + \left(\frac{\sin k\mu}{\mu} \cos l\mu \right)^2 \right) c_s^2 - ig \cos l\mu \frac{\sin k\mu}{\mu} (\cos \omega\tau - \cos l\mu \cos k\mu) \\ \text{IV} & \left(\left(\frac{\sin l\mu}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{\sin k\mu}{\mu} \right)^2 \right) c_s^2 \end{cases}$$

$$[110] \quad Q = \begin{cases} \text{I} & l^2 c_s^2 N^2 \\ \text{II} & \left(\frac{\sin l\mu}{\mu} \cos k\mu \right)^2 (\cos l\mu \cos k\mu)^2 c_s^2 N^2 \\ \text{III} & \left(\frac{\sin l\mu}{\mu} \cos k\mu \right)^2 \cos l\mu \cos k\mu \cos \omega\tau c_s^2 N^2 \\ \text{IV} & \left(\frac{\sin l\mu}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\cos l\mu + \cos k\mu}{2} \right)^2 c_s^2 N^2 \end{cases}$$

definiert sind. Die Symbole τ und μ stehen für den einfachen Zeitschritt Δt und die halbe Maschenweite $\Delta/2$ bzw. $\Delta_L/2$. Der Effekt der verschiedenen Gradient- und Mittelbildungsprozeduren, die in den Systemen II - IV zur Anwendung kamen, geht aus [108] - [110] deutlich hervor.

Das Integrationsgebiet habe die Ausdehnung $L = 2B = 28\Delta = 9,33$ km in der Horizontalen und $H = 28\Delta = 9,33$ km in der Vertikalen. Bei Annahme seitlicher Symmetrie zur Zentralachse werden durch die Randbedingungen für w

$$\begin{array}{ll} \text{lateral} & \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0, B \\ \text{vertikal} & w = 0, \quad z = 0, H \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{entsprechend in Differenzen-} \\ \text{formulierung; s. Abschn. 2.5.} \end{array} \right)$$

in den Differenzensystemen II und III die Wellenzahlen

$$l_m = \frac{2\pi}{28\Delta} m, \quad m=0, 1, \dots, 14, \quad \text{und} \quad k_n = \frac{2\pi}{56\Delta} n, \quad n=0, 1, \dots, 28,$$

selektiert und liefern die Eigenfrequenzen; auf diesen Frequenzbereich wollen wir auch die Auswertung des Systems I beschränken. Für System IV kommen wegen $\Delta_L = \sqrt{2}\Delta \approx 1,4\Delta$ die Wellenzahlen

$$l_{m_L} = \frac{2\pi}{20\Delta_L} m_L, \quad m_L=0, 1, \dots, 10, \quad \text{und} \quad k_{n_L} = \frac{2\pi}{40\Delta_L} n_L, \quad n_L=0, 1, \dots, 20,$$

in Frage. Bei gleicher Gebietsauflösung (Punktzahl) liegt also die spektrale numerische Auflösungsgrenze in II und III bei einer Wellenlänge von 2Δ , in IV hingegen bei $2,8\Delta$.

Die beiden Ω -Lösungen der Gleichung [107] erhalten wir für die Systeme I, II, IV über die Formeln

$$[111a] \quad \Omega_1 = \frac{P}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{2}\right)^2 - Q}$$

und

$$[111b] \quad \Omega_2 = \frac{Q}{\Omega_1} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_2 = 0 \quad \text{für} \quad P = Q = 0 \quad .$$

Sie repräsentieren die beiden immanenten physikalischen Phänomene: Schallwellen und Schwerewellen. Aus der Definitionsgleichung [108] für Ω ergibt sich für jedes Ω_r ein Paar von ω -Werten, die in entgegengesetzter Richtung laufenden Wellen entsprechen; bei der Betrachtung von Eigenfrequenzen ist jedoch nur das ω mit positivem Realteil relevant. Die ω -Gleichung wird im Komplexen gelöst, bei II und IV iterativ. Bei System III muß Gleichung [107] in die Iteration einbezogen werden, da hier ω in den Koeffizienten P und Q auftritt.

Vergleichen wir zunächst die Systeme I - IV unter der Voraussetzung $K_M = 0$! Die Lösungen für I können wir sofort hinschreiben. Nach [111] erhalten wir

$$[112a] \quad \Omega_1 = \frac{1}{2} (l^2 + k^2) c_s^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{2} (l^2 + k^2) c_s^2\right]^2 - l^2 N^2 c_s^2}$$

$$[112b] \quad \Omega_2 = \frac{l^2 N^2 c_s^2}{\Omega_1} \quad \text{bzw.} \quad \Omega_2 = 0 \quad \text{für} \quad l = k = 0 \quad .$$

Die angegebenen Schichtungsparameter gewährleisten, daß die Ω_r nicht-negative reelle Zahlen sind, weshalb sich die gesuchten Frequenzen gemäß [108] als positive Wurzeln der Ω_r ergeben. Näherungsweise lautet das Ergebnis

$$[113a] \quad \omega_1 \approx \sqrt{P} = c_s \sqrt{l^2 + k^2} \quad \text{für Schallschwingungen}$$

und

$$[113b] \quad \omega_2 \approx \sqrt{\frac{Q}{P}} = \frac{Nl}{\sqrt{l^2 + k^2}} \quad \text{bzw.} \quad \omega_2 = 0 \quad \text{für} \quad l = k = 0$$

für Schwereschwingungen. [113a] und [113b] stellen die exakten Lösungen für Gleichungssysteme dar, die nur Schallwellen bzw. Schwerewellen beschreiben. Wir können sie aus dem System [101] - [104] herleiten, indem wir im ersten Fall die Terme mit g in [102] und [104] sowie Gleichung [103] ganz entfallen lassen, im zweiten Fall die Geschwindigkeitsdivergenz in [104] über [103] eliminieren und die Kontinuitätsgleichung [103] auf die Inkompressibilitätsbedingung reduzieren. Die [112] entsprechenden Lösungen zeigen im Vergleich mit [113], daß beim gleichzeitigen Auftreten beider Phänomene ($l \neq 0$) die Schallfrequenzen vermindert, die Schwerefrequenzen erhöht sind.

Der Einfluß der Differenzenapproximationen auf die Schallfrequenzen geht aus den [113a] entsprechenden Näherungsformeln für den Realteil

$$[114a] \quad \frac{\sin \omega_r \tau}{\tau} \approx c_s \sqrt{\left(\frac{\sin l \mu}{\mu} \cos k \mu\right)^2 + \left(\frac{\sin k \mu}{\mu} \cos l \mu\right)^2} \quad \text{für die Systeme II und III,}$$

$$[115a] \quad \frac{\sin \omega_r \tau}{\tau} \approx c_s \sqrt{\left(\frac{\sin l \mu_l}{\mu_l}\right)^2 + \left(\frac{\sin k \mu_l}{\mu_l}\right)^2} \quad \text{für System IV}$$

und der auf genauen Lösungen basierenden Tabelle 1 hervor.

Tab. 1

Relative Frequenzverminderung [%] der Schallwellen durch Differenzensysteme

$\lambda_x = \lambda_z$ [Δ]	14	7	4	2,8	2
Systeme II, III	2,8	10,5	32,7	64,1	100
System IV	0,6	3,2	10,1	26,5	—

Gegenüber ω_1 kommt es allgemein zu Frequenzverminderungen (relativ: $(\omega_1 - \omega_r)/\omega_1$), die beim System IV wesentlich niedriger ausfällt als bei den Systemen II und III; für letztere ist - siehe auch Gleichung [114a] - die Struktur $\lambda_x = \lambda_z = 2\Delta$ nicht mehr realisiert. Aus [114a] und [115a] folgt zudem, daß die Relation

$$\frac{\tau c_s}{\mu} = \frac{\tau c_s \sqrt{2}}{\mu_l} = \frac{2\Delta \tau c_s}{\Delta} \leq 1$$

erfüllt sein muß, damit allgemein Lösungen existieren. Diese Bedingung für Δt haben wir als lineares numerisches Stabilitätskriterium erkannt (Abschn. 1.1.), das bei nicht-schallgefilterten Gleichungssystemen im wesentlichen zu beachten ist.

Die entsprechenden Angaben für den Realteil der Schwerfrequenzen liefern die Formeln

$$[114b] \quad \frac{\sin \omega_r \tau}{\tau} \approx \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\sin l \mu}{\mu} \cos k \mu\right)^2 \left(\frac{\sin k \mu}{\mu} \cos l \mu\right)^2}} \begin{cases} \frac{\sin l \mu}{\mu} \cos k \mu \cos l \mu \cos k \mu & \text{System II} \\ \frac{\sin l \mu}{\mu} \cos k \mu \sqrt{\cos l \mu \cos k \mu \cos \omega_r \tau} & \text{System III} \end{cases}$$

$$[115b] \quad \frac{\sin \omega_r \tau}{\tau} \approx \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\sin l \mu_c}{\mu_c}\right)^2 + \left(\frac{\sin k \mu_c}{\mu_c}\right)^2}} \frac{\sin l \mu_c}{\mu_c} \frac{\cos l \mu_c + \cos k \mu_c}{2} \quad \text{System IV}$$

und Tabelle 2. Demnach sind im Fall der Schwereschwingungen, die ja

Tab. 2

Relative Frequenzverminderung [%] der Schwerewellen durch Differenzensysteme

$\lambda_x = \lambda_z [\Delta]$	14	7	4	2,8	2
System II	4,9	18,8	50,0	81,4	100
System III	2,5	9,8	29,3	56,6	100
System IV	4,9	19,1	54,5	100	—

das eigentliche Untersuchungsobjekt darstellen, die Frequenzverminderungen bei den kürzeren Wellenlängen im Lilly-System IV größer als im angewendeten System II; das System III schneidet in dieser Hinsicht am besten ab. Frequenzen mit der Wellenstruktur $\lambda_x = 2\Delta$ oder $\lambda_z = 2\Delta$ in II und III bzw. $\lambda_x = \lambda_z = 2\Delta_L$ in IV treten nicht auf.

Die imaginären Anteile der Kreisfrequenzen verschwinden bei den Differenzensystemen II und IV - wie bei System I - identisch. Es handelt sich also um numerisch neutrale (ungedämpfte) Systeme. Anders

verhält sich das System III. Hier finden wir die Näherungslösungen

$$[116a] \quad \omega_i \approx -\frac{g\tau}{2\mu} \frac{\cos\mu \sin k\mu}{\sin \omega_r \tau} \left(1 - \frac{\cos\mu \cos k\mu}{\cos \omega_r \tau} \right)$$

für Schallwellen und

$$[116b] \quad \omega_i \approx 0$$

für Schwerewellen. Die genauen Lösungen für Schallwellen sind Tab. 3 zu entnehmen. Abgesehen von $\lambda_x=2\Delta$ oder $\lambda_z=\infty$ ($\omega_i=0$) ergeben sich negative Werte (Amplifikation), deren Maxima bis auf den konstanten Wert für $\lambda_z=2\Delta$ zwischen den horizontalen Wellenlängen $2,55\Delta$ und $3,50\Delta$ liegen. Berücksichtigt man, wie in Experiment KONFEU 3, einen turbulenten Reibungskoeffizienten K_M von $100 \text{ m}^2/\text{s}$, so verschieben sich die Maxima zu größeren horizontalen Wellenlängen, zentriert um $\lambda_x=4\Delta$; bei kleinen λ_x und großen λ_z -Werten wird der numerische Effekt der Amplifikation durch den dämpfenden Einfluß von K_M überkompensiert, so daß positive ω_i -Werte resultieren. Die in Abb. 3 erkennbaren Instabilitätsstrukturen lassen sich also durch die lineare Analyse zufriedenstellend erklären: Die zeitlich gemittelte Darstellung des Auftriebsterms in [102] (siehe "g" in [116a]) bzw. der Dichte im linearen Term von [91] oder [24] bewirkt eine selektive numerische Amplifikation vorhandener Schallwellen, die nur durch unvertretbar hohe K_M -Werte vollständig beseitigt werden kann. Sie läßt das System III ungeeignet erscheinen, obwohl es zur Simulation der Schwerewellen am besten konditioniert ist (Tab. 2). In deren Frequenzbereich finden wir durchweg nicht-negative ω_i -Werte (Dämpfung), deren Maximum betragsmäßig allerdings um 3 Zehnerpotenzen kleiner ist als der entsprechende Wert im Schallbereich.

Als nächstes wollen wir den Einfluß der Reibungsglieder in den Gleichungen [101], [102] und ihrer numerischen Näherung auf die identifizierten physikalischen Prozesse untersuchen. Zum Vergleich ziehen wir die Systeme I und II heran. Hierfür sind die Ω -Lösungen, auf die gemäß [101] und [110] K_M keinen Einfluß nimmt, sämtlich nicht-negativ reell. Zum System I können die aus [108] resultierenden ω -Werte

Tab. 3

Imaginärteil der Schalleigenfrequenzen des Differenzensystems III bei $K_M = 0$
 (Jede Zahlengruppe setzt sich zusammen aus der Basis und dem Zehnerexponenten.)

$n, m \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	∞
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56.00
1	-9.31-6	-2.10-5	-3.87-5	-5.72-5	-7.58-5	-9.45-5	-1.13-4	-1.30-4	-1.45-4	-1.56-4	-1.60-4	-1.52-4	-1.27-4	-7.86-5	0	28.00
2	-3.74-5	-5.35-5	-8.53-5	-1.21-4	-1.58-4	-1.95-4	-2.32-4	-2.66-4	-2.96-4	-3.17-4	-3.24-4	-3.08-4	-2.57-4	-1.58-4	0	18.67
3	-8.46-5	-1.03-4	-1.46-4	-1.98-4	-2.53-4	-3.09-4	-3.64-4	-4.15-4	-4.59-4	-4.90-4	-4.98-4	-4.71-4	-3.91-4	-2.39-4	0	14.00
4	-1.52-4	-1.73-4	-2.25-4	-2.92-4	-3.65-4	-4.40-4	-5.14-4	-5.83-4	-6.41-4	-6.79-4	-6.86-4	-6.44-4	-5.31-4	-3.23-4	0	11.20
5	-2.39-4	-2.63-4	-3.25-4	-4.07-4	-4.99-4	-5.95-4	-6.88-4	-7.74-4	-8.45-4	-8.90-4	-8.92-4	-8.30-4	-6.79-4	-4.10-4	0	9.33
6	-3.49-4	-3.76-4	-4.47-4	-5.46-4	-6.60-4	-7.77-4	-8.92-4	-9.96-4	-1.08-3	-1.13-3	-1.12-3	-1.03-3	-8.38-4	-5.02-4	0	8.00
7	-4.83-4	-5.13-4	-5.95-4	-7.13-4	-8.49-4	-9.91-4	-1.13-3	-1.25-3	-1.35-3	-1.39-3	-1.37-3	-1.25-3	-1.01-3	-5.99-4	0	7.00
8	-6.42-4	-6.76-4	-7.70-4	-9.08-4	-1.07-3	-1.24-3	-1.40-3	-1.55-3	-1.65-3	-1.70-3	-1.66-3	-1.50-3	-1.19-3	-7.02-4	0	6.22
9	-8.29-4	-8.67-4	-9.75-4	-1.13-3	-1.33-3	-1.53-3	-1.72-3	-1.88-3	-2.00-3	-2.04-3	-1.97-3	-1.77-3	-1.39-3	-8.12-4	0	5.60
10	-1.05-3	-1.09-3	-1.21-3	-1.40-3	-1.62-3	-1.85-3	-2.08-3	-2.27-3	-2.39-3	-2.42-3	-2.32-3	-2.06-3	-1.61-3	-9.31-4	0	5.09
11	-1.30-3	-1.35-3	-1.48-3	-1.69-3	-1.95-3	-2.22-3	-2.48-3	-2.69-3	-2.83-3	-2.84-3	-2.71-3	-2.39-3	-1.85-3	-1.06-3	0	4.67
12	-1.59-3	-1.64-3	-1.80-3	-2.03-3	-2.33-3	-2.64-3	-2.93-3	-3.17-3	-3.31-3	-3.31-3	-3.14-3	-2.75-3	-2.11-3	-1.20-3	0	4.31
13	-1.92-3	-1.98-3	-2.15-3	-2.42-3	-2.74-3	-3.10-3	-3.43-3	-3.70-3	-3.85-3	-3.84-3	-3.61-3	-3.15-3	-2.40-3	-1.36-3	0	4.00
14	-2.30-3	-2.36-3	-2.55-3	-2.85-3	-3.21-3	-3.61-3	-3.98-3	-4.27-3	-4.43-3	-4.41-3	-4.14-3	-3.59-3	-2.72-3	-1.53-3	0	3.73
15	-2.73-3	-2.80-3	-3.01-3	-3.33-3	-3.73-3	-4.16-3	-4.57-3	-4.89-3	-5.07-3	-5.03-3	-4.71-3	-4.08-3	-3.08-3	-1.72-3	0	3.50
16	-3.22-3	-3.29-3	-3.52-3	-3.87-3	-4.30-3	-4.77-3	-5.21-3	-5.56-3	-5.75-3	-5.70-3	-5.34-3	-4.62-3	-3.49-3	-1.94-3	0	3.29
17	-3.77-3	-3.85-3	-4.09-3	-4.46-3	-4.92-3	-5.42-3	-5.89-3	-6.27-3	-6.47-3	-6.42-3	-6.03-3	-5.22-3	-3.95-3	-2.19-3	0	3.11
18	-4.40-3	-4.48-3	-4.73-3	-5.12-3	-5.60-3	-6.12-3	-6.62-3	-7.01-3	-7.23-3	-7.19-3	-6.78-3	-5.90-3	-4.48-3	-2.49-3	0	2.95
19	-5.10-3	-5.19-3	-5.45-3	-5.85-3	-6.34-3	-6.87-3	-7.38-3	-7.79-3	-8.03-3	-8.00-3	-7.58-3	-6.65-3	-5.08-3	-2.84-3	0	2.80
20	-5.89-3	-5.98-3	-6.24-3	-6.64-3	-7.14-3	-7.67-3	-8.17-3	-8.59-3	-8.85-3	-8.84-3	-8.44-3	-7.48-3	-5.79-3	-3.26-3	0	2.67
21	-6.76-3	-6.85-3	-7.11-3	-7.51-3	-7.99-3	-8.50-3	-9.00-3	-9.42-3	-9.68-3	-9.71-3	-9.35-3	-8.41-3	-6.62-3	-3.78-3	0	2.55
22	-7.72-3	-7.81-3	-8.06-3	-8.44-3	-8.89-3	-9.38-3	-9.85-3	-1.03-2	-1.05-2	-1.06-2	-1.03-2	-9.43-3	-7.61-3	-4.45-3	0	2.43
23	-8.78-3	-8.86-3	-9.09-3	-9.43-3	-9.85-3	-1.03-2	-1.07-2	-1.11-2	-1.14-2	-1.15-2	-1.13-2	-1.05-2	-8.77-3	-5.32-3	0	2.33
24	-9.92-3	-9.99-3	-1.02-2	-1.05-2	-1.08-2	-1.12-2	-1.16-2	-1.19-2	-1.22-2	-1.23-2	-1.22-2	-1.17-2	-1.01-2	-6.51-3	0	2.24
25	-1.11-2	-1.12-2	-1.14-2	-1.16-2	-1.19-2	-1.22-2	-1.25-2	-1.28-2	-1.30-2	-1.31-2	-1.31-2	-1.28-2	-1.16-2	-8.18-3	0	2.15
26	-1.24-2	-1.25-2	-1.26-2	-1.27-2	-1.29-2	-1.32-2	-1.34-2	-1.36-2	-1.37-2	-1.39-2	-1.39-2	-1.38-2	-1.32-2	-1.05-2	0	2.07
27	-1.37-2	-1.38-2	-1.38-2	-1.39-2	-1.40-2	-1.41-2	-1.42-2	-1.43-2	-1.44-2	-1.45-2	-1.46-2	-1.46-2	-1.45-2	-1.34-2	0	2.00
28	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	-1.51-2	0	2.00

$\infty \rightarrow \lambda_{1,2} [\Delta]$

explizit angegeben werden als

$$[117a] \quad \omega = \sqrt{\Omega - \left[\frac{K_M}{2}(l^2+k^2)\right]^2} + i \frac{K_M}{2}(l^2+k^2) \quad \text{bei } \Omega \geq \left[\frac{K_M}{2}(l^2+k^2)\right]^2$$

und

$$[117b] \quad \omega = i \left\{ \frac{K_M}{2}(l^2+k^2) - \sqrt{\left[\frac{K_M}{2}(l^2+k^2)\right]^2 - \Omega} \right\} \quad \text{bei } \Omega < \left[\frac{K_M}{2}(l^2+k^2)\right]^2,$$

wenn man aus dem Lösungspaar jeweils die physikalisch sinnvolle Lösung auswählt. Die zahlenmäßige Berechnung der Eigenfrequenzen des oben angegebenen Integrationsgebietes erfolgte für K_M -Werte von 100 und 300 m^2/s , bei System II mittels Iteration.

Wie aus [117a] zu entnehmen ist, bewirken die Reibungsglieder eine Verminderung der Schwingungsfrequenz, die bis zum Verlust der Schwingungsfähigkeit ([117b]) führen kann. Im Schallbereich ist die [117a] zugrundeliegende Bedingung stets erfüllt. Bei einer Rechengenauigkeit von 3 zählenden Stellen ergab sich kein Unterschied zum reibungsfreien Fall; der wesentliche Effekt geht somit von der Differenzenapproximation (Tab. 1) aus. Der Existenzbereich von Schwerewellen wird dagegen durch Reibung zu kleinen Wellenlängen hin eingeschränkt. In System II addieren sich die Effekte von Differenzenapproximation (Tab. 2) und Reibung. Tabelle 4 enthält die kleinsten Wellenlängen,

Tab. 4

Kleinste auftretende Schwerewellenlängen $\lambda_x; \lambda_z$ [Δ]

K [m^2/s]	0	100	300
System I	2,00; 2,00	2,00; 2,43	2,80; 4,31
System II	2,15; 2,15	2,55; 3,50	3,50; 5,09

die in x- bzw. z-Richtung auftreten können; die Angabe 2Δ bei System I reflektiert lediglich die untere Berechnungsgrenze. Auftretende Strukturen, die jenseits der berechneten Grenzlinie im Wellenraum liegen, besitzen somit stets Schallcharakter.

Die Auswertung des Imaginärteils von ω weist aus, daß Schall- und Schwerewellen im Differenzensystem II gegenüber dem Differentialsystem I eine verminderte Dämpfung erfahren. Gemäß Tab. 5 ist der

Tab. 5

Dämpfung von Schall- bzw. Schwerewellen bei $K=100\text{ m}^2/\text{s}$ und relative Dämpfungsverminderung durch Differenzensystem II

$\lambda_x = \lambda_z [\Delta]$	14	7	4	2,8
$(\omega_i)_I [\text{s}^{-1}]$	$1,81 \cdot 10^{-4}$	$7,25 \cdot 10^{-4}$	$2,22 \cdot 10^{-3}$	$4,53 \cdot 10^{-3}$
$\frac{(\omega_i)_I - (\omega_i)_{II}}{(\omega_i)_I} \text{ Schallwellen} [\%]$	58,0	50,2	35,1	37,1
$\frac{(\omega_i)_I - (\omega_i)_{II}}{(\omega_i)_I} \text{ Schwerewellen} [\%]$	1,7	6,5	18,9	—

Differenzeneffekt bei den Schallwellen wesentlich größer und nimmt mit abnehmender Wellenlänge etwas ab, während er bei den Schwerewellen zunimmt. In Verbindung mit Tab. 3 ist zu erkennen, daß die Absolutwerte in der Größenordnung der numerischen Amplifikation von System III liegen; aber selbst der durch die Zahlen nahegelegte 3fache K_M -Wert läßt diese Amplifikationstendenz in einem ausgedehnten Wellenzahlbereich fortbestehen.

Überblicken wir abschließend die Werte, welche die Eigenfrequenzen des Systems II im Fall $K_M = 0$ annehmen, so ergibt sich für

Schallwellen: $\omega_r \geq 1,09 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ bzw. $T \leq 57,2 \text{ s}$

und für

Schwerewellen: $\omega_r \leq 8,02 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ bzw. $T \geq 785 \text{ s}$,

wobei T die entsprechende Periode bezeichnet. Die angegebenen Extremwerte gehören zu den Konfigurationen $\lambda_x = \infty, \lambda_z = 56\Delta$ bzw. $\lambda_x = 28\Delta, \lambda_z = \infty$. Zwischen Schallwellen und Schwerewellen besteht also eine Frequenzlücke von mehr als einer Zehnerpotenz und damit die Möglichkeit, Schallprozesse gegebenenfalls durch Anwendung von Zeitfiltern zu dämpfen. Die höchste Schallfrequenz liegt bei 0,357 Hz ($\lambda_x = 2\Delta, \lambda_z = \infty$). Da der hörbare Schall sich von 16 bis 20000 Hz erstreckt, handelt es

sich bei den simulierten Phänomenen um sogenannten Infraschall.

Die Linearisierungsvoraussetzungen sind für Schallwellen weit weniger einschneidend als für Schwerewellen, bei deren Ausbildung die vertikale Schichtungsstruktur maßgebenden Einfluß hat. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß in Experimenten auftretende Schallperioden durch Eigenperioden des linearisierten Systems ausgezeichnet approximiert werden. Die zugehörigen Gittereigenfunktionen (Eigenvektoren in Form trigonometrischer Gitterfunktionen) sind in Abschn. 2.5. für die Variable w angegeben. Ein typisches Beispiel stellt die durch nichtgefilterte Anfangsfelder ausgelöste Schallwelle (Abschn. 2.6., Abb. 6) dar, die eine Periode von etwa 56 s aufwies. Sie läßt sich als die zu $\lambda_x = \infty$ und $\lambda_z = 2H$ gehörende Eigenperiode (hier 57,2s) deuten. Kurzperiodische Variationen sind dem zeitlichen Trend an den einzelnen Gitterpunkten in fortgeschrittener Entwicklungsphase auch bei schallgefilterten Anfangsfeldern überlagert. So ergab eine Analyse des Experimentes KONFEU 43 (Abschn. 3.2.) nach Ablauf von 40 min vorherrschende Perioden von 8,8 s und 4,4 s. Sie lassen sich als Eigenperioden von Schallwellen der Struktur $\lambda_x = 9,33\Delta$, $\lambda_z = 18,67\Delta$ ($m = n = 3$, $T = 8,8$ s) bzw. $\lambda_x = 4\Delta$ oder $\lambda_z = 4\Delta$ ($T = 4,3$ s) deuten.

In der Atmosphäre gehen von Konvektionsprozessen Schwere- und Schallwellen aus, die sicher zu dem beobachteten Frequenzspektrum der Luftdruckschwankungen (17) beitragen. Direkte Vergleiche mit der Natur erlaubt das Modell kaum: die künstliche Box-Atmosphäre mit reflektierenden Rändern stellt vielmehr eine Art Resonanzvolumen dar, in dem Eigenschwingungen physikalisch, aber auch numerisch angeregt werden.

2.4. Das K-Problem

Zur Abschließung der Prognosesysteme [89] - [94] für feuchte Konvektion und [23] - [26] für trockene Konvektion ist die Angabe der turbulenten Koeffizienten K_M und K_H erforderlich. Die Aufgabe, K_M und K_H parametrisiert darzustellen, kann nur dann als einigermaßen befriedigend gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt, den Erfordernissen numerischer Stabilität und der Physik subskaliger Prozesse gleichzeitig Rechnung zu tragen. Die Annäherung an dieses Ziel erfolgte in 3 Etappen.

Zuerst wurde $K_M = K_H = K = \text{const}$ gesetzt. Vergleichsläufe mit verschiedenen K-Werten ergaben, daß es für jeden simulierten konvektiven Prozeß einen optimalen Wert K^* gibt. Liegt K wesentlich unter K^* , so tritt numerische Instabilität auf; zu große K-Werte führen zu unrealistischer Glättung. Wenn man den beobachteten Effekt unterschiedlicher Maschenweite Δ hinzunimmt, so lassen sich die Erfahrungen in der Beziehung

$$[118] \quad \frac{\Delta V_{\max}}{K^*} \approx 14$$

zusammenfassen; hierbei bedeutet V_{\max} das absolute Betragsmaximum der Geschwindigkeit, das während eines Experimentes angetroffen wird. Relation [118] besagt, daß die Gitter-Reynolds- bzw.-Péclet-Zahlen stets kleiner als etwa 14 sein müssen. K^* kann als raum-zeitliche Majorante eines potentiellen K-Feldes interpretiert werden. So betrachtet, läßt sich das numerisch bedingte K^* mit den im Konvektionsraum empirisch bestimmten K-Werten (s.u.) in gute Übereinstimmung bringen. Die Anwendung von [118] auf einen von Lilly (42) simulierten Prozeß ergab ein K^* von etwa $100 \text{ m}^2/\text{s}$. Aus den unbefriedigenden Ergebnissen, die er mit K-Werten von 50 und $250 \text{ m}^2/\text{s}$ erhielt, schloß Lilly auf die Untauglichkeit des Ansatzes $K = \text{const}$. Auch die Verwendung des optimalen Wertes K^* weist natürlich entscheidende Schwächen auf. Zum einen setzt [118] die Kenntnis von V_{\max} voraus; dieser Wert ergibt sich aber erst aus einer erfolgreichen Simulation mit der erforderlichen Genauigkeit. Deshalb müßte jedem endgültigen

Experiment ein K^* -Justierungsprozeß vorausgehen. Zum andern bewirkt in einem numerischen Experiment, das sich über den gesamten Lebenszyklus einer Konvektionszelle erstreckt, die zeitliche Majorisierung des turbulenten Diffusionskoeffizienten eine unrealistische Übersteigerung der Turbulenzphänomene während der Anlauf- und Abklingphase.

Nun liefert eine Maßstabsanalyse der prognostischen Gleichungen für Trockenkonvektion, [24] und [25], das Ergebnis, daß Advektions- und Diffusionsterme im Verhältnis $LV/K_{M,H}$ zueinander stehen; L, V stellen eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit dar. In der numerischen Ausdeutung mit $L = \Delta$ besagt dies: Tendenzen zur Entstehung nichtlinearer Instabilität werden durch subskalige Glättungsvorgänge gerade kompensiert, wenn die Gitter-Reynolds- bzw.-Péclet-Zahlen einen kritischen Wert annehmen. Da diese Aussage nur Überschlagungscharakter hat und dem Phänomen nichtlinearer numerischer Instabilität im Detail sicher nicht gerecht werden kann, wurde auf eine punktuelle Anwendung verzichtet. Sie hat sich aber als uneingeschränkt erfolgreich - für trockene und feuchte Konvektion - bei einer zeitabhängigen Darstellung $K_M = K_H = K(t)$ erwiesen. Die verwendete Beziehung lautet:

$$[119] \quad K(t) = 0,075 \Delta |w|_{\max}(t) \quad , \quad K \geq K_0 \quad .$$

Sie basiert auf einer rein räumlichen Auffassung von [118]. Die Ersetzung von $|Q|_{\max}$ durch $|w|_{\max}$ bedeutet wegen der dominierenden Rolle der Vertikalbewegungen i.allg. keine Wertänderung. Nach den Messungen von Byers und Braham (15, S. 43) in Gewittern besteht aber zwischen den Geschwindigkeitsbeträgen konvektiver Vertikalbewegungen und überlagerter Böen eine hochsignifikante Korrelation. In der praktischen Durchführung wird K nach jeweils 2 Integrationsritten entsprechend dem im geraden und ungeraden w -Feld angetroffenen absoluten Betragsmaximum neu festgesetzt. Die Annahme eines Mindestwertes K_0 (i.allg. $10 \text{ m}^2/\text{s}$) soll die Anfangsadaptation der numerischen Felder beschleunigen und mag als Turbulenz nicht-konvektiven Ursprungs

interpretiert werden. Gegenüber einer stabilitätswahrenden Felddarstellung $K(x, z, t)$ erweist sich [119] als räumliche Majorisierung (s. Abschn. 3.2.5. u. Abb. 61).

Die Ansätze $K = \text{const}$ und $K = K(t)$ haben 2 Konsequenzen gemeinsam. 1. Obwohl der turbulente Diffusionskoeffizient von der Definition her den Turbulenzzustand widerspiegeln sollte, nehmen lokales Geschwindigkeitsfeld oder thermische Schichtung darauf keinen Einfluß. Infolgedessen sind alle turbulenten Flüsse linear mit den skaligen Gradienten verknüpft und nehmen beispielsweise bei einer Cb-Zelle im ungesättigten trockenstabilen Bereich gleichmäßigen Absinkens unrealistisch große Werte an. 2. Durch die Prognosegleichungen werden nur die skaligen Energieformen kontrolliert. Sie stehen mit der Turbulenzenergie über die besprochenen Transformationsterme in Verbindung. Bei einer von der Bilanzgleichung für e_T , [82] bzw. [19], unabhängigen Bestimmung von K_M, K_H wird die Turbulenz gleichsam als ein unendliches Energiereservoir betrachtet, dem beliebig viel skalige Energie zugeführt aber auch entnommen werden kann. Die bei entsprechenden Experimenten zur Feuchtkonvektion beobachtete langzeitliche Zunahme der gebietsmittleren skaligen Energie ist auf den Transformationsterm [88] im wolkenfreien Raum zurückzuführen. Ein solcher Vorgang ist aber in einem abgeschlossenen Volumen wegen der positiven Definitheit des molekularen Dissipationstermes $\overline{\tau_m \cdot \nabla \omega}$ in [82] bzw. [19] physikalisch unsinnig.

Der letztere Gesichtspunkt hat uns bewogen, den numerisch orientierten Weg zu verlassen und den abschließenden Versuch einer $K(x, z, t)$ -Darstellung auf die physikalische Basis der Bilanzgleichung für die Turbulenzenergie zu stellen. Daß eine geeignete Ortsabhängigkeit von K_M, K_H auch numerisch Erfolg verspricht, verheißt der beobachtete lokalisierbare Ursprung numerischer Instabilitätsphänomene.

Vor der Herleitung des Verfahrens wollen wir einige wichtige Ergebnisse der empirischen Turbulenzforschung im Bereich konvektiver Wolken zusammenstellen, die zur Rechtfertigung der Methode und zur

Einschätzung der Ergebnisse dienen können. Die Angaben (1, 80, 86, 2, 98) basieren auf Messungen vertikaler und horizontaler Bewegungen des mikroturbulenten Maßstabs (bis zu einigen hundert Metern) und daraus abgeleiteten K-Werten.

1. Räumliche Struktur. Während der konvektiven Entwicklung ist die gesamte Wolke von Turbulenz erfüllt. Die Intensität hat ihr Maximum im Achsenbereich zwischen Zentrum und Gipfel, etwa im Gebiet maximalen Flüssigwassergehalts; zur Peripherie hin nimmt sie rasch ab. Die turbulente Zone kann sich jedoch beträchtlich in den wolkenfreien Bereich hinein erstrecken.

2. Zeitliche Entwicklung. Die Intensität der Turbulenz entwickelt sich i.allg. parallel zu den konvektiven Prozessen. Sie erreicht ihren Höhepunkt im Reifestadium und fällt während der Zerfallsphase rasch ab; dabei wird zuweilen eine den Lebenszyklus der Konvektionswolke überschreitende Andauer der Turbulenz beobachtet. Kurzzeitige Schwankungen treten nur am Anfang der Wachstumsphase auf. In der weiteren stetigen Entwicklung können turbulenzbedingende Prozesse im Zeitmaßstab einer Minute als quasistationär angesehen werden.

3. Statistische Struktur. Vertikale und horizontale Turbulenzbewegungen sind in Amplitude und Maßstab nahezu gleich (isotrope Turbulenz). Charakteristische Abweichungen vom $5/3$ -Gesetz der spektralen Energieverteilung, das für einen erzeugungsfreien Trägheitsbereich gilt, deuten darauf hin, daß feuchtlabile Schichtung im Innern der Wolke als Quelle und trockenstabile Schichtung außerhalb als Senke von Turbulenzenergie in Betracht gezogen werden muß.

4. K-Werte. Die mittleren K-Werte in einem ausgebildeten Cumulonimbus liegen bei $200-300 \text{ m}^2/\text{s}$; die Maxima können $500 \text{ m}^2/\text{s}$ übersteigen. Im wolkenfreien Randbereich werden Werte um $100 \text{ m}^2/\text{s}$ angetroffen. Das Verhältnis der konvektiven zu den turbulenten Vertikalflüssen wurde zu 5-10 abgeschätzt.

Wenden wir uns jetzt der Bilanzgleichung für die Turbulenzenergie zu! Die Gleichungen [82] bzw. [19] fassen wir in der allgemeinen Form

$$[120] \quad \frac{\partial e_T}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega g e_T) = g \frac{de_T}{dt} = -\nabla \cdot f_T + Q_M + Q_H - D$$

zusammen. In e_T ist die kinetische Energie aller Bewegungen enthalten, deren Wellenzahl zwischen dem Abschneidewert π/Δ und Unendlich liegt. Obwohl die skaligen Gleichungen 2dimensionale Phänomene beschreiben, wollen wir uns die turbulenten Bewegungen 3dimensional vorstellen. Das ist nicht nur realistisch sondern gestattet es auch, im Spezialfall der stationären isotropen homogenen Turbulenz in neutral geschichtetem Medium auf Ergebnisse der 3dimensionalen Theorie des Trägheitsbereichs (s. z.B. (45, 40)) zurückzugreifen. Im Gegensatz zur Isotropie, die phänomenologisch verbürgt erscheint, werden Stationarität, Homogenität und neutrale Schichtung jedoch nicht von vornherein vorausgesetzt. Die materielle Ableitung auf der linken Seite von [120], die wegen der Kontinuitätsgleichung [64] bzw. [10] auch als mit g multiplizierte individuelle Ableitung geschrieben werden kann, repräsentiert diejenige Änderung in e_T , die ein sich bewegendes flüssiges Volumenelement, das stets aus dem gleichen Verband materieller Teilchen besteht, im Zeitelement erfährt. Sie wird bewerkstelligt durch die Konvergenz eines Fremdfusses f_T und die Wirksamkeit lokaler Quellen Q_M, Q_H, D .

Der Fremdfuß

$$[121] \quad f_T = \overline{\omega'' g \frac{\omega''^2}{2}} + \frac{1}{g} \overline{\omega'' g p'} - \overline{T_M \cdot \omega''}$$

setzt sich zusammen aus dem turbulenten Fluß turbulenter Energie sowie den Flüssen der Oberflächenspannungen infolge turbulenter Druckfluktuationen und molekularer Reibung.

Die Quelle Q_M betrifft die Umwandlungsrate der kinetischen Energie skaliger Bewegungen in Turbulenzenergie. Diese Größe ist sowohl für den allgemeinen Ansatz [20a],

$$[122a] \quad Q_M = g K_M \frac{|Q|}{2} \quad ,$$

als auch für die im Modell angewendete verkürzte Form [20b],

$$[122b] \quad Q_M = \varrho K_M |\nabla \omega|^2 \quad ,$$

positiv definit. Der spektrale Energienachschub ist dabei im 2dimensionalen Konvektionsmodell nicht ganz unproblematisch. Man könnte vermuten (46), daß hinsichtlich der nichtlinearen Wechselwirkungen die 2dimensionale Turbulenztheorie Kraichnans (34) anzuwenden sei. Hiernach existiert oberhalb der energieerzeugenden Wellenzahlen ein Trägheitsbereich, in dem zwar Enstrophie ($\frac{1}{2}\xi^2$, ξ Vorticity), aber keine Energie zu höheren Wellenzahlen transferiert wird. Wenn jedoch eine der Raumdimensionen die Vertikale ist, stellt die Enstrophie wegen des Auftriebstermes keine Erhaltungsgröße dar (96). Infolgedessen verläuft die Energiekaskade, wie Daley und Merilees (19) in ihrem 2dimensionalen spektralen Modell flacher Trockenkonvektion beobachteten, im wesentlichen über die potentielle Form.

Die Quelle

$$[123] \quad Q_H = \varrho K_H \times \begin{cases} \nabla(c_p \theta) \cdot \nabla \frac{T}{\theta} & \text{(trocken bzw. ungesättigt feucht)} \\ \nabla(c_{pa} \theta_a) \cdot \nabla \frac{T}{\theta_a} & \text{(gesättigt feucht)} \end{cases}$$

beinhaltet Transformationen, die zwischen innerer Energie (Wärme) und Turbulenzenergie vor sich gehen. Ihre Richtung ist nicht festgelegt. Die Beziehungen [88] zeigen vielmehr, daß im wesentlichen labile Vertikalschichtungen als Quelle, stabile aber als Senke turbulenter Energie anzusprechen sind. Eine Parametrisierung des turbulenten Wärmeflusses, in der dieses vernünftige Resultat auch im Wolkenraum zum Ausdruck kommt ([87]), stellt für das weitere Vorgehen eine wichtige Voraussetzung dar.

Der letzte Term,

$$[124] \quad D = \overline{\tau_M \cdot \nabla \omega} \quad ,$$

repräsentiert diejenige Energiemenge, die am kurzwelligen Ende der turbulenten Energiekaskade pro Volumen- und Zeiteinheit durch molekulare Reibung in Wärme umgewandelt wird. D ist eine positiv definite Größe. Gemäß den für die Prognosegleichungen gemachten Voraussetzungen wird eine solche Umwandlung nur im subskaligen Bereich berücksichtigt und die entstandene Wärme dem skaligen System nicht wieder zugeführt.

Die in den Beziehungen [120] - [124] auftretenden Größen sind ihrer Bedeutung im trockenen und feuchten Modell entsprechend zu interpretieren. Die Gleichung [120] enthält einerseits die prognostische Variable e_T und skalige Variablen, andererseits die Größen f_T, K_M, K_H, D , die durch geeignete Parametrisierung an erstere angeschlossen werden müssen. Gelingt die Lösung dieser Aufgabe, so sind die gesuchten Koeffizienten K_M, K_H über die prognostische Gleichung [120] berechenbar. Im Hinblick auf den formalen Charakter der Parametrisierungsansätze und die Unkenntnis des Anfangsfeldes von e_T wollen wir uns jedoch auf stationäre Lösungen von [120] beschränken.

Zuerst betrachten wir den Fall des lokalen Energiegleichgewichts:

$$[125] \quad \frac{\partial \rho e_T}{\partial t} + \nabla \cdot \{ \rho g e_T + f_T \} = Q_M + Q_H - D = 0$$

Deutet man [125] als Approximation, so sind die Quellterme groß gegenüber den Termen auf der linken Seite, heben sich aber etwa auf; nach der exakten Auffassung liegt stationäre homogene Turbulenz vor. Legt man als charakteristische Länge den Gitterabstand Δ zugrunde, so ergibt sich aus Dimensionsgründen für D der Ansatz:

$$[126] \quad \frac{D}{\rho} = \epsilon = k_1 \frac{e_T^{3/2}}{\Delta}$$

Die Dissipationsrate pro Masseneinheit, ϵ , ist also der 3. Potenz der charakteristischen turbulenten Geschwindigkeit ($\sqrt{2e_T}$) und der Abschneidewellenzahl proportional. Nimmt man einmal an, daß letztere im Trägheitsbereich ($\epsilon = \text{const}$) liegt, so ergibt sich über das Kolmogoroff-Spektrum für k_1 ein Wert in der Nähe von 1 (45). Ein ent-

sprechender Ansatz für K_M lautet:

$$[127] \quad K_M = k_2 e_T^{\frac{1}{3}} \Delta \quad .$$

Durch Elimination von e_T finden wir aus [126] und [127] die endgültige Beziehung

$$[128] \quad D = \varepsilon g = a g \frac{K_M^3}{\Delta^4} = g \frac{K_M^3}{(k\Delta)^4} \quad , \quad a = \frac{k_1}{k_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} \quad .$$

Aus [126] und [128] folgen die Proportionalitäten

$$e_T \Delta \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} \Delta^{\frac{5}{3}} \quad \text{und} \\ K_M \sim \varepsilon^{\frac{1}{3}} \Delta^{\frac{4}{3}} \quad ,$$

die bei Voraussetzung eines Trägheitsbereiches die Form des Kolmogoroff'schen Energiespektrums und der Richardson'schen Beziehung ergeben. Sie dienen hier nur zur Rechtfertigung der Ansätze [126] und [127].

Aus [125] ergibt sich mit [128] für K_M die Formel

$$[129] \quad K_M = (k\Delta)^2 \sqrt{q_M} \sqrt{1 - \frac{K_M}{k\Delta} Ri} \quad .$$

Hierbei ist von folgenden Definitionen Gebrauch gemacht worden:

$$Q_M = g K_M q_M \quad , \quad Q_H = g K_H q_H \quad , \quad Ri = -\frac{q_H}{q_M} \quad (\text{Richardson-Zahl}).$$

Wenn für Ri Null und für Q_M der Ausdruck [122a] gesetzt wird, läßt sich für die Konstante k , die in Analogie zur Kármán-Konstante der Grenzschichttheorie steht, ein mit der Existenz des Kolmogoroff-Spektrums konsistenter Wert bestimmen (45). Wir setzen $k = 0,5$, wie es Lilly in der Mehrzahl seiner Konvektionsexperimente tat (42), und erhalten damit $a = 16$ und, mit $k_1 = 1$, $k_2 = 0,4$.

Smagorinsky (85) schlug den Ansatz [129] für die Behandlung der horizontalen Diffusion in einem Modell zur allgemeinen Zirkulation vor; hierbei ist die thermische Komponente irrelevant ($Ri = 0$). Bei konvektiven Prozessen dagegen liegen q_H und q_M in der gleichen Größenordnung. Die Berücksichtigung des thermischen Gliedes setzt allerdings die Bestimmung des Verhältnisses K_H/K_M voraus. Setzt man mangels guter Kenntnisse $K_H/K_M = 1$ (42), so muß man wegen $Rf = Ri K_H/K_M \cong 1$ (Rf Flußform der Richardson-Zahl) K_M, K_H im größten Teil des Integrationsgebietes verschwinden lassen. Werte kleiner (größer) als Eins im stabilen (labilen) Bereich wären jedoch zumindest plausibel, wenn man an Schwingungen mit beschränkter Massenummischung (thermisch selektierte Bewegungen) turbulenter Luftkörper denkt. Im Anschluß an Überlegungen von Ellison (27) zur beheizten Grenzschicht wurden praktische Versuche mit dem Ansatz

$$[130] \quad \frac{K_H}{K_M} = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(4,25 Ri)$$

durchgeführt. Diese Beziehung liefert mit

$$\begin{array}{ll} \frac{K_H}{K_M} = 1 & \text{für } Ri = 0 \\ Rf \rightarrow 0,15 & \text{für } Ri \rightarrow +\infty \\ \frac{K_H}{K_M} \rightarrow 2 \quad (\text{Ellison: } 1,6) & \text{für } Ri \rightarrow -\infty \end{array}$$

die von Ellison postulierten Grenzwerte. Mittels [130] wird zwar das Problem $Rf > 1$ umgangen; die Experimentergebnisse waren aber keineswegs zufriedenstellend. Die Felder für K_M und - mit vergrößerter Amplitude - K_H weisen zwischen extrem hohen Werten im Wolkeninnern und nahezu verschwindenden jenseits des Wolkenrandes ungeheure Gradienten auf. Eine solche Struktur kann weder numerisch vom Modell verkraftet werden (numerische Fehlstrukturen, Bilanzfehler), noch erscheint es meteorologisch realistisch, daß der Wolkenrand die Eigenschaft einer Austauschperrfläche hat.

Ein möglicher Weg aus diesem Dilemma führt über die Berücksichtigung von Energieflüssen, wobei wir uns auf den turbulenten Anteil beschränken wollen. Damit wird anstelle eines lokalen ([125]) ein globales Energiegleichgewicht in der Form

$$[131] \quad \frac{\partial \varrho e_T}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho g e_T) = - \nabla \cdot f_T + Q_M + Q_H - D = 0$$

angenommen. Der Turbulenzzustand eines Volumenelements wird also bestimmt durch lokale Quellen und die Divergenz nicht-materieller Energieflüsse, die aber wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit des Integrationsgebietes dessen Rand nicht durchsetzen. Folglich heben sich die lokalen Quellen im Gebietsmittel ("global") auf:

$$[132] \quad \int_V (Q_M + Q_H - D) d\tau = 0 \quad .$$

Da die Quellen gemäß [122], [123] und [128] von K_M bzw. K_H abhängen, werden sie mit den über [131] berechneten Feldern andere Intensitäten als bei Zugrundelegung von [125] aufweisen.

Für die Auswertung von [131] wird

$$K_M = K_H = K$$

unterstellt. Die intuitive Vorstellung, daß sich die Turbulenz im Mittel gradientabwärts ausbreiten muß, führt auf den Ansatz (s. auch (45))

$$[133] \quad f_T = -k_3 \varrho K \nabla e_T \quad .$$

Wegen der unklaren Physik dieses Vorgangs wird die Konstante k_3 mitgeführt, für die numerische Experimente einen geeigneten Wert liefern sollen. Durch Einsetzen von e_T aus [127] gewinnt [133] die Form

$$[133a] \quad f_T = -\frac{b}{\Delta^2} \varrho K \nabla K^2 \quad , \quad b = \frac{k_3}{k_2^2} \quad .$$

Vernachlässigt man bei der Divergenzbildung von [133a] die Ortsabhängigkeit der Dichte, so ergibt sich für K die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}
 [134] \quad \nabla^2 K^3 - \frac{3a}{2b\Delta^2} K^3 + \frac{3\Delta^2}{2b} q K &= 0 && \text{im Innern} \\
 \frac{\partial K}{\partial n} &= 0 && \text{auf dem Rand,}
 \end{aligned}$$

wobei $q_M + q_H = q$ gesetzt wurde. Gleichung [134] wird numerisch für das o-Feld (s. Abb. 1a) mittels Liebmann-Relaxation gelöst. Der Differenzenstern besteht aus dem Zentralpunkt (Index o) und seinen um die Maschenweite Δ kartesisch versetzten Nachbarpunkten, die, von der positiven x-Richtung ausgehend, entgegen dem Uhrzeigersinn von 1 bis 4 durchnummeriert sind.

Die Berechnung von q basiert im Prinzip auf der Gitterformel [98b] für Q_M bzw. Q_H . Zur Isolierung von q und K wurde mit q_o erweitert und für K räumliche Konstanz innerhalb des den Zentralwert umgebenden Elementarquadrats vorausgesetzt. Mit den Bezeichnungen

$$C_1 = \frac{3\Delta^4}{2b} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{3a}{2b}$$

lautet die Residuengleichung:

$$[135] \quad K_1^3 + K_2^3 + K_3^3 + K_4^3 - (4 + C_2) K_o^{*3} + C_1 q_o K_o^* = R_o \quad ;$$

K_o^* stellt den Zentralwert der vorangegangenen Iteration dar. In die Relaxationsgleichung der Form

$$\begin{aligned}
 [136] \quad (\delta_1 K_1^3 + \delta_2 K_2^3 + \delta_3 K_3^3 + \delta_4 K_4^3 + (\alpha - 1) R_o) - (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + C_2) K_o^3 \\
 + C_1 q_o K_o = 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

mit $\delta_r = 1(0)$ für Punkte innerhalb (außerhalb) des Integrationsgebietes, sind die Randbedingungen bereits eingearbeitet worden. Zur Beschleunigung der Konvergenz wurde der Relaxationskoeffizient α bei

den ersten 50 Iterationen nach einer Formel von Frankel (95, S. 97) gleich 1,7 (Überrelaxation), bei den anschließenden 50 Iterationen gleich 1 (normale Relaxation) gesetzt. Die kubische Bestimmungsgleichung [136] für K_0 muß exakt gelöst werden; eine approximative Behandlung des dritten Gliedes mit $K_0 = K_0^*$ führte nicht zum Erfolg. Sie läßt sich leicht auf die Normalform

$$[137] \quad y^3 + 3ry + 2s = 0$$

bringen. Nach der Lösungstheorie der kubischen Gleichungen hängt die Anzahl der reellen Lösungen vom Vorzeichen der Diskriminante

$$[138] \quad d = s^2 + r^3$$

ab. Da der Fall $d > 0$ (1 reelle, 2 komplexe Wurzeln) allgemein gegeben ist, kann die Cardani'sche Formel

$$[139] \quad y_1 = u + v ; \quad u = \sqrt[3]{-s + \sqrt{d}} \quad , \quad v = \sqrt[3]{-s - \sqrt{d}}$$

zur Bestimmung der einen reellen Wurzel angewendet werden. Da sowohl K wie $-K$ eine Lösung von [134] darstellen, muß durch konsequentes Nullsetzen negativer Werte während der Iteration die gewünschte nicht-negative Lösung erzwungen werden. Als Anfangsvermutung wurde bei $q > 0$ der lokale Gleichgewichtswert $K = (k\Delta)^2 \sqrt{q}$ und bei $q \leq 0$ $K = 0$ gesetzt.

Das geschilderte Verfahren, $K(x, z, t)$ nach physikalischen Gesichtspunkten zu bestimmen, wurde in 2 Experimenten zur Feuchtkonvektion (KONFEU 44 und 45) erfolgreich angewendet. Der Quasistationarität des Prozesses (s.o.) und dem numerischen Aufwand des Lösungsvorgangs Rechnung tragend, haben wir dabei das K -Feld nur alle 50 Zeitschritte (20 s) neu bestimmt. Die K -Werte an den für turbulente Flüsse zuständigen Hilfspunkten (Vollkreise in Abb. 1a) ergeben sich aus den Originaldaten, indem zunächst die x -Werte als arithmetische Mittel der umgebenden o -Werte berechnet werden und anschließend diagonal interpoliert wird.

Zur Gewinnung numerisch geeigneter, hinreichend geglätteter Felder, die aber auch (s. Abschn. 3.2.2.) den angegebenen phänomenologischen Aspekten gerecht werden, muß der Konstanten b in [133a] ein relativ hoher Wert zugeteilt werden. Damit wird die Vernachlässigung des skaligen Flusses w_{ge} nachträglich gerechtfertigt. Aus dem praktisch benutzten $b = 160$ ergibt sich k_3 in [133] zu rund 25. Ob und wie die in Anspruch genommene erhöhte Diffusionsgeschwindigkeit turbulenter Energie physikalisch zu erklären ist, bleibt vorläufig offen. Eine Möglichkeit bestünde darin, einen Teil des Flusses f_T als Schallenergiefluß (s. z.B. (105, S. 302)) aufzufassen und dafür im Ansatz [133] einen Diffusionskoeffizienten der Größenordnung $c_s \Delta$ zu veranschlagen.

2.5. Randbedingungen

Das Integrationsgebiet wird bei allen Experimenten als abgeschlossen vorausgesetzt, d.h. weder materielle noch diffusive Flüsse sollen den Rand überschreiten. Anschaulich gesprochen, ist das betrachtete Luftvolumen in starre, glatte, wärme- und feuchteisolierende Wände eingeschlossen. Ein solches System ist zwar meteorologisch nur beschränkt realistisch, läßt sich aber physikalisch sauber definieren und numerisch kontrollieren. Die Randbedingungen werden für das 2dimensionale ebene Modell formuliert, das sich in x von 0 bis L , in z von 0 bis H erstrecken möge. Die kinematische Randbedingung lautet hierfür:

$$[140a] \quad u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, L \quad ,$$

$$[140b] \quad w = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, H \quad .$$

Wegen der vorausgesetzten Glattheit verschwindet die Normalkomponente des Tangentialimpulsflusses:

$$[141a] \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, L \quad ,$$

$$[141b] \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, H \quad .$$

Mit [140] und [141] folgt aus der Inkompressibilitätsbedingung, auf die in diesem Zusammenhang die Kontinuitätsgleichung [89] bzw. [23] reduziert werden kann, die Bedingung

$$[142a] \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{für } x = 0, L \quad ,$$

$$[142b] \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{für } z = 0, H \quad ,$$

die näherungsweise besagt, daß die Normalableitung der Normalkomponente des Normalimpulsflusses auf dem Rand verschwindet. Vernachlässigt man in der Impulsbilanzgleichung [91] bzw. [24] die Ortsabhängigkeit von ρK_M , so ergeben sich unter Berücksichtigung von [140] und [142]

$$[143a] \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{für } x = 0, L$$

als seitliche und

$$[143b] \quad \frac{\partial p}{\partial z} + g\varrho = 0 \quad \text{für } z = 0, H \quad ,$$

die statische Grundgleichung, als vertikale Randbedingung für den Druck. Aus der weiteren Bedingung, daß auch der normale Wärme- und Feuchtefluß verschwinden soll,

$$[144a] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ (trocken bzw. ungesättigt)} \\ \frac{\partial \theta_g}{\partial x} = 0 \text{ (gesättigt)} \end{array} \right\} \text{ für } x = 0, L \quad ,$$

$$[145a] \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial k_D}{\partial x} = 0 \text{ (ungesättigt)} \\ \frac{\partial k_{Dw}}{\partial x} = 0 \text{ (gesättigt)} \end{array} \right\} \text{ für } x = 0, L \quad ,$$

kann man mit [143a] für den seitlichen Rand schließen, daß die Normalableitungen sämtlicher thermodynamischer Größen Null sind. Die Bedingungen [140a] - [145a] drücken Spiegelungssymmetrie zu den

seitlichen Rändern aus: eine Störung, deren Zentrum auf dem Rand liegt, verhält sich so, als ob sie von ihrem Spiegelbild jenseits des Randes begleitet würde. Bei Experimenten mit idealisierten Störungen, deren Anfangszustand im horizontalen Mittel weder Horizontalströmung noch -gradienten aufweist, kann die Berechnung somit auf das halbe System beschränkt werden, wobei beispielsweise der rechte Rand, $x = B = L/2$, die Symmetrieachse der Anfangsstörung repräsentiert.

In vertikaler Hinsicht ist wegen der durch [143b] ausgedrückten Druckänderung nicht von vornherein klar, welcher Zweig in [92] maßgebend ist. Es kann aber analog [83] leicht gezeigt werden, daß die über [95] und [96] verallgemeinerte Formulierung des turbulenten Wärmeflusses im nicht vollständig gesättigten Fall in guter Näherung auch den gesättigten Bereich abdeckt. Dementsprechend verlangen wir das separate Verschwinden der fühlbaren und latenten Komponente und erhalten:

$$[144b] \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0 \quad (\text{trocken und feucht}) \quad \text{für} \quad z = 0, H \quad ,$$

$$[145b] \quad \frac{\partial k_{DW}}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial k_D}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0, H \quad .$$

Die numerische Auswertung der Randbedingungen [141] - [145] liefert Variablenwerte für die Hilfspunkte (gestrichelte Hohlkreise in Abb.1a) außerhalb des Integrationsgebietes; dadurch können die Randpunktwerte des x -Systems routinemäßig berechnet werden. Eine Ausnahme ergibt sich lediglich für die rand-normale Geschwindigkeitskomponente, die gemäß [140] Null gesetzt wird. Ihre zur Bestimmung skaliger Flüsse benötigten Außenwerte sind wegen [142] und [140] gleich den negativen Innenwerten. Erwähnenswert erscheint noch die vertikale Extrapolation der thermodynamischen Variablen. Gleichung [143b] wird mithilfe der z -Randpunktwerte des Vorzeitpunktes vorab ausgewertet. Anhand der extrapolierten Werte von $c_p \Theta$, k_{DW} und k_D lassen sich dann alle übrigen Größen bestimmen. Bei dem so definierten Außenzustand bleibt die thermodynamische Gleichgewichtsbedingung [94] unberücksichtigt.

Außerdem besteht keine numerische Konsistenz hinsichtlich des räumlich gemittelten ϱ in [91] bzw. [24]. Der Unterschied zu einer konsistenten - impliziten - Behandlung ist jedoch, wie auch vergleichende Experimente zur Trockenkonvektion zeigen, unerheblich, da die diesbezüglich kritische Vertikalkomponente von [91] bzw. [24] durch [140b] ersetzt wird.

An die Randbedingungen [141a] und [140b], [142b] wollen wir diagnostisch eine spektrale Darstellung des w-Feldes anschließen, die Auskunft über den Zirkulationsmaßstab und seine Abhängigkeit von Prozeßphase, K-Ansatz und Modellabmessungen, über die spektrale Energieverteilung u.a.m. geben kann. Die Gitterpunkte des x-Systems liegen auf den Positionen $x_i = i\Delta$ und $z_j = j\Delta$, wobei der Index i von 0 bis $I = B/\Delta$, der Index j von 0 bis $J = H/\Delta$ läuft. Es kann leicht gezeigt werden, daß für die trigonometrischen Gitterfunktionen

$$[146a] \quad C_{mi} = \sqrt{\frac{2}{I}} g_m q_i \cos m\pi \frac{i}{I}$$

$$g_m = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{für } \begin{cases} m=0 \text{ oder } m=I \\ m \neq 0 \text{ und } m \neq I \end{cases} \\ 1 & \end{cases}$$

$$q_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{für } \begin{cases} i=0 \text{ oder } i=I \\ i \neq 0 \text{ und } i \neq I \end{cases} \\ 1 & \end{cases},$$

$$[146b] \quad S_{nj} = \sqrt{\frac{2}{J}} \sin n\pi \frac{j}{J}$$

die Orthogonalitätsrelationen

$$[147a] \quad \sum_{i=0}^I C_{mi} C_{\mu i} = \delta_{m\mu}$$

$$[147b] \quad \sum_{j=1}^{J-1} S_{nj} S_{rj} = \delta_{nr}$$

gelten. Die Entwicklung des numerischen w-Feldes nach den 2dimensionalen Gitterfunktionen $C_{mi} S_{nj}$ lautet:

$$[148] \quad W_{ij} = \sum_{m=0}^I \sum_{n=1}^{J-1} a_{mn} C_{mi} S_{nj}$$

Die Zahl der unbekanntenen Koeffizienten stimmt offensichtlich mit der Zahl der relevanten Gitterpunkte (Gleichungen vom Typ [148]) überein; die a_{mn} erhält man in praxi aus der Umkehrformel

$$[149] \quad a_{mn} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{J-1} W_{ij} C_{mi} S_{nj} \quad .$$

Mithilfe der Norm

$$[150] \quad \|W\| = \sqrt{\sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{J-1} W_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{m=0}^I \sum_{n=1}^{J-1} a_{mn}^2}$$

definieren wir normierte Spektralkomponenten

$$[151] \quad \alpha_{mn} = \frac{a_{mn}}{\|W\|} \quad ;$$

für sie gilt

$$[152] \quad \sum_{m=0}^I \sum_{n=1}^{J-1} \alpha_{mn}^2 = 1 \quad .$$

Die α_{mn}^2 können angenähert als relativer Beitrag der einzelnen Spektralkomponenten zur kinetischen Energie der Vertikalbewegung interpretiert werden. Durch Summierung über n bzw. m ergibt sich das horizontale bzw. vertikale Energiespektrum:

$$[153a] \quad \alpha_m^2 = \sum_{n=1}^{J-1} \alpha_{mn}^2 \quad ,$$

$$[153b] \quad \alpha_n^2 = \sum_{m=0}^I \alpha_{mn}^2 \quad .$$

Bei einer vergleichenden Darstellung des horizontalen Energiespektrums (Abb. 60) für Modelle unterschiedlicher Horizontalausdehnung (KONFEU 43/44: $B = H/2$, KONFEU 45: $B = H$) muß man sich auf absolute Wellenzahlen und gleiches Wellenzahlintervall beziehen. Mit $l_0 = \pi/H$, der Wellenzahl der längsten darstellbaren Welle (KONFEU 45), und dem größeren Wellenzahlintervall $\Delta l = 2\pi/H$ (KONFEU 43/44) bestehen zwischen der normierten absoluten Wellenzahl l/l_0 und m sowie dem reduzierten spektralen Energiebeitrag $S(l/l_0)$ und α_m^2 folgende Beziehungen:

$$[154] \quad \frac{l}{l_0} = \begin{cases} 2m \\ m \end{cases} \quad S\left(\frac{l}{l_0}\right) = \begin{cases} \alpha_m^2(1/l_0) \\ 2\alpha_m^2(1/l_0) \end{cases} \quad \text{für } \begin{cases} B = H/2 \\ B = H \end{cases} \quad .$$

2.6. Anfangsbedingungen

Im Verlauf der Modellentwicklung wurden folgende Vorgänge numerisch simuliert:

1. aufsteigender Warmluftkörper in neutral geschichteter trockener Atmosphäre;
2. konvektive Umschichtung einer trockenlabilen Atmosphäre;
3. konvektive Umschichtung einer Atmosphäre mit feuchtlabiler Schicht.

Entsprechend dem Ziel und Ergebnisinhalt (Abschn. 3.) dieser Arbeit wollen wir uns auf den letzten Punkt beschränken und den Aufbau der Anfangsatmosphäre für die Experimente KONFEU 43, 44, 45 darlegen. Zum besseren Verständnis sei vermerkt, daß bei Verwendung des $g_{L,m}$ -Systems die Gleichungen [40], [52] und [55] bzw. deren gemittelte Version die Form

$$[155] \quad \varrho = \varrho_L + \varrho_D + \varrho_w = \varrho_L (1 + m_D + m_w) \quad ,$$

$$[156] \quad p = p_L + p_D = \varrho_L (R_L + m_D R_D) T \quad \text{und}$$

$$[157] \quad \Theta_f = T \left(\frac{p_n}{p} \right)^{\frac{R_L + m_D R_D}{C_{pL} + m_D C_{pD}}}$$

annehmen.

Grundsätzlich besteht die theoretisch konzipierte Anfangsatmosphäre aus einem Grundzustand, der nur von z abhängig ist und den Vorrat an verfügbarer kinetischer Energie (K_V ; s. Abschn. 3.1.) beinhaltet, aus dem der konvektive Prozeß schöpft - und einer Störung, die zur Auslösung des Vorgangs dient. Der Grundzustand befindet sich im - numerisch formulierten - hydrostatischen Gleichgewicht. Die Störung besteht in einem Temperaturüberschuß, dessen energetischer Einfluß relativ gering ist (s. Abschn. 3.2.4.). Sie wird dem Grundzustand derart überlagert, daß dessen Druck erhalten bleibt. Das führt gemäß [156] bei festgehaltenem m_D zu einem Dichtedefizit der trockenen

Luft. Blicke die Dichte ρ_L unverändert, so käme es über den Drucküberschuß zu einem Explosionsvorgang. Das angegebene, bei schallgefilterten Systemen übliche Verfahren ist bei Benutzung der ursprünglichen Gleichungen nicht zufriedenstellend: der Anfangsatmosphäre sind Schallvorgänge immanent. Zu deren Filterung werden deshalb die gewonnenen Felder noch einem geeigneten Balancierungsprozeß unterworfen.

Konkrete Zahlenangaben sind in Abb. 4 schematisch zusammengestellt. Der Grundzustand weist eine Gliederung in 3 Schichten auf:

1. Grundsicht (0 - 1,50 km). Die Grundsicht wird als gut durchmischt und ungesättigt angenommen. Die höhenkonstanten Werte für Θ_f und m_D betragen 302°K bzw. 12 g/kg. Der Boden- (p_0) und Normdruck (p_n) hat den Wert 1000 mb.

2. Obersicht (1,50 - 9,00 km). Für die feuchtlabile Obersicht werden ein höhenabhängiger Temperaturgradient γ und der Sättigungszustand in Form der relativen Feuchte f vorgegeben. Der lokale Temperaturgradient ergibt sich aus dem Ansatz

$$[158] \quad \gamma = (1 - \alpha) \bar{\Gamma}_f + \alpha \bar{\Gamma}_t$$

Den trockenadiabatischen Temperaturgradienten

$$[159] \quad \bar{\Gamma}_t = \frac{g(1 + m_D)}{c_{pL} + m_D c_{pD}}$$

weist individuell ein Luftpaket auf, das aus seiner Umgebung heraus nach unten angestoßen wird und mit ihr im Druckgleichgewicht bleibt. Der feuchtadiabatische Temperaturgradient

$$[160] \quad \bar{\Gamma}_f = \frac{g(1 + m_D) \left(1 + \frac{L_k M_D}{R_L T}\right) \left(1 - \frac{m_D R_D}{R_L + m_D R_D}\right)}{\left(c_{pL} + M_D c_{pD} + L_k M_D \left(1 + M_D \frac{R_D}{R_L}\right) \frac{1}{p} \frac{dp_0}{dT}\right) \left(1 - \frac{p_0}{p}\right)}$$

gilt entsprechend für ein gerade gesättigtes Luftpaket, das nach oben angestoßen wird. Für den Fall einer ungesättigten Umgebung ist angenommen, daß das gesättigte Luftpaket im Ausgangsniveau die gleiche

Temperatur besitzt, woraus sich ein Dichtedefizit ergibt. Die den Sättigungsdampfdruck P_D betreffenden Terme werden in Konsistenz mit dem Prognosesystem mithilfe der Tetens'schen Formel [94] ausgewertet. Das Mischungsverhältnis des Wasserdampfes läßt sich über

$$[161] \quad m_0 = \frac{R_v}{R_D} \frac{f P_D}{p - f P_D}$$

als Funktion von p , T und f berechnen, wobei der Sättigungswert M_D für $f = 1$ resultiert. Den angeführten Experimenten liegen die Parameter $\alpha = 0,4$ und $f = 1$ zugrunde.

3. Deckschicht (9,00 - 9,33 km). Die Deckschicht ist trocken und neutral geschichtet; ihre potentielle Temperatur entspricht dem Wert an der unteren Schichtgrenze.

Die angenommene Vertikalverteilung steht zumindest in der unteren Hälfte in qualitativer Übereinstimmung mit dem atmosphärischen Zustand vor Wärmegewittern. Über die Parameter α und f können die Konvektionsbedingungen variiert werden. Vorexperimente ergaben, daß sich der Maßstab lebensfähiger Zellen mit abnehmendem α und/oder f verringert, wobei im Grenzfall der Anfangsstörung (Intensität, Abmessung und Lage) eine kritische Bedeutung zukommt.

Die Temperaturstörung

$$[162] \quad T' = T_s \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) \quad ; \quad r \leq r_s = 0,5 \text{ km} \quad , \quad T_s = 0,5 \text{ grad}$$

wird in Form einer kreisförmigen Warmluftblase angesetzt, deren Überschußwert zur Peripherie hin linear abnimmt. Ihr Zentrum liegt auf der Symmetrieachse $x = L/2$ in der Höhe $z = 0,67$ km. Im Licht von Segelflugmessungen (z.B. (97)) erscheinen die Werte von T_s und r_s realistisch. Indem die Störung der ungesättigten, neutralen Grundschicht überlagert wird, kommt es zu einer indirekten Auslösung der Feuchtkonvektion. Sie wird nicht durch den Störkörper selbst sondern durch die Ausläufer seines Zirkulationssystems angestoßen und organisiert sich weitgehend selbständig (s. Abschn. 3.2.2.).

Zur Herleitung einer diagnostischen Beziehung für die schallfilternde Balancierung der Anfangsfelder knüpfen wir an Überlegungen in Abschnitt 2.1.2. an. Unter Voraussetzung einer ruhenden Anfangsatmosphäre liefert die Filterbedingung [27], angewandt auf die Impulsbilanzgleichung [91] bzw. [24], die Gleichung

$$[163a] \quad \nabla^2 p + g \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0 \quad ,$$

die sich natürlich auch aus [28] durch Nullsetzen von ϱ ergibt. Die auf flache Konvektion anwendbare Filterbedingung der Inkompressibilität ($\nabla \cdot \varrho = 0$) führt auf eine analoge Beziehung:

$$[164] \quad \nabla^2 p - \frac{1}{g} \nabla \varrho \cdot \nabla p = 0 \quad .$$

Die zu [163a] aufgestellten Randbedingungen

$$[163b] \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, L \text{ (bzw. } B)$$

$$p = p_0 \quad \text{für} \quad z = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g \varrho = 0 \quad \text{für} \quad z = H$$

weichen nur insofern von [143] ab, daß zur Fixierung des absoluten Druckniveaus der Druck am unteren Rand vorgegeben wird. Bei der Lösung behandeln wir die Randwertaufgabe [163] als Poisson-Gleichung mit gemischten Randbedingungen (3. Randwertproblem) und wenden wiederum das Liebmann'sche Relaxationsverfahren an. Dabei muß die Iteration auch auf den inhomogenen Term erstreckt werden, da ϱ wegen [155] und [156] selbst von p abhängt. Über diese Beziehungen läßt sich ϱ aus dem relaxierten p , festgehaltenem T und vorgegebenem (Grundsicht und Decksicht) bzw. aus [161] bestimmtem (Obersicht) m_D ermitteln.

Um Konsistenz mit der Differenzenform der Impulsbilanzgleichung (räumliche Mittelung von ϱ im linearen Term) zu erreichen, muß man die Randwertaufgabe für die beiden Gitterpunktssysteme getrennt lösen. Als Gitteroperatoren bieten sich die 9-Punkte-Formeln

$$[165] \quad (\nabla^2 p)_G = \frac{1}{6\Delta^2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} (p)$$

und

$$[166] \quad \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)_G = \frac{1}{8\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} (\varrho)$$

an. Mit dem Residuum R_o aus der Gleichung

$$[167] \quad (\nabla^2 p)_G + g \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)_G = \frac{1}{6\Delta^2} R_o$$

ergibt sich über die Relaxationsgleichung

$$[168] \quad p_o = p_o^* + \frac{\alpha}{20} R_o$$

ein neuer Druckwert p_o für den Zentralpunkt; p_o^* repräsentiert den Wert der vorhergehenden Iterationsstufe. Hinsichtlich der numerischen Spezifikation der Randbedingungen [163b] sind einige Besonderheiten zu erwähnen. Im x -System wird die seitliche Extrapolation über ein 2Δ -Intervall erstreckt und die obere Randbedingung auf den Höhenbereich $z = H - \Delta$ bis $z = H$ angewendet. Im o -System werden die Druckwerte des Grundzustandes im Niveau $z = \Delta/2$ festgehalten.

Die Zahl der bei konsequenter Überrelaxation - der optimale Relaxationskoeffizient wird nach der Formel von Frankel (95, S. 97) bestimmt - erforderlichen Iterationsschritte liegt bei 500 für jedes Punktsystem. Die aufwendige Prozedur braucht allerdings nur einmal durchgeführt zu werden, und die gewonnene Anfangsatmosphäre kann i.allg. mehreren Experimenten, die dem Vergleich physikalischer und numerischer Varianten dienen, zugrundegelegt werden.

Das adaptierte Druckfeld ist so beschaffen, daß sich anstelle des Stoßvorganges, den der aufwärts beschleunigte Warmluftkörper auslösen würde, sofort eine massendivergenzfreie Zirkulation ausbildet. Neben dem vertikal ausgeweiteten Auftriebsbereich befindet sich seitlich ein Gebiet kompensierender Abwärtsbeschleunigung; dieses Bild wird durch entsprechende horizontale Druckkräfte vervollständigt. Letztere

werden in Abb. 5 veranschaulicht, in der die Abweichungen des Druckes vom horizontalen Mittelwert dargestellt sind. Der energetische Effekt der Schallfilterung sei an einem extremen Beispiel aus der Trockenkonvektion demonstriert: eine quadratförmige Temperaturstörung mit den Abmessungen 3 km x 3 km und einem Maximalwert im Zentrum von 5 grad ist in eine nahezu neutral geschichtete Grundatmosphäre von 9 km x 9 km Ausdehnung eingebettet. Wie Abbildung 6 ausweist, kommt es im ungefilterten Fall durch das Auftreten von Schallwellen (vornehmlich vom Typ $\lambda_x = \infty$, $\lambda_z = 2H$, s. Abschn. 2.3.) zu erheblichen pulsierenden Transformationen zwischen potentieller Energie und Wärme. Das angegebene Verfahren der Schallfilterung bewirkt eine vollständige Unterdrückung dieses Phänomens.

2. Physik und Numerik des Modells

2.1. Die Gleichungen

Die ursprünglichen Konvektionsgleichungen sollen zunächst für eine trockene Atmosphäre entwickelt werden. Die angewandten Verfahren haben hierbei eine besonders durchsichtige Form und lassen sich analog im reversibel feuchten Fall einsetzen. Der Formulierung wird ein 3dimensionales kartesisches Koordinatensystem mit den Horizontalkoordinaten x, y und der Vertikalkoordinate z zugrundegelegt. Die für eine Vertikalebene (x, z -System) benötigten Modellgleichungen ergeben sich durch die Spezifikation, daß die Geschwindigkeit in y -Richtung und die Ableitung jeglicher Größe nach y verschwinden. Auftretende Tensoren erster und zweiter Stufe sind entsprechend zu interpretieren.

2.1.1. Trockene Konvektion

Den Ausgangsgleichungen für das molekulare atmosphärische System trockener Luft als eines idealen Gasgemisches liegen folgende Annahmen zugrunde.

1. Im Hinblick auf den Zeitmaßstab der atmosphärischen Konvektion ist der Einfluß der Coriolis-Kraft auf die Bewegungen zu vernachlässigen (s. z.B. (35)).
2. Der Strahlungsfluß und die damit verbundenen Wärmequellen und -senken bleiben außer Betracht.
3. Der molekulare Wärmefluß, der klein ist im Vergleich zu seinem später herzuleitenden turbulenten Gegenstück, wird von vornherein nicht berücksichtigt. Demgegenüber wollen wir der molekularen Reibung Beachtung schenken, da sie die Dissipation (Übergang kinetischer Energie in Wärme) am kurzwelligen Ende des atmosphärischen Bewegungsspektrums besorgt.

Es stehen zur Verfügung:

die Bilanzgleichung der Masse (Kontinuitätsgleichung)

$$[1] \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{w}) = 0 \quad ;$$

die Bilanzgleichung des Impulses

$$[2] \quad \frac{\partial \varrho \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{w} \mathbf{w}) = -\nabla p - g \mathbf{k} + \nabla \cdot \mathbf{\tau}_M \quad ,$$

wobei der Schwerepotentialgradient durch $\nabla \phi = g \mathbf{k}$ ($g = 980,616 \text{ cm/s}^2$ Schwerebeschleunigung) approximiert wurde;

die Bilanzgleichung der inneren Energie (1. Hauptsatz), formuliert als Wärmegleichung,

$$[3a] \quad \frac{\partial \varrho c_v T}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{w} c_v T) = -p \nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{\tau}_M \cdot \nabla \mathbf{w} \quad ;$$

die thermische Zustandsgleichung

$$[4] \quad p = \varrho R T \quad .$$

Die verwendeten Bezeichnungen haben dabei i.a. die übliche Bedeutung:

\mathbf{w} Geschwindigkeitsvektor, ϱ Dichte (Masse pro Volumeneinheit), p Druck, T Temperatur. Die spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen, c_v , bzw. Druck, c_p , können im meteorologisch interessierenden Temperaturbereich konstant gesetzt werden (60, S. 74); sie gehorchen der Beziehung $c_p - c_v = R$ ($R = 2,870 \cdot 10^6 \text{ erg/g.grd}$ Gaskonstante; $c_p = 10,046 \cdot 10^6 \text{ erg/g.grd}$, $c_v = 7,176 \cdot 10^6 \text{ erg/g.grd}$). Der molekulare Reibungstensor $\mathbf{\tau}_M$ ist ein Deviator (d.i. ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe, dessen Spur verschwindet), der sich über einen aus der lokalen Dyade $\nabla \mathbf{w}$ gebildeten Tensor gleichen Charakters parametrisieren läßt.

Gleichung [3a] kann in die Form

$$[3b] \quad \frac{\partial \varrho c_p \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho c_p \Theta) = \frac{\Theta}{T} \tau_M \cdot \nabla \omega$$

überführt werden, wobei die potentielle Temperatur Θ durch

$$[5] \quad \Theta = T \left(\frac{p_n}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad , \quad p_n = 1000 \text{ mb Normdruck,}$$

definiert ist. Sieht man von dem sehr kleinen Quellterm auf der rechten Seite von [3b] ab, so weist [3b] in Verbindung mit [1] aus, daß es sich bei Θ um eine individuelle Invariante ($d\Theta/dt = 0$) handelt.

Wir unterscheiden folgende Energieformen, für die sich Bilanzgleichungen anschreiben lassen:

kinetische Energie

$$[6] \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \frac{\omega^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left\{ \omega \varrho \frac{\omega^2}{2} + p \omega - \tau_M \cdot \omega \right\} = p \nabla \cdot \omega - g \varrho w - \tau_M \cdot \nabla \omega \quad ,$$

potentielle Energie

$$[7] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varrho \phi) + \nabla \cdot \{ \omega \varrho \phi \} = g \varrho w \quad ,$$

fühlbare Wärme (unterscheidet sich von der inneren Energie nur um eine Konstante)

$$[8] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\varrho c_T) + \nabla \cdot \{ \omega \varrho c_T \} = -p \nabla \cdot \omega + \tau_M \cdot \nabla \omega \quad .$$

Die lokalen zeitlichen Änderungen pro Volumeneinheit setzen sich demgemäß zusammen aus Flüssen durch die Oberfläche und Transformationen zwischen den verschiedenen Energieformen. Die Gesamtenergie ist gemäß

$$[9] \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho \left[\frac{\omega^2}{2} + \phi + c_T \right] \right) + \nabla \cdot \left\{ \omega \varrho \left[\frac{\omega^2}{2} + \phi + c_T \right] - \tau_M \cdot \omega \right\} = 0$$

quellenfrei.

Die angegebenen Gleichungen des molekularen Systems, die das gesamte Spektrum atmosphärischer Prozesse beinhalten, lassen sich nicht unmittelbar für ein Konvektionsmodell verwenden. Das Gitternetz bedingt eine Auflösungsgrenze, durch die alle atmosphärischen Felder in einen aufgelösten oder skaligen und einen nicht aufgelösten oder subskaligen Anteil zerlegt werden. Gleichungen für skalige Größen gehen aus den Gleichungen des molekularen Systems durch geeignete Mittelbildung über Raum und Zeit hervor. Im Falle der Konvektion erstreckt sich die Mittelbildung über den Spektralbereich der mikroturbulenten Prozesse, die als stochastisch angesehen werden. Die Parametrisierung gemittelter Aggregate subskaliger Größen geschieht daher in enger Anlehnung an entsprechende Ansätze im molekularen System.

Aus Gründen der Zweckmäßigkeit wird neben der Reynolds'schen Form der Mittelbildung

$$\Psi = \overline{\Psi} + \Psi' , \quad \overline{\Psi'} = 0$$

bei spezifischen Größen die gewogene Mittelbildung

$$\Psi = \widehat{\Psi} + \Psi'' , \quad \overline{\xi \Psi''} = 0$$

angewendet.

Für die Durchführung wird vorausgesetzt, daß turbulente Prozesse als in den thermodynamischen Variablen linear behandelt werden können. Das heißt: mittlere Produkte turbulenter Abweichungen werden vernachlässigt, sofern sie in den thermodynamischen Variablen nichtlinear sind. Diese Voraussetzung, die vor allem im feuchten Fall von Nutzen sein wird, erweist sich als gerechtfertigt durch die kleinen relativen Schwankungen, die für diese Größen (hier p, T, Θ) im Gegensatz zur Geschwindigkeit (s. z.B. (86)) anzusetzen sind. Hieraus folgt u.a., daß nichtlineare Beziehungen zwischen den thermodynamischen Variablen, wie z.B. Gl. [5], auch in den gemittelten Größen bestehen bleiben.

Die Mittelung der Gleichungen [1], [2], [3b], [4] und [5] führt auf:

$$[10] \quad \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\omega} \bar{\varrho}) = 0 \quad ,$$

$$[11] \quad \frac{\partial \bar{\varrho} \hat{\omega}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\omega} \bar{\varrho} \hat{\omega}) = -\nabla \bar{p} - g \bar{\varrho} k + \nabla \cdot (\bar{\tau}_M + \tau_T)$$

mit dem turbulenten Reibungstensor

$$\tau_T = -\overline{\omega' \tau \omega''} \quad ,$$

$$[12b] \quad \frac{\partial \bar{\varrho} c_p \hat{\Theta}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\omega} \bar{\varrho} c_p \hat{\Theta}) = \frac{\hat{\Theta}}{T} \overline{\tau_M \cdot \nabla \omega} - \nabla \cdot f_p$$

mit dem turbulenten potentiellen Enthalpiefluß

$$f_p = \overline{\omega'' \tau c_p \Theta''} \quad ,$$

$$[13] \quad \bar{p} = \bar{\varrho} R \hat{T} \quad \text{und}$$

$$[14] \quad \hat{\Theta} = \hat{T} \left(\frac{p_n}{\bar{p}} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad .$$

Das Zustandekommen von [14] soll kurz erläutert werden:

$$\begin{aligned} \overline{\varrho \Theta} &= \overline{\varrho T \left(\frac{p_n}{\bar{p}} \right)^{\frac{R}{c_p}}} = \frac{R}{c_p} \overline{p^{\frac{R}{c_p}}} = \frac{R}{c_p} \bar{p}^{\frac{R}{c_p}} \left[1 + \frac{c_p}{\bar{p}} \overline{\left(\frac{p'}{\bar{p}} \right)} + \frac{1}{2} \frac{c_p}{\bar{p}} (c_p - 1) \overline{\left(\frac{p'}{\bar{p}} \right)^2} + \dots \right] = \\ &= \bar{\varrho} \hat{T} \left(\frac{p_n}{\bar{p}} \right)^{\frac{R}{c_p}} = \bar{\varrho} \hat{\Theta} \quad . \end{aligned}$$

Das zweite Glied in der eckigen Klammer verschwindet per definitionem, alle höheren Glieder in $\frac{p'}{\bar{p}}$ aufgrund der gemachten Voraussetzung.

Unter Verwendung der angegebenen Beziehungen kann [12b] in die Form

$$[12a] \quad \frac{\partial \bar{\varrho} c_p \hat{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\omega} \bar{\varrho} c_p \hat{T}) = -\bar{p} \nabla \cdot \hat{\omega} + \overline{\tau_M \cdot \nabla \omega} - \frac{\hat{T}}{\Theta} \nabla \cdot f_p$$

übergeführt werden.

Bei der Herleitung gemittelter Energiegleichungen beginnen wir mit der Gesamtenergie (Gl. [9]) und erhalten

$$[15] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} [\frac{\hat{w}^2}{2} + e_T + \phi + c_T \hat{T}]) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} [\frac{\hat{w}^2}{2} + e_T + \phi + c_T \hat{T}] + \overline{w'' \rho \frac{w''^2}{2}} + f - (\bar{\tau}_M + \tau_T) \cdot \hat{w} - \overline{\tau_M \cdot w''} \} = 0 \quad .$$

Hierin bedeuten

$$e_T = \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{\rho \frac{w''^2}{2}} = \frac{\hat{w}^2}{2} \quad \text{die kinetische Energie der turbulenten Zusatzbewegung, kurz Turbulenzenergie, und}$$

$$f = \overline{w'' \rho c_T T''} \quad \text{den turbulenten Enthalpiefluß.}$$

Aus [11], [7] und [12a] gewinnen wir Bilanzgleichungen für die kinetische Energie

$$[16] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \frac{\hat{w}^2}{2}) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} \frac{\hat{w}^2}{2} + \bar{p} \hat{w} - (\bar{\tau}_M + \tau_T) \cdot \hat{w} \} = \bar{p} \nabla \cdot \hat{w} - g \bar{\rho} \hat{w} - (\bar{\tau}_M + \tau_T) \cdot \nabla \hat{w} \quad ,$$

die potentielle Energie

$$[17] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \phi) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} \phi \} = g \bar{\rho} \hat{w}$$

und die fühlbare Wärme

$$[18] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} c_T \hat{T}) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} c_T \hat{T} + \frac{\hat{T}}{\Theta} f_p \} = -\bar{p} \nabla \cdot \hat{w} + \bar{\tau}_M \cdot \nabla \hat{w} + \bar{\tau}_M \cdot \nabla w'' + f_p \cdot \nabla \frac{\hat{T}}{\Theta}$$

der gemittelten Felder. Die Subtraktion der Gleichungen [16] - [18] von [15] liefert schließlich eine Bilanzgleichung für die Turbulenzenergie

$$[19] \quad \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} e_T) + \nabla \cdot \{ \hat{w} \bar{\rho} e_T + \overline{w'' \rho \frac{w''^2}{2}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{w'' \rho p'} - \bar{\tau}_M \cdot w'' \} = \tau_T \cdot \nabla \hat{w} - f_p \cdot \nabla \frac{\hat{T}}{\Theta} - \bar{\tau}_M \cdot \nabla w'' \quad .$$

3. Experimente

Die Ergebnisse von 3 Experimenten zur hochreichenden Feuchtkonvektion ohne Niederschlag werden nachfolgend analysiert. Wie aus der Übersicht

Experiment	K-Ansatz	L	Simulationsdauer	Rechenzeit pro Zeitschritt	Zeitfaktor der Simulation
KONFEU 43	K(t)	H	60 min	3,15s	7,9
KONFEU 44	K(t), ab 10 min K(x,z,t)	H	60 min	3,9 s	9,75
KONFEU 45	K(t), ab 10 min K(x,z,t)	2H	70 min	7,8 s	19,5

hervorgeht, unterscheiden sich die Experimente hinsichtlich der Parametrisierung des turbulenten Diffusionskoeffizienten und der horizontalen Ausdehnung des Integrationsgebietes. K(t) bedeutet die Verwendung der Formel [119] mit $K_0 = 10 \text{ m}^2/\text{s}$, K(x,z,t) das jeweilige Lösungsfeld der Randwertaufgabe [134] mit den dort angegebenen Werten für die Parameter a und b. Um eine gleichmäßige gegenseitige Anfangsanpassung der beiden Variablenfamilien des versetzten Gitters zu erreichen, wurde der Ansatz K(t) in jedem Fall bis zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ min}$ aufrechterhalten. Das Integrationsgebiet hat horizontal (L) die gleiche bzw. doppelt so große Ausdehnung wie vertikal (H); Zahlenwerte sind Abb. 4 zu entnehmen, ebenso die Anfangsdaten. Angaben über die Rechenzeit pro Zeitschritt und ihr Verhältnis zum Zeitschritt beziehen sich auf die CDC 3800-Anlage des Deutschen Wetterdienstes.

Da KONFEU 45 am realistischsten konzipiert ist, soll dieses Experiment im Vordergrund stehen. Aus KONFEU 44 und 43 werden nur ausgewählte Ergebnisse zum Vergleich herangezogen.

Der dynamischen Version der Umschichtung eines instabilen Anfangszustands in Form von Konvektionsexperimenten läßt sich eine statische Version an die Seite stellen, bei der vom konkreten Ablauf des Prozesses abstrahiert wird. Über deren Anwendung auf den Grundzustand der Anfangsatmosphäre KONFEU 43-45 wollen wir einleitend berichten.

3.1. Statische Umschichtung

Bei der statischen Umschichtung werden die Massenelemente einer hydrostatisch geschichteten Luftsäule nach einem Umordnungsschema quasistatisch in eine neue vertikale Anordnung gebracht. Es resultieren neue Vertikalprofile der Zustandsgrößen und in Verbindung damit ein veränderter Gehalt an statischen Energieformen, der eine Aussage über die durch Umschichtung freisetzbare kinetische Energie gestattet. Ausgezeichnet und somit Hauptziel diesbezüglicher Untersuchungen ist derjenige Umschichtungszustand, für den die freisetzbare kinetische Energie ihr Maximum (verfügbare kinetische Energie) erreicht. Das eigentliche Problem in der Anwendung des Verfahrens besteht darin, für beliebige Anfangsverteilungen ein Umordnungsschema zu finden, das auf diesen Zustand führt.

Die angegebenen Systeme zur Trocken- und Feucht, konvektion erscheinen für eine parallele statische Umschichtung besonders geeignet, weil die - abgesehen von turbulenten Prozessen - reversiblen individuellen Zustandsänderungen unmittelbar nachgeahmt werden können und der Rand abgeschlossen ist.

Die Idee, aus statischen Umlagerungen Aussagen für die Energetik dynamischer Systeme zu gewinnen, geht auf Margules zurück; von ihm stammen auch erste Analysen feuchtlabiler Vertikalschichtungen mithilfe eines fiktiven Gases anstelle wasserdampfgesättigter Luft (56). Exakte Bestimmungen der verfügbaren kinetischen Energie spezieller Ausgangsschichtungen führte Littwin 1935 (49) graphisch durch. Beide legten die Annahme zugrunde, daß der Druck an der Obergrenze der Luftsäule konstant ist (beweglicher Stempel). Dieser Annahme haben wir die Annahme konstanter Höhe gegenübergestellt, die unseren dynamischen Systemen gemäß ist.

Zur Herleitung der Energiebeziehungen für vertikale Luftsäulen gehen wir von der Bilanzgleichung für die Gesamtenergie [78] bzw. [15] aus und vernachlässigen turbulente und molekulare Prozesse. Für die auftretenden Energieformen - kinetische und potentielle Energie, fühlbare und latente Wärme - führen wir folgende Bezeichnungen ein. Die

über ein Luftvolumen gemittelte Energie pro Volumeneinheit wird gebietsmittlerer Energieinhalt genannt und mit den Abkürzungen K, P, W_f, W_1 belegt. Statische Umschichtungen und Konvektionsexperimente mit unterschiedlichem L können über diese Größen unmittelbar miteinander verglichen werden. Lokale spezifische Energiegehalte werden mit e bezeichnet und durch die obigen Abkürzungen im Index unterschieden. Energieintegralen individueller - massenmäßig abgeschlossener - Luftsäulen über der Flächeneinheit entsprechen die Sonderbuchstaben K, P, W_f, W_1 . Der Summe nicht-kinetischer Energieformen wollen wir in Analogie zu Kreitzberg (s. (52)) sowie Madden und Robitaille (52) den Begriff "statische Energie" mit den Abkürzungen S, e_s, \mathcal{S} zuordnen.

Die Bilanzgleichung

$$[169] \quad \frac{\partial}{\partial t}(\varrho[e_k + e_s]) + \nabla \cdot \{\varrho \vartheta [e_k + e_s] + \varrho p\} = 0 \quad ,$$

mit $e_k = \frac{\varrho^2}{2}$

und $e_s = \begin{cases} g z + c T \\ g z + c T + k_0 L k \end{cases}$ für trockene Konvektion,
feuchte Konvektion,

wird über das Volumen der Luftsäule von der Querschnittsfläche 1 und der Höhe H integriert. Wegen der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung [64] bzw. [10] läßt sich die Integralbeziehung in die Form

$$[170] \quad \frac{d}{dt}(K + \mathcal{S}) = - \int_0^H p \vartheta \cdot d\sigma$$

bringen: Die Gesamtenergie einer individuellen Luftsäule kann nur durch Arbeitsleistung an der Berandung verändert werden. Als Randbedingungen kommen in Frage:

[171] $(\vartheta)_n = 0$ am seitlichen und unteren Rand
bzw. am oberen Rand
 $p = p_H$ Umschichtungstyp a (beweglicher Stempel)
oder
 $w = 0$ Umschichtungstyp b (fester Deckel bei $z = H$).

Ihre Anwendung liefert die Beziehungen

$$[172a] \quad \frac{d}{dt} (K + S + p_H z(p_H)) = 0 \quad \text{und}$$

$$[172b] \quad \frac{d}{dt} (K + S) = 0$$

Beim Übergang von einem ruhenden Anfangszustand (Index 0) zu einer neuen Vertikalschichtung läßt sich also maximal die kinetische Energie

$$[173a] \quad K = S_0 - S - p_H (z(p_H) - z_0(p_H)) \quad \text{bzw.}$$

$$[173b] \quad K = S_0 - S$$

freisetzen. Beim Typ a muß ein Teil der statischen Energiedifferenz als Ausdehnungsarbeit an die darüberliegende Luftmasse $M_H = p_H/g$ zur Erhöhung ihrer potentiellen Energie abgegeben werden:

$$[174] \quad A = p_H (z(p_H) - z_0(p_H)) = g M_H (z(p_H) - z_0(p_H))$$

Aus diesem Grunde wurde der allgemeineren Bezeichnung "verfügbare kinetische Energie" (nach Margules) für den Maximalwert von $K(K_V)$ der Vorzug gegenüber "verfügbare statische Energie" (siehe [173b]) oder "verfügbare potentielle Energie" (51) gegeben.

Hinweise auf das zu K_V führende Umordnungsschema erhält man durch Auswertung der rechten Seite von [173a]. Die Beziehung

$$[175] \quad S + p_H z(p_H) = \frac{1}{g} \int_{p_H}^{p_0} c_p T dp$$

für den trockenen Fall läßt sich mit [14] schreiben als

$$[175'] \quad S + p_H z(p_H) = \frac{1}{p_H^{\frac{R}{c_p}} g} \int_{p_H}^{p_0} c_p \theta p^{\frac{R}{c_p}} dp$$

⊙ stellt nach [12b] gemäß unseren Voraussetzungen eine individuelle Invariante dar. Damit das Integral den erforderlichen Minimalwert annimmt, ist die Atmosphäre so umzuschichten, daß die potentielle Temperatur eine nicht zunehmende Funktion des Druckes wird. Diese Aufgabe kann numerisch, bei polytroper Schichtung auch analytisch gelöst werden.

Der zu [175] analogen Beziehung im feuchten Fall läßt sich unter Verwendung der Äquivalenttemperatur

$$[176] \quad \bar{T}_a = T \left(1 + \frac{k_D L_k}{c_{p\bar{a}} T} \right)$$

die Form

$$[177] \quad \int_{p_H}^{p_0} \frac{1}{g} c_{p\bar{a}} \bar{T}_a dp + p_H z(p_H) =$$

geben. Nach [65] sind k_{DW} und - wegen der Definitionsgleichungen [40], [57] - auch k_L und $c_{p\bar{a}}$ individuelle Invarianten. Die weitere Analogie zum trockenen Fall wird dadurch eingeschränkt, daß zwischen gesättigten und ungesättigten Zustandsänderungen mit entsprechenden potentiellen Temperaturen $\Theta_{\bar{a}}$ und Θ_f unterschieden werden muß (s. Abschn. 2.1.3.). Umformung und Approximation der Definitionsgleichung für $\Theta_{\bar{a}}$ ergibt

$$[178] \quad \Theta_{\bar{a}} = T \left(\frac{p_H}{p_L} \right)^{\frac{k_L R_L}{c_{p\bar{a}}}} e^{\frac{k_D L_k}{c_{p\bar{a}} T}} = T \left(\frac{p_H}{p} \right)^{\frac{k_L R_L}{c_{p\bar{a}}}} e^{\frac{k_L R_L}{c_{p\bar{a}}} \left[\frac{k_D L_k}{k_L R_L T} + \ln \left(1 + \frac{k_D R_D}{k_L R_L} \right) \right]} \approx \bar{T}_a \left(\frac{p_H}{p} \right)^{\frac{k_L R_L}{c_{p\bar{a}}}}.$$

Die Anfangsatmosphäre KONFEU 43/44/45 (Grundzustand) ist nun dadurch gekennzeichnet, daß die Luft der Grundsicht, läßt man sie zum Kondensationspunkt (Untergrenze der Oberschicht) aufsteigen, einen einheitlichen, maximalen, Wert für $\Theta_{\bar{a}}$ bzw. $c_{p\bar{a}}$ aufweist; in der von vornherein gesättigten Oberschicht nehmen diese Größen mit der Höhe ab. Die Näherungsrelation in [178] legt in Verbindung mit [177] das in Abb. 7 veranschaulichte Umordnungsschema nahe, das die Kontinuität der bewegten Luftmassen wahrt und grundsätzlich auch durch die dynamischen Experimente realisiert wird. Die Umschichtung wird

lamellenweise bis zur vollständigen Inversion durchgeführt. Allerdings ist das Maximum von K in einem Zwischenzustand zu erwarten, da gesättigtes Aufsteigen gemäß [178] zwar zu einer Verminderung des Integrals [177], ungesättigtes Absinken wegen der Konstanz von c_{pD} und k_D sowie trockenadiabatischer Temperaturerhöhung aber gemäß [176] zu einer Erhöhung beiträgt. Im Zuge der Verkürzung, die der feuchtadiabatische Prozeßabschnitt der aufwärts verlagerten Lamelle erfährt, wird letzterer Effekt schließlich überwiegen.

Für die numerische Berechnung zerlegen wir die Anfangsatmosphäre in Schichten der Dicke $\Delta/2$, deren massenäquivalente Druckdifferenz Δp und mittleren Zustandsvariablen bestimmt werden. Nach jedem Umordnungsschritt wird zunächst die Atmosphäre vom Typ a, deren Bodendruck ungeändert bleibt, von unten her rekonstruiert. Zu den neuen schichtmittleren Druckwerten ergeben sich die übrigen Variablen durch reversible Zustandsänderungen: im ungesättigten Abschnitt werden Θ_f und k_D (bzw. m_D), im gesättigten Abschnitt Θ_a und k_{DW} (bzw. m_{DW}) festgehalten. Bei Typ b muß durch eine zusätzliche Justierung des Bodendrucks (Iterationsverfahren) dafür gesorgt werden, daß die umgeschichtete Atmosphäre die vorgegebene Höhe H hat.

Wie aus Abb. 8 hervorgeht, nimmt die freisetzbare kinetische Energie anfangs mit dem Massenanteil der aufwärts verlagerten Luft (μ) rasch zu. Sie erreicht ihr Maximum, wenn die Grundsicht nahezu (Typ b) oder vollständig (Typ a) aufgestiegen ist; in der zweiten Hälfte des schemagemäßen Ablaufs wird K negativ. Lage und Wert des Maximums hängen nur relativ schwach von der oberen Randbedingung ab. Das heißt: Obwohl die Bedingung $p_H = \text{const}$ der meteorologischen Wirklichkeit eher entsprechen dürfte, kann von Modellen mit der numerisch praktikablen Bedingung $H = \text{const}$ eine realistische Simulation der konvektiven Prozesse erwartet werden.

Die grundsätzlichen Unterschiede in den Energieumsetzungen verdeutlicht Tabelle 6. Sie enthält verschiedene Kenngrößen der Luftsäule im Umschichtungszustand $\mu = 0,202$, der dem Maximum von $K(K_V)$ bei Typ b und näherungsweise bei Typ a entspricht. Verteilt man die ver-

Tab. 6

Kenngrößen der Luftsäule KONFEU 43/44/45 (Grundzustand) im Umschichtungszustand $\mu = 0,202$ ($K \approx K_V$)

Kenngröße	$P - P_0$ [10^9 erg/cm^2]	$W_f - W_{f0}$ [10^9 erg/cm^2]	$W_i - W_{i0}$ [10^9 erg/cm^2]	$W - W_0$ [10^9 erg/cm^2]	$S - S_0$ [10^9 erg/cm^2]	A [10^9 erg/cm^2]	$ K $ [10^9 erg/cm^2]	V [m/s]	$p(H) - p_0(H)$ [mb]	$\frac{z(P_u)}{z_0(P_u)}$ [m]
Typ a	3,299	36,289	-46,250	-9,962	-6,663	5,387	1,276	18,87	—	181
Typ b	-0,774	44,813	-45,191	-0,378	-1,152	—	1,152	17,93	13,864	—

fügbare kinetische Energie der Luftsäule gleichmäßig auf deren Masse, so ergeben sich mittlere Geschwindigkeiten von 18,87 bzw. 17,93 m/s. Der zum Vergleich mit dynamischen Experimenten dienende mittlere kinetische Energieinhalt bei Typ b beläuft sich auf $1233,9 \text{ erg/cm}^3$. Während es bei Typ b zu einer generellen Druckerhöhung von fast 14 mb kommt, dehnt sich die Luftsäule im Typ a um 181 m aus. Die zugehörige Ausdehnungsarbeit ist etwa 4 mal so groß wie die verfügbare kinetische Energie. Diese bemerkenswert hohe Energiekomponente, auf die schon Littwin (49) hingewiesen hat, mag in der wirklichen Atmosphäre realisierbar sein. Sie könnte den wesentlichen Beitrag konvektiver Umschichtungen zur Energetik von Prozessen größeren Maßstabs (z.B. tropische Wirbelstürme) darstellen. Die Abnahme der statischen Energie gegenüber dem Anfangszustand geht bei Typ a ausschließlich zu Lasten der latenten Wärme; sie liefert sogar einen Beitrag zur Erhöhung der potentiellen Energie. In Typ b wird hingegen die freiwerdende latente Wärme fast vollständig in die fühlbare Form übergeführt; etwa 2 Drittel der verfügbaren kinetischen Energie stammen aus der potentiellen Energie.

Vertikalverteilungen von Zustandsgrößen des Typs b (Abb. 49, 50) erleichtern die Deutung modelldynamisch entstandener Profile und sollen in Verbindung mit ihnen diskutiert werden (Abschn. 3.2.3.).

3.2. Dynamische Umschichtung

Während die statische Umschichtung letztlich nur dem Auffinden eines einzigen, physikalisch ausgezeichneten, vertikalen Schichtungszustands galt, werden wir bei der dynamischen Umschichtung mit der ganzen raum-zeitlichen Mannigfaltigkeit des Konvektionsvorgangs konfrontiert. Seiner Beschreibung liegen die zeitabhängigen Felder der Variablen des Prognosesystems und daraus herleitbarer Größen zugrunde. Neben den Feldern selbst und ausgewählten Strukturelementen, wie markanten Punkten und Linien, sollen die Ergebnisse zusätzlicher diagnostischer Berechnungen (Horizontal- und Gebietsmittel, vertikale Transporte, Energieinhalte und -transformationen, Spektrum der Vertikalbewegung) ein vertieftes Verständnis vermitteln.

3.2.1. Phasenablauf

Der Ablauf der Experimente KONFEU 43-45 läßt sich in 4 charakteristische Phasen gliedern.

1. Initialisierung (0-10 min).

Durch die Anfangsstörung wird eine Initialzirkulation in Gang gesetzt, die zwar in der Hauptsache der Grundsicht angehört, deren Ausläufer jedoch in die Obersicht hineinreichen. Aufsteigen führt hier zur Kondensation, Absinken zur Auflösung der durch Diffusionsvorgänge entstandenen dünnen Wolke. Das Ende der Phase ist bei KONFEU 43 dadurch gekennzeichnet, daß die annähernde zeitliche Konstanz der Wolkenbreite in Höhe des Flüssigwassermaximums in eine Abnahme übergeht (Eigenorganisation der Feuchtkonvektion). Auch im Hinblick darauf wurde für die Experimente KONFEU 44,45 erst zu diesem Zeitpunkt der Ansatz $K(t)$ durch $K(x,z,t)$ ersetzt.

Abbildung 9 gibt für KONFEU 45 am Phasenende Strömungs- und Flüssigwasserfeld im Zusammenhang wieder.

2. Organisation (10-20 min).

Der feuchtkonvektive Prozeß in der Oberschicht organisiert sich. Die Horizontalabmessungen (Breite von Wolke bzw. Aufwindschlot in Höhe des Maximums von Flüssigwassergehalt bzw. Aufwindgeschwindigkeit; Flächenverhältnis von Aufwindbereich zu Gesamtgebiet als Maß für die mittlere relative Breite des Aufwindschlotes) nehmen charakteristische, bei $L = H$ (KONFEU 43,44) minimale, Werte an. Die energiekonsistente Turbulenzformulierung $K(x,z,t)$ (KONFEU 44,45) ergibt minimale Transformationsraten skaliger in turbulente Energie gegen Phasenende.

In den Strömungs-Wolken-Bildern (Abb. 10-12) ist zu erkennen, daß sich die Störungszirkulation zurückbildet und in das feuchtkonvektive Bewegungssystem einbezogen wird. Im Strömungsschema dominiert dann ein Aufwindschlot, der unten Luft einzieht und oben ausstößt. Der Bereich größerer relativer Horizontalgeschwindigkeiten ($V/V_{MAX} > 0,1$) erstreckt sich seitlich auf 4-5 km Achsenabstand. Kompensierendes Absinken führt zu allmählicher Vergrößerung des wolkenfreien Raumes.

3. Umschichtung (20-38 min (KONFEU 45), 35 min (KONFEU 44), 34 min (KONFEU 43)).

Der während der Organisationsphase durch freigesetzte Kondensationswärme entstandene Warmluftkörper steigt unter heftiger Kondensation auf und breitet sich über der potentiell kälteren Luft aus. Im Gegensatz zu den Experimenten mit $L = H$ (KONFEU 43,44) bleibt bei $L = 2H$ (KONFEU 45) der geschaffene Aufstiegskanal eine Zeitlang bestehen (quasistationärer Wolkenschlauch; vgl. z.B. Abb. 17a mit b); nach vorübergehendem, durch den Anstoß des Warmluftkörpers am oberen Rand bedingtem Abflauen kommt es hier gegen Ende zu einem zweiten Maximum der Vertikalgeschwindigkeit (Pulsation). Das Ende der Phase ist durch das Minimum des gebietsmittleren statischen Energieinhalts definiert.

Gemäß den Strömungs-Wolken-Bildern (Abb. 13-17a) wird der Warmluftkörper, dessen Konturen im Wolkeninnern durch die Isolinien des Mischungsverhältnisses tropfbaren Wassers gut angenähert werden, auf

beiden Seiten von einem sich intensivierenden Wirbel (toroidaler Wirbel im axialsymmetrisch 2dimensionalen Fall) begleitet. Dieser bedingt eine zunehmende Einbeziehung seitlicher Luftmassen in die konvektive Wolke (dynamisches Entrainment) und eine zeitweise Verbreiterung der Wolkenbasis. Durch die potentiell-äquivalente Temperatur - nach Schnaidt (82) auch im ungesättigten Bereich als Quasiinvariante verwendbar - läßt sich der Umschichtungseffekt am anschaulichsten demonstrieren (Abb. 18-22). An einer störungsbestimmten Durchbruchstelle kommt es zur teilweisen Entleerung der feuchtwarmen unteren Schichten. Die aufsteigende Luftmasse durchquert potentiell kältere Schichten und legt sich darüber. Aus vertikalen Luftmassenunterschieden werden dynamisch wirksame horizontale, die dann zu einer neuen vertikalen Anordnung führen (man vergleiche die Folge meridional-zonal-meridional bei einem Indexzyklus der allgemeinen Zirkulation!). Spätestens wenn der charakteristische führende Luftkörper, der zur Abschnürung tendiert, an den abgeschlossenen seitlichen Rand stößt (Abb. 22), ist das Ende des realistischen Simulationsabschnitts erreicht.

4. Schwerewellen und Sekundärkonvektion (38 min (KONFEU 45), 35 min (KONFEU 44), 34 min (KONFEU 43) bis zum jeweiligen willkürlichen Ende des Experiments).

Der feuchtkonvektive Prozeß mündet in - stehende - Schwerewellen einer vertikal zweigeteilten Atmosphäre. In den unteren Wellenbergen können weitere, passive oder aktive, Wolken entstehen. Passive Wolken bilden fremdbürtige Vertikalbewegungen ab, ohne sie maßgeblich zu beeinflussen. Aktive Wolken hingegen sind Bestandteil einer organisierten Konvektionszelle, die, von einem äußeren Anstoß ausgehend, einen selbständigen Lebenszyklus durchläuft. Da der Sekundärkonvektion nur eine feuchtlabile Restschicht von geringerer Vertikalausdehnung und relativer Feuchte zur Verfügung steht, weist sie einen gegenüber der Primärkonvektion verkleinerten Organisationsmaßstab auf. Die Möglichkeit, sie im angegebenen numerischen Gitter zu simulieren, hängt kritisch von der Turbulenzparametrisierung (K-Ansatz) ab.

Den Strömungs-Wolken-Bildern (Abb. 23-27) entnimmt man, daß mit der in der unteren Atmosphärenhälfte zunächst ausgebildeten Zirkulation (Absinken im Zentrum, Aufsteigen am Rand) die Auflösung des zentralen Wolkenschlauches und die Bildung passiver Wolken an den Rändern einhergehen. Während diese Wolken durch Absinkvorgänge wieder zur Auflösung gebracht werden, entstehen im Zentrum, später auch an den Rändern, aktive Wolken. Sie besitzen die typische Organisationsstruktur feuchtkonvektiver Zellen, wie z.B. ein Vergleich der Felder zu den Zeitpunkten 60,01 und 30,01 min (Abb. 27, 28a und 15, 20) lehrt. Das Feld der potentiell-äquivalenten Temperatur zum Zeitpunkt 60,01 min für die verschiedenen Experimente (Abb. 28a-c) weist aus, daß es zu den sehr ähnlichen Phänomenen in KONFEU 45 und 44 ($K=K(x,z,t)$) keine Entsprechung in KONFEU 43 ($K=K(t)$) gibt. In der oberen Atmosphärenhälfte bleibt eine geschlossene Wolkendecke mit variierender Untergrenze bestehen.

Eine kontinuierliche Wiedergabe des Ablaufs der Hauptphase 3 und anschließender Prozesse vermitteln Isoplethendarstellungen von Größen auf der Zentralachse (Abb. 29-32). Aufsteigende Luftbewegung wird bei KONFEU 45 (Abb. 29a) durchgehend bis etwa 35 min, in der Höhe sogar bis knapp 60 min aufrechterhalten. Dabei sind um 30 und 39 min zwei deutlich getrennte Maxima ausgebildet. Bereits der erste Schwerewellenberg in der unteren Atmosphäre löst um 50 min wieder die Entstehung organisierter Konvektion aus. Das Experiment KONFEU 44 (Abb. 29b) unterscheidet sich vor allem durch eine verkürzte Lebensdauer der Primärkonvektion (Fehlen der Pulsation) und dadurch bedingtes früheres Einsetzen der Sekundärkonvektion (um 43 min). Letztere fehlt in KONFEU 43 (Abb. 29c). Hier ist die untere Atmosphärenhälfte nach Beendigung der primären Aufdrift regelmäßigen Schwereschwingungen (Periode um 20 min) unterworfen, wobei das w -Feld gegenüber dem Temperaturfeld (Abb. 31b) um eine Viertelperiode versetzt ist.

Analoge Darstellungen für den Gehalt an tropfbarem Wasser enthalten die Abbildungen 30a (KONFEU 45) und 30b (KONFEU 43). Die meisten Merkmale werden im Vergleich mit den Abbildungen 29a und c verständlich. Bemerkenswert ist bei KONFEU 45 die annähernd konstante Höhe der Wolkenbasis über etwa 40 Minuten hinweg; sie kann in der zweiten

Wolkengeneration erneut beobachtet werden. Auffällige Strukturunterschiede zeigen sich wiederum zwischen aktiver (Abb. 30a) und passiver (Abb. 30b) Wolke.

Für die Abweichungen der Temperatur vom horizontalen Mittel (Abb. 31a für KONFEU 45, Abb. 31b für KONFEU 43) ergeben sich positive Werte im wesentlichen als Folge kondensierenden Aufsteigens in feuchtlabiler Atmosphäre und ungesättigten Absinkens bei trockenstabiler Schichtung. Der erste Wolkenbildungsvorgang vollzieht sich in gesättigter Umgebung und zeitigt auf der Achse durchweg einen Temperaturüberschuß. Der zweite aktive Cumulus stößt jedoch in ungesättigte Bereiche vor; durch erzwungene Hebung und Entrainmentvorgänge bildet sich an seinem Kopf eine Zone negativer Temperaturabweichung. Die in der passiven Wolke des Experimentes KONFEU 43 freigesetzte Kondensationswärme führt zu einem relativen Maximum im Zentrum eines Gebietes negativer Temperaturabweichung. Aus dem Temperaturfeld geht auch die thermische Bedingtheit des Absinkvorgangs hervor, der die hochstoßende Wolke von unten her auflöst.

Mithilfe des totalen Wassergehaltes (Abb. 32) als Tracergröße lassen sich die konvektionsbedingten vertikalen Transportschübe anschaulich demonstrieren. Infolge konvergenter Vertikalbewegungen (s. z.B. Abb. 27) bildet sich am Wolkenkopf jeweils eine prägnante Front.

Abschließend soll die konvektive Entwicklung im Experiment KONFEU 45 durch die Ergebnisse der Spektralanalyse des w -Feldes (s. Abschn. 2.5.) beleuchtet werden. Die horizontalen Spektralkomponenten α_m^2 (Tab. 7) zeigen innerhalb der Initialisierungsphase eine vorübergehende Verschiebung des relativen Energieanteils zu höheren Wellenzahlen. Ein abrupter Übergang des Maximums auf die Komponente $n = 2$ tritt zu Beginn der Organisationsphase ein, wenn der feuchtkonvektive Prozeß ausschlaggebend wird. (Mitbeteiligt ist der Wechsel des K -Ansatzes.) Diese Komponente dominiert bis zum Anstoßvorgang zwischen 30,01 und 33,34min (vgl. z.B. Abb. 20 und 21); danach herrscht zunächst α_1^2 vor, bis ab etwa 50 min Prozesse kleineren Maßstabs ($m = 2$ bis $m = 5$; Sekundärkonvektion) zunehmend Bedeutung gewinnen. Zum Ende der Organisationsphase hat das Spektrum in allen Experimenten vorübergehend einen

Tab. 7

Relativer Beitrag der horizontalen Spektralkomponenten zur kinetischen Energie der Vertikalbewegung (α_m^2 [%]) ; siehe Abschnitt 2.5.) in Experiment KONFEU 45

t [min] \ m	1	2	3	4	5	6	7	1 - 3
0,01	22,8	43,0	58,1	67,5	73,7	75,8	76,1	123,9
3,34	5,7	16,2	29,8	43,4	56,4	67,2	74,7	51,7
6,67	8,8	24,5	37,5	50,1	62,9	73,6	80,3	70,8
10,01	19,7	49,0	53,2	60,9	73,2	81,2	84,0	121,9
13,34	63,7	139,3	97,9	93,1	91,8	82,9	75,1	300,9
16,67	125,6	209,5	138,8	129,2	98,8	73,0	58,7	473,9
20,01	151,1	190,4	157,0	139,5	102,8	77,7	57,8	498,5
23,34	161,9	180,5	174,2	139,3	104,9	75,1	52,2	516,6
26,67	180,0	217,6	212,8	146,9	93,8	50,9	28,7	610,4
30,01	251,4	359,0	249,8	78,0	14,9	3,6	2,9	860,2
33,34	700,4	152,9	10,3	15,1	31,4	15,2	15,2	863,6
36,67	475,0	85,4	136,8	40,8	95,3	29,0	51,6	697,2
40,01	350,7	110,4	317,9	23,6	53,4	33,0	19,1	779,0

nahezu stationären Zustand erreicht, woraus sich die Berechtigung zu spektralen Energiebetrachtungen und Vergleichen ergibt. Bei den vertikalen Spektralkomponenten α_n^2 des Experimentes KONFEU 45 hat der hochreichende Aufbau der Konvektionszelle während der Organisationsphase die Dominanz von α_1^2 (802,5 % zum Zeitpunkt 20,01 min) zur Folge. Diese Komponente überwiegt bis zum Ende der Umschichtung; danach ist bis zum Einsetzen der Sekundärkonvektion um 50 min α_2^2 bevorzugt.

3.2.2. Struktur der Konvektionszelle

Die organisierte Feuchtkonvektion weist charakteristische Feldstrukturen auf, die im numerischen Experiment zusammenhängend dargestellt und interpretiert werden können. Wir gehen aus von einer Momentaufnahme des Experimentes KONFEU 45 zum Zeitpunkt 23,34 min, die realistische Resultate verspricht. Die Zirkulation der Konvektionszelle hat bereits das gesamte Integrationsgebiet erfaßt (Abb. 13). Der aktive Wolkenkern aber, dessen beschleunigter Aufstieg (s. z.B. Abb. 43) mit seitlichem Lufteinzug im unteren Wolkenabschnitt und entsprechender Abschnürungstendenz (Abb. 18) eingeleitet ist, befindet sich noch in hinreichendem Abstand vom oberen Rand. Das Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers hat gerade erst (vgl. Abb. 12 mit 11) den für das Einsetzen mikrophysikalischer Prozesse als kritisch erachteten (33, 5, 90) Schwellenbereich von 0,5-1 g/kg in größerem Ausmaß überschritten (Maximalwert: 2,8 g/kg). Aus meßtechnischen Gründen gibt es kein empirisches Analogon zur numerischen Momentaufnahme.

Das Feld der Vertikalgeschwindigkeit (Abb. 33) gliedert sich horizontal in ein vertikal durchgehendes schmales Aufwindband und ein ausgedehntes Gebiet mit i.allg. gleichmäßigem, langsamen Absinken. Nur in unmittelbarer Nachbarschaft des Aufwindschlotes werden stärkere Abwinde beobachtet. Die Grenze zwischen Auf- und Absteigen verläuft größtenteils innerhalb der Wolke, so daß die seitlichen Randpartien intensivem Absinken ausgesetzt sind, dessen Maximum mit dem Wolkenrand zusammenfällt. Das Bild eines aus 2 Komponenten aufgebauten Bewegungsfeldes wird nahegelegt. Die erste Komponente (Nahzirkulation; "bubble"-Aspekt) betrifft die den aufsteigenden Warmluftkörper begleitenden Wirbel (Abb. 13-15); kompensierendes Absinken findet im gleichen Raummaßstab wie das Aufsteigen statt. Die zweite Komponente (Fernzirkulation; "plume"- oder "jet"-Aspekt) bezieht sich auf ein Bewegungssystem, das die - in Form des führenden Warmluftkörpers und nachfolgender Luftmassen - effektiven Aufwärtstransporte von Masse mit einer entsprechenden Absinkkompensation verbindet; hierbei steht das strahlstromartig gebündelte Aufwindgebiet einem ausgedehnten Absinkbereich gegenüber.

Die Maximalwerte der Vertikalgeschwindigkeit lauten 1,9 m/s für Absinken und 8,4 m/s für Aufsteigen. Ihr Verhältnis (0,23) ist eine charakteristische Größe der Nahzirkulation, die über einen weiten Zeitbereich nahezu konstant bleibt und erst bei Annäherung an den oberen Rand zunimmt. Während die horizontale Ausdehnung des Integrationsgebietes (L) nur einen begrenzten Einfluß ausübt (KONFEU 44: 0, 30) ergaben vergleichende Experimente von Ogura (69) bedeutende Unterschiede bei verschiedenen geometrischen Konfigurationen (ebene Geometrie: 0,25, Zylindergeometrie: 0,06). Setzt man zur Kennzeichnung der Fernzirkulation hingegen die mittlere Geschwindigkeit im Aufstiegsgebiet zu derjenigen im Absinkgebiet ins Verhältnis, so wird der Einfluß von L deutlich (KONFEU 45: 40, KONFEU 43/44: 20). Die in der Vertikalebene von Aufsteigen erfaßte Fläche nimmt gegen Ende der Organisationsphase einen Minimalwert von 18 % (KONFEU 45; KONFEU 44: 29 %, KONFEU 43: 28 %) der Gesamtfläche an; diese Größe kann als das optimale Längenverhältnis von mittlerer Aufwindbreite zur Zellbreite unter den gegebenen Anfangs- und Randbedingungen angesprochen werden.

Zur Erklärung des w-Feldes ziehen wir die Temperaturverteilung (Abb. 34) heran. Der größte Teil der Wolke weist eine über dem horizontalen Mittel liegende Temperatur auf; der maximale Temperaturüberschuß (hier 2,8 grd) fällt während der Organisations- und Umschichtungsphase praktisch immer mit dem maximalen Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers zusammen. Um den seitlichen und unteren Wolkenrand ist dagegen eine Zone negativer Abweichungen ausgebildet. Bei einer konvektiven Entwicklung in ungesättigter Umgebung (realisiert für die Sekundärkonvektion) ist die gesamte Wolke von einer Temperaturdefizitzone umsäumt (s. z.B. Abb. 31a). Ein kalter Wolkenrand wird durch Beobachtungen bestätigt (97, 99, 100) und ist auch in ähnlichen Modellrechnungen angedeutet (69, 64, 6, 88). Es handelt sich dabei um ein thermodynamisches Phänomen in der Kontaktzone zwischen der Wolke mit Sättigungsreserve in Form tropfbaren Wassers und ungesättigter Außenluft: materielle und diffusive Flüsse über den Wolkenrand sorgen für ständige Verdunstungsabkühlung. In dem sich seitlich anschließenden Gebiet gleichmäßigen Absinkens liegen die Temperaturen

über denen der ungestörten Atmosphäre (verkörpert etwa durch die Anfangswerte). Infolge horizontaler Mittelbildung über die Zelle kommt dieser Tatbestand in absoluter Form nicht zum Ausdruck: positive Werte sind vielmehr nur im wolkennahen Gebiet kräftigen Absinkens (Nahzirkulation), auf das Vulfson (99) aufmerksam gemacht hat, und im Niveau der Wolkenbasis auszumachen.

In der Horizontalen (Abb. 35) setzt sich eine feuchte Konvektionszelle also aus folgenden thermischen Strukturelementen zusammen: heißer Kern, kalter Mantel, warmer Absinkbereich. Die entsprechenden Extremwerte von Temperaturabweichung und Vertikalgeschwindigkeit fallen praktisch zusammen; der auftriebsmindernden Verdunstungsabkühlung hat sich das Bewegungssystem energetisch optimal angepaßt. Die Koinzidenz der negativen Maxima mit dem Wolkenrand wird während der Organisationsphase hergestellt und bei der weiteren Zellentwicklung aufrechterhalten. Die Zusammenschau der Felder macht 2 Gesichtspunkte deutlich. 1. Wolke, Aufwind und Temperaturüberschuß können in ihrer horizontalen Erstreckung nicht gleichgesetzt werden; eine derartige Voraussetzung (1dimensionale Modelle, Störungstheorie) bedeutet die Vernachlässigung eines charakteristischen Elements der dynamischen Organisationsstruktur. 2. Der Abkühlungsvorgang am Wolkenrand führt zu einer Kontraktionstendenz, indem die über negative Auftriebskräfte forcierte Absinkbewegung den Wolkenrand in Richtung Zentralachse zu versetzen bestrebt ist. Hierdurch wird die relativ geringe Zunahme charakteristischer Horizontalabmessungen im Zentralbereich (s.u., Abb. 39, 40) erklärlich, die sie bei ihrer Aufwärtsverlagerung erfahren.

Das u -Feld (Abb. 36) läßt im betrachteten Zeitpunkt eine horizontal durchgehende Zweiteilung der Zelle in einen unteren Einstrom- und einen oberen Ausstrombereich erkennen; in der Grundsicht sind noch Reste der Initialzirkulation angedeutet. Die Geschwindigkeitsmaxima von jeweils etwa 1,9 m/s werden von der Nahzirkulation bestimmt. Das hier bei 1 liegende Verhältnis von Aus- zu Einstrommaximum, das gegen Ende der Organisationsphase ein Minimum von 0,8 aufweist, nimmt, während der Wolkenkern aufsteigt, ständig zu. Der Quotient

Einstrom- durch Aufwindmaximum hat den gleichen Wert (0,23) und ähnliches Zeitverhalten wie das erwähnte Verhältnis der Maxima von Abwind und Aufwind.

Zur Beschreibung des prozeßbedingten Druckanteils wird dessen horizontale Verteilung - als "Übersetzung im Getriebe des Sturms" (Margules) - in Abb. 37 vorgelegt. Der Zusammenhang zwischen dem u-Feld und seinem Antriebsfeld ist offensichtlich. Das Hauptminimum in der Viererkonstellation der Druckabweichungen setzt sich im Verlauf der Umschichtungsphase deutlich von der Zentralachse ab. Der horizontale Druckunterschied erreicht Maximalwerte um 2 mb. Der Umschichtungs-vorgang bewirkt, daß der horizontal gemittelte Druck bei nur geringer z-Abhängigkeit bis 38 min um 4,4 mb steigt; diese Druckerhöhung bleibt weitgehend aufrechterhalten (60 min: 3,6 mb). Bezogen auf den Anfangszustand, liegen relative Druck- und Temperaturänderungen in der gleichen Größenordnung. Es erweist sich, daß das anelastische Modell von Wilhelmson und Ogura (106) (s. Abschn. 2.1.2.) zwar die dynamische Druckkomponente befriedigend zu simulieren gestattet; die statische Komponente beinhaltet hingegen eine von Null am oberen Rand nach unten bis auf über 3,5 mb zunehmende Druckverminderung und steht damit in grundsätzlichem Widerspruch zu den Aussagen des ungefilterten Modells.

Die räumliche Verteilung des turbulenten Diffusionskoeffizienten (Abb. 38a, b) steht in guter Übereinstimmung mit den in Abschn. 2.4. aufgeführten empirischen Befunden. Über den bestimmenden Einfluß der thermischen Turbulenzquelle Q_H (Gl. [123]) ergeben sich die Wolken allgemein als turbulenz erfüllt, während weite Teile des wolkenfreien Raumes frei von konvektionsbedingter Turbulenz sind. Die höchsten Werte trifft man jeweils im Gebiet größter vertikaler Temperaturabnahme oberhalb des Wolken- (Warmluft-) Kerns an (für den Zeitpunkt 23,34 min: $328 \text{ m}^2/\text{s}$). Aus der Überlagerung der mechanischen Turbulenzquelle Q_M (Gleichung [122b]) erklären sich die relativ geringen Gradienten im Zentralbereich aktiver Wolken.

Die Illustration des Phasenablaufs des konvektiven Prozesses (Abb. 9-23) ließ bereits erkennen, daß Struktur und Amplitude der Felder eine systematische Entwicklung erfahren, in welche die ausgewählte Momentaufnahme eingebettet ist. Zur Demonstration dieser Entwicklung sollen charakteristische Abmessungen und Werte dienen. Bei der Besprechung der parallel dargestellten Ergebnisse für die 3 Experimente (Abb. 39-44) wollen wir zunächst gemeinsame Merkmale hervorheben und den Vergleich in den Zusammenhang von Abschnitt 3.2.5. stellen. Die erhaltenen Beziehungen machen einerseits den grundsätzlichen Unterschied einer feucht aufsteigenden Warmluftwalze zum Verhalten ihres trockenen Pendant deutlich; für die Gleichgewichtsphase (Auftrieb = Widerstand) des letzteren Phänomens, das einer momentanen Linien-Wärmequelle zuzuschreiben wäre, resultieren aus Dimensions- und Ähnlichkeitsbetrachtungen theoretische Proportionalitäten (zusammengestellt z.B. von Lilly (42)). Andererseits führen die zeitabhängigen K-Ansätze zu systematischen Abweichungen gegenüber feuchten Experimenten mit $K = \text{const}$ (z.B. (69)).

Um den Einfluß von Phasenunterschieden zwischen den Experimenten zu eliminieren, wurde zunächst ein Zusammenhang zwischen der charakteristischen Größe und der Höhe, in der sie auftritt, hergestellt (Abb. 39-42). Der zugehörige Zeitbereich erstreckt sich ungefähr von 15 min bis 34 min.

Als erste Horizontalabmessung ist die Breite des Aufwindbandes um die Zentralachse dargestellt, die in Höhe des Aufwindmaximums gemessen wird (Abb. 39). Die Organisationsphase, deren Ende durch Hohlkreise markiert wurde, und der nachfolgende Aufstieg weisen unterschiedliche Höhenabhängigkeiten auf. Der Organisationsvorgang äußert sich in einer mehr oder minder ausgeprägten linearen Breitenabnahme bei geringfügig zunehmender Höhe. Extrapolation nach unten liefert in 1 km Höhe einen gemeinsamen Ursprungswert (x) von 1,9 km, der bei der Zellbreite $L = 2H$ (KONFEU 45) offenbar kaum korrekturbedürftig ist. Mit dem Aufstieg ist eine zunächst langsame, mit der Höhe aber wachsende Breitenzunahme verbunden, die schließlich durch die Randannäherung beherrscht wird: eine Höhe von etwa 7,5 km (fast 2 km Randabstand) kann vom Aufwindmaximum nicht überschritten werden. Die ge-

fundene Höhenabhängigkeit kontrastiert mit dem trockenen Fall (Linearität) und dem Fall $K = \text{const}$ (nach oben abnehmender Breitenzuwachs). Ein ähnliches Bild ergibt sich für Höhe und horizontalen Abstand der Wirbelzentren (Abb. 40), deren Definition $u = w = 0$ die genaueste graphische Auswertung erlaubt.

Betrachten wir nun als Beispiele für charakteristische Werte die Maxima von Vertikalgeschwindigkeit $((w\uparrow)_{\text{max}}$, Abb. 41) und Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers $((m_W)_{\text{max}}$, Abb. 42) in ihrer Höhenabhängigkeit! Werte dieses Typs nehmen bei einem durch konstanten Gesamtauftrieb gekennzeichneten trockenen Aufstieg ab, im feuchten Fall mit $K = \text{const}$ exponentiell zu. Im Unterschied hierzu zeigt $(w\uparrow)_{\text{max}}$ bei $K = K(x,z,t)$ (KONFEU 44, 45) eine lineare Zunahme während des Aufstiegs, bis sich die obere Begrenzung bemerkbar macht; $(m_W)_{\text{max}}$ läßt schon vorher eine leichte Abnahme der Zuwachsrate erkennen. Oberhalb etwa 3 km Höhe (Ende der Organisationsphase, s. Tab. 8) haben die Kurven ihre aufstiegscharakteristische Neigung angenommen.

Tab. 8

Höhe markanter Punkte (Hauptwirbelzentren, Maxima von Aufwind und Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers auf der Zentralachse) in Experiment KONFEU 45

t [min]	H_{00} [km]	$H_{w\uparrow}$ [km]	H_{m_w} [km]
16,67	2,94	2,80	2,68
20,01	3,36	3,12	3,14
23,34	4,07	3,73	3,99
26,67	5,24	4,92	5,80
30,01	6,72	6,67	8,31
33,34	7,21	7,40	(9,33)

Aus der Zeitabhängigkeit der Höhe der Wirbelzentren (H_{00} , Abb. 43) kann ein Maß für die Geschwindigkeit gewonnen werden, mit der sich der konvektive Prozeß eines aufsteigenden Wolkenkörpers verlagert. Das Verhältnis $\frac{dH_{00}}{dt} / (w\uparrow)_{\text{max}}$ nimmt während der Organisationsphase

rasch, später langsam ab und hat zum Zeitpunkt 23,34 min etwa den Wert 0,5. Das entsprechende Verhältnis für den Punkt maximalen Flüssigwassergehaltes auf der Zentralachse (H_{m_w}), durch den etwa ein das Vertikalwindfeld durchlaufendes Luftpaket markiert wird, weist zwischen Abschluß der Organisation und Anstoß am oberen Rand stets höhere Werte auf (0,7 für $t = 23,34$ min).

Infolge der unterschiedlichen Verlagerungsgeschwindigkeiten ändert sich die relative Anordnung charakteristischer Niveaus im Verlauf des Aufstiegs (Tab. 8). So bleibt zwar das Maximum der Vertikalgeschwindigkeit ziemlich äquidistant unter den Wirbelzentren, bis sich nach 26,67 min (vgl. Abb. 19 mit 20) die für trockene Warmluftkörper typische Pilzform herausbildet und die Reihenfolge allmählich umkehrt. Das Flüssigwasser- (Temperaturexzeß-) Maximum, das zuerst die tiefste Lage innehatte, nimmt ab etwa 24 min die führende Position ein (Verlagerung in den Wolkenkopf).

Als Beispiel für die Zeitabhängigkeit charakteristischer Werte ist eine Darstellung des maximalen Flüssigwassergehaltes (Abb. 44) beigefügt. Der bei allen Kurven gestrichelt ausgeführte Schlußabschnitt bedeutet, daß das Hauptmaximum nach Spaltung aus der Zentralachse herausgewandert ist. Die im Verlauf der Umschichtungsphase erreichten Höchstwerte für w^* , m_w und $T - \hat{T}^*$ ($\hat{T}^* = \overline{q c_v T^*} / \overline{q c_v}$) sind in Tabelle 9 zusammengefaßt. Der maximale Temperaturexzeß tritt bei KONFEU 45

Tab. 9

Maximalwerte von Aufwind, Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers und Abweichung der Temperatur vom horizontalen Mittelwert, die während der Umschichtungsphase erreicht werden

Experiment	w [m/s]	m_w [g/kg]	$T - \hat{T}^*$ [grad]
KONFEU 45	29,4	7,8	7,7
KONFEU 44	25,4	7,0	5,7
KONFEU 43	23,7	7,4	6,2

etwa nach 30 Minuten in 8,33 km Höhe auf. Die Abweichung der zugehörigen absoluten Temperatur vom Wert der Anfangsatmosphäre verhält

sich zur entsprechenden Differenz, die ein adiabatisch aufgestiegenes Luftpaket der Grundschicht verursachen würde, wie 0,8:1, woraus der beschränkte Einfluß von Entrainmentvorgängen auf die Verhältnisse im Wolkenkern ("protected core") hervorgeht.

3.2.3. Umschichtungsvorgang

Im Gegensatz zu den beiden vorangegangenen Abschnitten, die dem Mechanismus des konvektiven Prozesses gewidmet waren, wollen wir jetzt die bewirkten Veränderungen in der Vertikalschichtung untersuchen. Auskunft hierüber geben Größen, die über die Zellbreite L gemittelt sind. Gemäß den in Bilanzform geschriebenen prognostischen Gleichungen [89] - [92] sind die lokalen zeitlichen Änderungen volumenspezifischer Werte extensiver Größen auf die Divergenz von Flüssen und - gegebenenfalls - die Wirksamkeit lokaler Quellen zurückzuführen. Zur Analyse der Flüsse wählen wir die quellfreie Gleichung [90]:

$$[90] \quad \frac{\partial \varrho k_{Dw}}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \varrho k_{Dw} - \varrho K_H \nabla k_{Dw}) = 0$$

Horizontale Mittelbildung, die sich wegen fehlender y -Abhängigkeit auf die x -Richtung beschränkt, führt bei Beachtung der abgeschlossenen seitlichen Ränder auf die Beziehung

$$[179] \quad \frac{\partial \bar{\varrho} \hat{k}_{Dw}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\omega} \bar{\varrho} \hat{k}_{Dw} + \overline{w'' \varrho k_{Dw}''} - \varrho K_H \frac{\partial k_{Dw}}{\partial z}) = 0$$

In die Bilanz gehen 3 Vertikalflüsse ein. 1. Mittlerer Vertikalfluß; er ist an mittlere vertikale Massentransporte geknüpft. 2. Konvektiver Vertikalfluß; obwohl sich die zugehörigen Massenflüsse horizontal zu Null ergänzen, kommt es durch Korrelation mit massenspezifischen Eigenschaften zu effektiven Eigenschaftstransporten. 3. Turbulenter Vertikalfluß; er ist unabhängig von (skaligen) materiellen Bewegungen und ergibt sich als Korrelation zwischen dem Austauschkoefizienten ϱK_H und dem vertikalen Eigenschaftsgradienten. Da sämtliche Vertikalflüsse an den vertikalen Berandungen verschwinden, können sich die

Vorräte an Wassersubstanz, die 2 durch ein zwischenliegendes Niveau getrennte Teilabschnitte der Atmosphäre besitzen, nur durch den totalen Fluß über diese Trennfläche ändern, wobei der Gesamtvorrat ungeändert bleibt (Gebietsinvariante). Für die Konzentration der Substanz Wasser, einer massenspezifischen Größe, ergibt sich bei Berücksichtigung der gemittelten Kontinuitätsgleichung [89] aus [179] die Gleichung

$$[180] \quad \frac{\partial \hat{k}_{Dw}}{\partial t} + \hat{w} \frac{\partial \hat{k}_{Dw}}{\partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{w'' \varrho k_{Dw}''} - \overline{\varrho K_H \frac{\partial k_{Dw}}{\partial z}} \right) = 0$$

Auf \hat{k}_{Dw} nimmt die Divergenz des Massenflusses, die Hauptkomponente des zweiten Terms in [179], keinen Einfluß. Das vertikale Integral bzw. Mittel ist keine Invariante. Die entsprechenden Gleichungen des ϱ_L, m -Systems ergeben sich aus [179], [180], wenn ϱ, k_{Dw} durch ϱ_L, m_{Dw} ersetzt werden.

Die Abbildungen 45-47 enthalten Isoplethendarstellungen der 3 Vertikalflüsse. Die Berechnung geschah für die o-Punkte des Gittersystems, wobei der turbulente Fluß über zentrierte m_{Dw} -Gradienten und ϱ_L -Mittel sowie den originalen K-Wert im Zentralpunkt approximiert wurde.

Wie zu erwarten, dominiert die konvektive Flußkomponente; im Experiment KONFEU 45 ist sie hinsichtlich des Maximalbetrages 10 (100) mal so groß wie die turbulente (mittlere) Komponente. Das Bild des mittleren Wasserflusses (Abb. 45) deckt sich weitgehend mit dem des mittleren Massenflusses. Der während der Umschichtungsphase bis oben durchgreifende Abwärtsfluß hält bis zu deren Ende (etwa 38 min) an und reflektiert die Abnahme potentieller Energie (s. Abb. 55). Der anschließende Aufwärtsfluß ist nur im Höhenbereich um 7,5 km (besonders bei KONFEU 43, 44) deutlich ausgeprägt; ansonsten fehlen großzügige Strukturen. Die vertikale Abnahme von m_{Dw} betont die Schwankungen niedriger Niveaus.

Der entscheidende konvektive Aufwärtstransport (Abb. 46) vollzieht sich innerhalb von 15 Minuten (23-38 min). Danach kommt es in der oberen Atmosphärenhälfte zu teilweise Rücktransport, der sich über einen ähnlichen Zeitraum erstreckt. Im unteren Teil wird der positive

Vertikalfluß bei nur kurzen Unterbrechungen aufrechterhalten (direkte Zirkulation unter dem sich auflösenden Wolkenschlauch; Sekundärkonvektion). Eine Tendenz zum Aufbau stationärer Verhältnisse, wie sie hier zwischen etwa 32 und 37 min oder oben nach 38 min sichtbar wird, weisen die Experimente KONFEU 43, 44 nicht auf; anstedessen erreicht dabei der Fluß aufwärts den anderthalbfachen, abwärts den doppelten Maximalbetrag.

Ausgeprägte turbulente Vertikalflüsse sind bei Verwendung des Ansatzes $K = K(x, z, t)$ (Abb. 47a) auf schmale Zonen fronthafter Gradientverschärfung (Aufwärtsfluß am Kopf aufquellender Wolken) beschränkt. Nach dem Durchbruch des entscheidenden Wolken- (Warmluft-) Körpers finden wir im obersten Atmosphärendrittel bevorzugt abwärts gerichtete Flüsse. Der Ansatz $K = K(t)$ (KONFEU 43; Abb. 47b) liefert ein grundsätzlich verschiedenes Bild: gradientstarke Gebiete reagieren auch auf die Dynamik von Prozessen (Konvektion, Schwerewellen), mit denen kein turbulenzphysikalischer Zusammenhang besteht. Um einem unrealistischen Einfluß auf den Grundzustand zu begegnen, der beim Ansatz $K = \text{const}$ besonders ausgeprägt ist, wird in verschiedenen Modellen (s. z.B. (8, 88, 106)) die turbulente Diffusion auf Störgrößen angesetzt.

Der summarische Effekt aller Vertikalflüsse soll an Isoplethen der Abweichung des horizontal gemittelten Mischungsverhältnisses der Substanz Wasser vom Anfangswert demonstriert werden (Abb. 48). Bei der Interpretation sind die erwähnten Unterschiede zwischen [179] und [180] in Rechnung zu stellen, insbesondere das Nichtexistieren eines zeitunabhängigen vertikalen Integrals. Der primäre Konvektionsvorgang führt zu einer bleibenden Vergrößerung des Mischungsverhältnisses oberhalb etwa 6 km und einer Verminderung darunter. Ein ähnlicher Relativeffekt ist bei kleinerem Vertikalmaßstab und Amplitudenwert auch mit der Sekundärkonvektion verbunden. Die unterste Schicht bis 1 km leistet zur Umschichtung einen bemerkenswert geringen Beitrag.

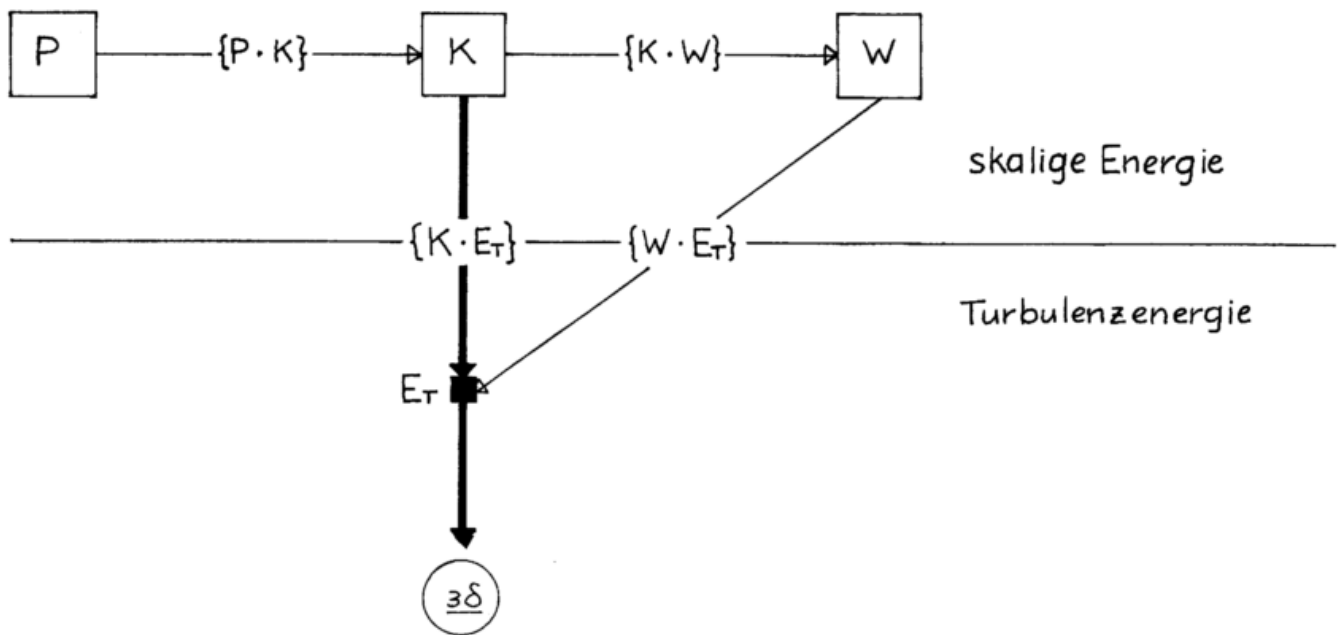
Ausgewählte mittlere Vertikalprofile weiterer Zustandsgrößen mögen das Verständnis der Umschichtung vertiefen. Für die potentiell-äquivalente Temperatur Θ_a gilt zwar Gleichung [68], eine zu k_{DW} ([65] bzw. [90]) im wesentlichen analoge Beziehung, exakt nur im gesättigten Bereich. Dennoch erscheint es berechtigt (82), für Zwecke der Diagnose Θ_a auch im ungesättigten Bereich zu definieren und für skalige Prozesse als annähernde Luftkörperinvariante zu betrachten. Abbildung 49 enthält Vertikalprofile der mit dem Gewicht q_L horizontal gemittelten potentiell-äquivalenten Temperatur für 2 Stadien der dynamischen Umschichtung in KONFEU 45, denen das Ergebnis der statischen Umschichtung im Zustand maximal freisetzbarer (verfügbarer) kinetischer Energie gegenübergestellt wurde. Es besteht eine auffallende qualitative Übereinstimmung zwischen diesem Zustand und der Vertikalverteilung am Ende der Umschichtungsphase (Minimum der statischen Energie), die sich danach nicht mehr wesentlich ändert: verglichen mit dem Anfangszustand hat $\hat{\Theta}_a^*$ oberhalb 6-7 km stark zugenommen, darunter durchweg abgenommen. Im dynamischen Fall ist von dieser Abnahme die unterste Schicht bis 1 km am wenigsten, der Bereich um 4 km am stärksten betroffen. Alle Ergebnisprofile weisen etwas unterhalb des Niveaus, wo sich das Änderungsvorzeichen umkehrt, ein ausgeprägtes Minimum auf. Eine solche Verteilung, die z.B. für die äquatorialen Tropen typisch ist (81, 52), folgt aus dem organisierten Charakter der Feuchtkonvektion und kann über das Konzept der verfügbaren kinetischen Energie verstanden werden. Entsprechend müßte die konvektive Umlagerung einer labilen trockenen Atmosphäre zu einer Schichtung mit nach oben monoton zunehmenden Θ -Werten führen (siehe die Bemerkungen im Anschluß an Gleichung [175]), was sich auch durch numerische Experimente realisieren ließ. Demgegenüber zielt die Mikroturbulenz als stochastischer Prozeß auf einen Ausgleich der potentiellen Temperaturen. Eine auf dieser Vorstellung aufbauende Parametrisierung der Konvektion (z.B. "convective adjustment" in (55)) wird somit dem Konvektionsvorgang nicht gerecht. Im weiteren Verlauf des Experimentes KONFEU 45 führt die Durchmischung im obersten Atmosphärendrittel zu einer Abnahme von $\partial\hat{\Theta}_a^*/\partial z$; das Ergebnis der Sekundärkonvektion besteht zum Zeitpunkt 60 min in einer weiteren Verminderung der $\hat{\Theta}_a^*$ -Werte unterhalb 4,4 km und einer entsprechenden Erhöhung oberhalb.

Auf die Vertikalprofile von \hat{m}_W^* und \hat{T}^* ($\hat{T}^* = \overline{q_c T^*} / \overline{q_c c_v}$) hat die Primärkonvektion den in Abbildung 50 dargestellten Effekt. Bei statischer Umschichtung ergibt sich oberhalb 6,5 km eine an tropfbarem Wasser reiche Wolke; die Analogie des dynamischen Vorgangs äußert sich in einer oberhalb 6 km vorhandenen markanten Zunahme des darunter unbedeutenden Flüssigwassergehaltes. Die Temperatur hat in allen Höhen zugenommen. Die dynamisch simulierten Änderungen weisen - ähnlich dem statischen Fall - ein Hauptmaximum (ca. 6 grad) am oberen Rand und ein sekundäres Maximum in mittleren Höhen (ca. 2,5 grad zwischen 4 und 5 km) auf. Die wesentliche Verringerung des vertikalen Temperaturgradienten hat oberhalb 6 km stattgefunden.

Dem Vergleich der Experimente KONFEU 43-45 dient Abbildung 51, in der die Vertikalprofile von \hat{Q}_a^* für den Zeitpunkt 60 min zusammen mit der Anfangsverteilung dargestellt sind. Im Vergleich zu den Experimenten mit ortsabhängigem Diffusionskoeffizienten (KONFEU 44, 45), die keine grundsätzlichen Unterschiede aufweisen, offenbart sich bei KONFEU 43 die Bedeutung, welche einer angemessenen Parametrisierung der zwar langsamen, aber weithin gleichgerichteten turbulenten Flüsse zukommt. In der unteren Atmosphäre ergibt sich aus dem ständigen überhöhten Aufwärtsfluß von Wasserdampf (latenter Wärme) eine beträchtlich erhöhte (verminderte) Abnahme von \hat{Q}_a^* unterhalb (oberhalb) 2 km gegenüber den Anfangswerten. In den oberen 4 Kilometern ist die turbulente Zielverteilung konstanten \hat{Q}_a^* fast erreicht.

3.2.4. Energetik

Wenn man die Energiebilanzgleichungen [79] - [81] und [82] in der Version [131] über das abgeschlossene Integrationsgebiet mittelt, gelangt man zu folgendem Energieschema des Gesamtsystems:



Hierin bedeuten

$$[181] \quad K = \overline{\varrho \frac{w^2}{2}}, \quad P = \overline{\varrho \phi}, \quad W = \overline{\varrho \bar{e}}, \quad E_T = \overline{\varrho \bar{e}_T}$$

die gebietsmittleren Inhalte an kinetischer Energie, potentieller Energie, Wärme und Turbulenzenergie entsprechend der in Abschn. 3.1. eingeführten Nomenklatur. Ihre zeitliche Änderung resultiert aus gebietsmittleren Transformationsraten

$$[182] \quad \begin{aligned} \{P \cdot K\} &= -\overline{g \varrho \bar{w}}, \quad \{K \cdot W\} = -\overline{\rho \nabla \cdot w}, \\ \{K \cdot E_T\} &= \overline{\varrho K_M \nabla w \cdot w \nabla}, \\ \{W \cdot E_T\} &= \overline{(\varrho K_H \nabla \frac{I}{\Theta} \cdot \nabla_{\varphi} \Theta)_{\ominus}} + \overline{(\varrho K_H \nabla \frac{I}{\Theta_a} \cdot \nabla_{\varphi a} \Theta_a)_{\ominus}}, \\ \overline{\varrho \bar{e}} &= \overline{\tau_M \cdot \nabla w} = \{(K+W) \cdot E_T\}, \end{aligned}$$

in welche die Parametrisierungsansätze [20b] für τ_T , [86] für f_{pf} in einer über [95], [96] modifizierten Form und [87] für f_{pa} bereits eingearbeitet wurden. Da der molekulare Reibungstensor in den prognostischen Gleichungen für Impuls ([91]) und Wärme ([92]) keine Berücksichtigung fand, vollzieht sich die Dissipation skaliger kinetischer Energie ausschließlich über die turbulente Form, und die pro Zeiteinheit in Wärme umgewandelte Turbulenzenergie, $\overline{\varrho \bar{e}}$, wird dem

skaligen System nicht wieder zugeführt. Das angegebene Schema gilt für den Ansatz $K_M = K_H = K(x, z, t)$ der Experimente KONFEU 44, 45. Der quasistationären Behandlung gemäß wird die turbulente Energieform als Durchgangsstation betrachtet und eine Änderung des gebietsmittleren Inhalts außer acht gelassen: dem positiv definiten (Ansatz [126]) Verlust $\overline{\rho \epsilon}$ steht ein gleichgroßer Gewinn aus dem skaligen Bereich, $\{(K+W) \cdot E_T\}$, gegenüber (s. [132]). Bestimmt man den turbulenten Diffusionskoeffizienten ohne Berücksichtigung energetischer Konsequenzen (KONFEU 43), kann die skalige Energie auch zunehmen, da $\{W \cdot E_T\}$ positiver und negativer Werte fähig ist. Die Zerlegung der Wärme in einen fühlbaren und einen latenten Anteil erfolgt in einem diagnostischen Prozeß, dessen Ergebnis auch die Kondensationsrate entnommen werden kann. In $\{W \cdot E_T\}$ gehen jedoch bei Sättigung beide Komponenten untrennbar ein, weshalb von einer Erweiterung des Schemas abgesehen wurde. Die Pfeile weisen in die Richtung des Energieflusses bei positivem Klammerausdruck. Dessen Definition wurde so gewählt, daß der tatsächliche Energiefluß bei festgelegtem Vorzeichen stets (dicker Pfeil), bei variablem Vorzeichen während der Umschichtungsphase überwiegend (dünner Pfeil) in diese Richtung geht. Seine einfachste Gestalt gewinnt das Energieschema durch Vereinigung der potentiellen Energie und Wärme zur statischen Energie ($S = P + W$) sowie der zugehörigen Transformationen ($\{S \cdot K\} = \{(P+W) \cdot K\}$, $\{S \cdot E_T\} = \{W \cdot E_T\}$).

Bei den numerischen Experimenten - die Beziehungen im q_L , m-System sind völlig analog - ergeben sich die Energieinhalte unmittelbar aus den Ergebnisfeldern. Der Berechnung liegen die o-Punkte zugrunde; sie befinden sich im Mittelpunkt von Elementarquadraten, in die sich das Integrationsgebiet zerlegen läßt. Wie aus dem Energieschema hervorgeht, können die Transformationsraten i.allg. nicht aus der zeitlichen Änderung der Energieinhalte erschlossen werden. Ihre zusätzliche Berechnung liefert zugleich eine physikalische Information und eine weitere Möglichkeit der Simulationskontrolle. Die datentechnisch begründete ausschließliche Verwendung des x-Systems für die Turbulenzterme bedeutet ein Abgehen von Zerlegungsformel [98b];

das innere Produkt wird vielmehr über die volle Länge der diagonalen Gitterpunktabstände gebildet und mit dem zentralen Originalwert von K und der räumlich gemittelten Dichte multipliziert (man vergleiche die Berechnung des turbulenten Flusses in [179]). Die Auswertung des Terms $\rho \nabla \cdot \omega$ entspricht dem Prognosesystem; bei $g g^w$, das dort numerisch nicht definiert ist, wurde der vertikale Massenfluß räumlich gemittelt.

Im Zeitintervall 20-50 min besteht zwischen den Transformationsraten und den jeweils über 200 Zeitschritte (80 sec) zentriert ermittelten Änderungen der Energieinhalte gute quantitative Konsistenz; das ergaben sowohl die kontinuierliche Kontrolle der gesamten skaligen Energie als auch Stichproben für einzelne Komponenten. Vorher führen numerische Adaptationsvorgänge zwischen den Gitterpunktfamilien sowie der Wechsel des K -Ansatzes bei KONFEU 44, 45 ($t = 10$ min) zu fiktiven Energieänderungen. Danach machen sich offenbar unzureichend aufgelöste Prozesse - die Inkonsistenzen treten bei KONFEU 43 nicht auf - bemerkbar. Da aber auch die kinetische Energie des Konvektionsvorganges erst nach 20 min relevant wird (Abb. 53, 56), erweist es sich für die Darstellung als zweckmäßig, von den Energieinhalten S , P , W ihre Werte zu diesem Zeitpunkt abzuziehen (Abb., 54, 55).

Der Auswertung der erwähnten energetischen Größen wollen wir eine Darstellung des gebietsmittleren Inhalts an tropfbarem Wasser (Abb. 52) voranstellen. Mit der Menge des für Niederschlagsvorgänge bereitgestellten Kondensats ist auch die dabei freigesetzte latente Wärme bekannt. Die Abbildung zeigt für alle Experimente einen - während des Aufstiegsvorgangs steilen - Anstieg bis zum Ende der Umschichtungsphase; danach kommt es zu Schwankungen um eine relativ hohe Gleichgewichtslage, die durch Sekundärkonvektion weiter angehoben werden kann. Zum Zeitpunkt 60 min bestehen nur geringe Unterschiede zwischen den Experimenten. Der angetroffene Wert von $0,38 \text{ g/m}^3$ entspricht bei vollständigem Ausfall einem über die Zellbreite gemittelten Niederschlag von 3,55 mm. Der in der Anfangsatmosphäre ausschließlich in Dampfform auftretende Inhalt an Wassersubstanz beträgt $4,7 \text{ g/m}^3$. Davon tritt während des simulierten Konvektionspro-

zesses maximal (KONFEU 45) knapp 10 % in kondensierter Form auf. Die $\bar{Q}_w = 0,38 \text{ g/m}^3$ entsprechende Verminderung des latenten Wärmeinhalts beläuft sich auf $1,2 \cdot 10^4 \text{ erg/cm}^3$. Dieser Betrag übersteigt die Schwankungen der Energieinhalte K, S, P, W (s. Abb. 53-55) um 1 bis 2 Zehnerpotenzen und kommt fast ausschließlich der fühlbaren Wärme zugute (s. auch Tab. 6, Typ b).

Der zeitliche Verlauf des gebietsmittleren Inhalts an kinetischer Energie (Abb. 53) offenbart den explosionsartigen Charakter des Instabilitätsphänomens "Konvektion". Die für KONFEU 45 erwähnte Ausbildung einer quasistationären Umschichtungsphase äußert sich in einem breitgezogenen Maximum. Am anschließenden raschen Abbau der kinetischen Energie ist die Rücktransformation in statische Energie (s. Abb. 57) in erheblichem Maße beteiligt.

Das macht die Zeitabhängigkeit des gebietsmittleren Inhalts an statischer Energie (Abb. 54) besonders deutlich. Der geschlossene seitliche Rand verhindert eine großflächige Ausbreitung der aufgestiegenen, potentiell wärmeren Luft ("Zirruschirm"); er erzwingt vielmehr massives Absinken (s. Abb. 23 ff.). Dieser Effekt erscheint beim Übergang von $L = H$ (KONFEU 44) auf $L = 2H$ (KONFEU 45) um rund 20 % reduziert. Bei KONFEU 43 erreicht S fast wieder das Ausgangsniveau; hierin äußert sich die energieunabhängige Turbulenzparametrisierung: gegenüber KONFEU 44, 45 sind die negativen Beiträge des Transformationsterms $\{S \cdot E_T\}$ verzehnfacht.

Zur energetischen Einschätzung des primären Umschichtungsvorgangs gehen wir von dem Betrag aus, um den der statische Energieinhalt innerhalb der Umschichtungsphase abgenommen hat ($S(t = 20 \text{ min}) - S_{\min}$). Derjenige Anteil, der davon der kinetischen Energie zugute kommt (K_W), wird über das zeitliche Integral der Transformationsterme $\{S \cdot K\}$ und $\{S \cdot E_T\}$ abgeschätzt. Es ergeben sich für die Experimente KONFEU 43, 44, 45 die K_W -Werte 304,5, 265,8, 301,2 erg/cm^3 . Von der verfügbaren kinetischen Energie $K_V = 1233,9 \text{ erg/cm}^3$ sind also nur die Bruchteile 0,247, 0,215, 0,244 bzw. 1/4,05, 1/4,65, 1/4,10 wirklich freigesetzt worden. Diese Werte beziehen sich auf den kurzen Zeitabschnitt der

aktiven Phase, und es ist nicht verwunderlich, wenn sie mehr als doppelt so groß sind wie der von Lorenz (51) angegebene Durchschnittswert für die quasihorizontale allgemeine Zirkulation (1/10). Das kinetische Energieäquivalent der Anfangsstörung mag dadurch abgeschätzt werden, daß man den ausgezeichneten Luftkörper vorgegebener Masse und mittlerer Temperaturabweichung bis zu demjenigen Niveau ohne Kondensation aufsteigen läßt, wo sein Auftrieb verschwindet. Bezogen auf das Volumen von KONFEU 45 ergibt sich ein gebietsmittlerer kinetischer Energiebeitrag von $2,2 \text{ erg/cm}^3$; das ist weniger als ein Hundertstel der maximal freigesetzten kinetischen Energie.

Über die Beiträge der Komponenten P und W zu den Schwankungen von S beim Experiment KONFEU 45 gibt Abbildung 55 Auskunft. Ins Auge fällt die Dominanz der potentiellen Energie, die sich schon nach den Ergebnissen der statischen Umschichtung (Tab. 6) vermuten ließ. Abweichend hiervon ist allerdings der Wärmehalt am Ende der Umschichtungsphase größer als am Anfang. Selbst wenn man die Abnahme von W, das in großzügiger Gegenläufigkeit zu P variiert, während der vorangegangenen Organisationsphase berücksichtigt, ergibt sich noch eine positive Differenz. Zur Erklärung muß auf die Tatsache verwiesen werden, daß bei der dynamischen Umschichtung auch Luftmassen mittlerer und höherer Niveaus am Aufstieg beteiligt werden, wodurch sich der Übergang von Wärme in potentielle Energie vermindert.

Die entscheidende Energietransformation stellt der Übergang statischer in kinetische Energie durch skalige Prozesse ($\{S \cdot K\}$; Abb. 56) dar. Die Experimente KONFEU 43 und 44 zeigen, abgesehen von einer Phasendifferenz von etwa einer Minute, einen ganz ähnlichen Verlauf; bei KONFEU 44 sind allerdings etwas kleinere Extremwerte und eine stärkere Zunahme am Ende des Zeitausschnitts (Sekundärkonvektion) zu beobachten. KONFEU 45 weist demgegenüber charakteristische Unterschiede auf. Der positive Bereich erstreckt sich bei verringertem Höchstwert über einen längeren Zeitraum, wobei ein sekundäres Maximum (Pulsation) angedeutet ist; die Rücktransformation vollzieht sich mit verminderter Intensität und hat ein kleineres Zeitintegral.

Für KONFEU 45 haben wir einmal die Energietransformationen durch skalige ($\{S \cdot K\}$) und turbulente ($\{S \cdot E_T\}$, $\{K \cdot E_T\}$) Prozesse nebeneinandergestellt (Abb. 57). Der Hauptenergiefluß nimmt, wie erwartet, den Weg $S \rightarrow K \rightarrow E_T$. Dabei hat das Verhältnis $\{K \cdot E_T\} / \{S \cdot K\}$ ("energy dissipation fraction", (19)) ein Minimum am Ende der Organisationsphase (20,01 min: 0,08) und wächst während der Umschichtungsphase zunächst langsam (Aufstiegsvorgang; 23,34 min: 0,10; 26,67 min: 0,13; 30,01 min: 0,18), später rasch (33,34 min: 0,66; 36,67 min: 1,03) an. Verglichen mit den Simulationsergebnissen trockener Warmluftkörper (42, 19) sind die Werte für den aufsteigenden Wolkenkörper, dessen Simulation die energiekonsistente Turbulenzparametrisierung zugrunde liegt, weniger als halb so groß. Bis zum Ende der Umschichtungsphase tragen skalige und turbulente Prozesse etwa im Verhältnis 10:1 zum Abbau statischer Energie bei. Danach wird ein Teil der aus mechanischen Quellen stammenden Turbulenzenergie über die Transformation $\{S \cdot E_T\} < 0$ in die skalige Form zurückverwandelt. Derjenige Anteil der turbulenten Transformationsraten, der zur endgültigen Dissipation beiträgt, ist in Abbildung 58 dargestellt. Die über den Zeitraum 20-50 min erstreckten Integrale von $\{K \cdot E_T\}_D$ bzw. $\{S \cdot E_T\}_D$ verhalten sich wie 4,6: 1.

Die Zusammenfassung $\{(K + S) \cdot E_T\} = \{(K + S) \cdot E_T\}_D$ (Abb. 59) kann als diejenige Schichtungsenergie angesprochen werden, die bei der Umschichtung im turbulenten System pro Zeiteinheit irreversibel in Wärme übergeht. Diese Größe ist bei den Experimenten KONFEU 44, 45, der Turbulenzparametrisierung gemäß, positiv definit. Sie erreicht ein Minimum gegen Ende der Organisationsphase; die beiden Maxima stehen mit dem Anstoß am oberen und seitlichen Rand in Zusammenhang; nach Abklingen des Primärvorganges kommt es durch Sekundärkonvektion zu erneutem Anstieg. Bei KONFEU 43 hingegen sind nur in einem Zeitabschnitt von 10 Minuten positive Werte zu beobachten. Ansonsten gibt der ständig negative Energiefluß $\{S \cdot E_T\}$ den Ausschlag und läßt den zeitlichen Verlauf von S (Abb. 54) verständlich erscheinen.

Um einen Einblick in die spektrale Gliederung des kinetischen Energieinhalts zu geben, wird das horizontale Energiespektrum der Vertikalbewegung (s. Abschn. 2.5.) zum Zeitpunkt 20,01 min für die 3 Experi-

mente vorgelegt (Abb. 60). Das Ende der Organisationsphase ist gemäß Tab. 7 durch eine nahezu stationäre spektrale Verteilung gekennzeichnet. Allgemein liegt das Maximum auf der Wellenlänge $\lambda_x = H$ ($1/l_0 = 2$); die Verbreiterung des Integrationsgebietes von $L = H$ auf $L = 2H$ übt, wie die Abbildungen 39 und 40 zeigen, nur einen geringen Einfluß auf die charakteristischen Abmessungen des aktiven Kernbereichs aus. Der Energieabfall jenseits der erzeugenden Maßstäbe geht rascher vor sich, als bei Existenz eines 2dimensionalen Trägheitsbereiches (-3-Gesetz) zu erwarten wäre; hier spielen möglicherweise negative Auftriebskräfte eine Rolle. Unterhalb von $\lambda_x = 3,5 \Delta$ ($1/l_0 = 16$) wird der Verlauf (nur für KONFEU 43, 44 berechnet) infolge mangelhafter numerischer Auflösung unregelmäßig und gibt lediglich den allgemeinen Trend wieder. Der Übergang auf ortsabhängige Behandlung des Diffusionskoeffizienten (KONFEU 43 → 44) und auf die doppelte Breite des Integrationsraumes (KONFEU 44 → 45) wirkt jeweils in die gleiche Richtung: die relativen Energieanteile erfahren für $\lambda_x \geq H/2$ ($1/l_0 \leq 4$) eine Zunahme, für $\lambda_x < H/2$ eine Abnahme.

3.2.5. Einfluß von K-Parametrisierung und vorgegebener Zellbreite auf den konvektiven Prozeß

In den Abschnitten 3.2.1. bis 3.2.4. wurden die Resultate des Hauptexperimentes KONFEU 45 durch Angaben zu den Parallelexperimenten KONFEU 43, 44 ergänzt, denen die gleichen Anfangs- und Randbedingungen zugrundeliegen. In einer Zusammenfassung wollen wir jetzt zeigen, wie und in welchem Ausmaß der simulierte konvektive Prozeß auf unterschiedliche K-Parametrisierung und Zellbreite anspricht. Im Vordergrund steht dabei die Entwicklung bis 30 min, bevor also der Wolkenkern den oberen Rand erreicht hat.

Zur Einschätzung der K-Parametrisierung ist das Experiment KONFEU 43 ($K = K(t)$, $L = H$) mit KONFEU 44 ($K = K(x, z, t)$, $L = H$) - bedingt auch mit KONFEU 45 ($K = K(x, z, t)$, $L = 2H$) - zu vergleichen. Beide Ansätze enthalten intuitive Elemente und ihre freien Parameter sind numeri-

schen Erfordernissen angepaßt. Wegen unserer mangelhaften Kenntnis der turbulenten Prozesse im Konvektionsraum fehlt die Basis für wohldefinierte physikalische Fragestellungen, und die Beurteilung muß sich auf Plausibilitätsargumente stützen. Diese sprechen einhellig für den Ansatz $K(x,z,t)$. Das Feld des Diffusionskoeffizienten (Abb. 38) entspricht in großen Zügen dem in Abschnitt 2.4. gezeichneten empirischen Bild. Demgemäß entfallen die aus $K(t)$ folgenden, unrealistisch großen turbulenten Vertikalflüsse im stabil geschichteten wolkenfreien Raum (vergleiche Abb. 47a - das entsprechende Bild für KONFEU 44 hat ähnliche Struktur - mit 47b). Durch den nicht-linearen Zusammenhang zwischen den subskaligen Flüssen und den skaligen Feldstrukturen wird die Maßstabsabhängigkeit der Glättung gesteigert, wodurch kleinere energieerzeugende Maßstäbe (Sekundärkonvektion; vergleiche Abb. 28b mit 28c) realisiert werden können. Schließlich gewährleisten die zu $K(x,z,t)$ führenden Energiebetrachtungen die innere Konsistenz des turbulenten Gleichungssystems, in dem keine fremdbürtigen Energiequellen auftreten (Abb. 59).

Wenn man den raum-zeit-abhängigen K -Ansatz einem zeitabhängigen gegenüberstellt, so sind von vornherein geringere Experimentunterschiede als beim Vergleich mit $K = \text{const}$ (4) zu erwarten, da in beiden Fällen der konvektiven Entwicklung Rechnung getragen wird. In Abb. 61 ist für KONFEU 45 der zeitliche Verlauf des maximalen K -Wertes in der angewendeten Felddarstellung aufgetragen; eine zusätzliche Kurve repräsentiert diejenigen ortsunabhängigen K -Werte, die sich bei Verwendung der Beziehung [119] ergeben hätten. Diese Darstellung kann für alle Experimente als typisch angesehen werden, da sich die skaligen Felder im entscheidenden achsennahen Bereich während der fraglichen Zeit (10-34 min) nicht wesentlich unterscheiden. Es zeigt sich, daß beide Ansätze nach Ingangkommen des Aufstiegsvorgangs etwa die gleichen, numerisch erforderlichen, K -Werte liefern (Maximum über $700 \text{ m}^2/\text{s}$). Unter Beseitigung der räumlichen Majorisierung in der Form $K(t)$ bleiben diese hohen Werte jedoch bei $K(x,z,t)$ auf kleine, kinematisch und/oder statisch ausgezeichnete Bereiche beschränkt (Abb. 38). Während der Organisationsphase, in der nur geringe zeitliche Änderungen zu beobachten sind, haben dagegen die

Feldmaxima durchschnittlich den fünffachen Wert des räumlich konstanten Diffusionskoeffizienten. Dem erhöhten Turbulenzeinfluß auf die Anfangsstörung ist es zuzuschreiben, wenn am Ende die Höhe charakteristischer Niveaus und die zugehörigen Horizontalabmessungen bei KONFEU 44 größer sind als bei KONFEU 43 (Abb. 39, 40, 43). Während des nachfolgenden Aufstiegs kehren sich die Verhältnisse um. Der Effekt des ortsunabhängigen Diffusionskoeffizienten äußert sich in einer stärkeren Zunahme der charakteristischen Horizontalabmessungen mit der Höhe (Abb. 39, 40). Da der turbulente Austausch im Kernbereich zunächst kleiner bleibt, kann der gegenüber KONFEU 44 positive Wertunterschied der Maxima von Flüssigwassergehalt (Abb. 42) bzw. Temperaturüberschuß, der bereits am Anfang festzustellen ist, weiter zunehmen. Am Maximum der Aufwindgeschwindigkeit (Abb. 41) ist der Einfluß des gesteigerten Auftriebs bis etwa 4 km zu erkennen; bis dahin fallen Aufwind- und Flüssigwassermaximum nahezu zusammen (Tab. 8). Der Geschwindigkeitsüberschuß von KONFEU 43 führt zu einer erhöhten Verlagerungsrate der charakteristischen Niveaus (Abb. 43). Er nimmt oberhalb 4 km wieder ab und wird ab 6 km sogar negativ (Tab. 9). Bis dahin hat sich ein Phasenvorsprung entwickelt (Abb. 56), der im weiteren Verlauf nur teilweise rückgebildet wird. Hinsichtlich der eingetretenen Maximalwerte von Aufwindgeschwindigkeit, Flüssigwassergehalt und Temperaturexzeß (Tab. 9) sowie der gebietsmittleren Inhalte an tropfbarem Wasser (Abb. 52) und kinetischer Energie (Abb. 53) liegen die Unterschiede zwischen den beiden Experimenten in der Größenordnung 10 %; die Phasendifferenz beläuft sich auf rund 1 Minute.

Um Rechenzeit zu sparen, wurde den Experimenten, die der Modellentwicklung dienten (bis KONFEU 44), ein Integrationsgebiet der Breite $L = H$ zugrundegelegt. Mit dem Übergang auf $L = 2H$ (KONFEU 45) erfolgte eine Anpassung an die - zumindest für flache Feuchtkonvektion - übliche (5, 76, 88) Dimensionierung. Das Problem der optimalen Zellbreite wurde nicht systematisch untersucht. Der Vergleich der Experimente KONFEU 44 und 45 liefert hierzu zwar einige Aussagen; er soll aber zunächst die physikalisch relevante Frage beantworten: Wie sprechen Konvektionsprozesse einheitlicher Physik (Mikrophysik, Turbu-

lenzparametrisierung) bei gleichen Anfangs- (Grundschichtung, Störung) und Randbedingungen auf unterschiedliche, vorgegebene Zellbreiten an? Man könnte sich ja auch meteorologisch eine Konfiguration vorstellen, bei der eine solche Bedingung durch in Gang befindliche Prozesse näherungsweise realisiert wird. Beschränkt man sich auf die Entwicklung der ersten 30 Minuten, so sind die Experimente unmittelbar vergleichbar. Im Zusammenhang mit der Ausbreitung aufgestiegener Warmluft treten später qualitative Unterschiede auf (quasistationäre Verhältnisse mit angedeuteter Pulsation nur bei KONFEU 45); in dieser Phase wird das Konzept einer seitlich abgeschlossenen Konvektionszelle grundsätzlich problematisch.

Obwohl der Lebensraum der Zelle KONFEU 45 gegenüber KONFEU 44 verdoppelt ist, nehmen die horizontalen Abmessungen des Kernbereichs nur mäßig zu (Abb. 39, 40). So vergrößern sich beispielsweise in 5 km Höhe der Abstand der Wirbelzentren (L_{∞}) von 2,1 auf 2,5 km, die Breite des Aufwindbandes ($L_{W\uparrow}$) von 2,1 auf 2,5 km und die Wolkenbreite (L_{mw}) von 3,1 auf 3,7 km, also allgemein um etwa 20 %. Diese Abmessungen hängen natürlich von der Schichtung ab. Setzt man bei $L = H$ die relative Feuchte der Oberschicht am Anfang gleich 0,7, so ergeben sich $L_{W\uparrow} = 1,5$ km und $L_{mw} = 2,6$ km; geringere Labilität bedingt kleinere Kernabmessungen. Mit einer Verbreiterung des Kernbereichs gehen Vergrößerungen der Achsenmaxima des Flüssigwassergehalts (Abb. 42) bzw. des Temperaturexzesses sowie des Aufwindes (Abb. 41) einher (Tab. 9). Ein früherer Phaseneintritt ist allgemein die Folge; er spiegelt sich sowohl in der Höhe charakteristischer Niveaus (z.B. H_{∞} , Abb. 43) als auch in der Transformationsrate statischer in kinetische Energie ($\{S \cdot K\}$, Abb. 56) wider. Der größte Teil des Zuwachses von L fällt hingegen dem Absinkbereich zu. Dadurch kommt es (s. Abschn. 3.2.2.) zu einer Halbierung des Verhältnisses zwischen mittlerer Absink- zu Aufstiegsgeschwindigkeit. Fazit: der Konvektionsprozeß paßt sich dem vergrößerten (verkleinerten) Lebensraum im wesentlichen durch eine Ausweitung (Schrumpfung) des Absinkbereiches mit dementsprechend verminderten (erhöhten) Vertikalgeschwindigkeiten an. Obwohl bei KONFEU 45 weniger Kondensationswärme freigesetzt wird (Abb. 52), ist der Vorgang energetisch effektiver (Abb. 56).

Indem der Konvektionsprozeß KONFEU 45 seinem Vergleichsfall in allen Gesichtspunkten überlegen ist, stellt sich nun die Frage nach Existenz und Größe einer optimalen Zellbreite. Sie könnte für die gegebene Anfangsatmosphäre beispielsweise durch systematische Variation von L mit der Transformationsrate $\{S \cdot K\}$ als Kriterium untersucht werden. Aus der Anwendung der linearen Theorie auf Konvektion in bedingt labiler Schichtung hat Kuo (35) für die Zellen maximaler Entwicklungsrate absolute Abmessungen bestimmt. Der Diffusionskoeffizient wird dabei zu $10^3 \text{ m}^2/\text{s}$, die vertikal einheitliche Schichtungsstabilität durch einen Parameter l charakterisiert, der sich für die Oberschicht unserer Anfangsatmosphäre aus der Beziehung $l^2 = (1 - \alpha)/\alpha$ ermitteln läßt. Setzt man für die Mächtigkeit der labilen Schicht (Oberschicht) den Wert 7,5 km ein, so gehören für Konvektionswalzen zu $l = 1; 2$ die Abmessungen $L_{w\uparrow} = 5,2; 3,1$ km, $L = 18,7; 30,0$ km und der als Flächenverhältnis anzusprechende Quotient $L_{w\uparrow}/L = 0,28; 0,10$. Kreisförmige Konvektionszellen weisen etwa das gleiche Flächenverhältnis und gleiche lineare Ausdehnung (Durchmesser anstelle der Breite) der Zelle auf. Aus den Zahlen geht hervor, daß mit abnehmender Labilität (l zu-, α abnehmend) die Zellbreite wächst, während - wie oben an einem numerischen Experiment gezeigt wurde - das Flächenverhältnis kleiner wird. Aus dem verwendeten α von 0,4 folgt für l der Wert 1,2. Damit ist das vorgegebene $L = 18,67$ km vom Empfehlungswert der linearen Theorie nicht allzu weit entfernt, und das gefundene Flächenverhältnis von 0,18 liegt im abgegrenzten Wertebereich.

Um Aussagen über - im nichtlinearen Fall - tatsächlich bevorzugte Zellbreiten zu erhalten, ist es erforderlich, dem trockenen Analogon (73, 70, 47) entsprechend ein horizontal sehr ausgedehntes, viele Zellen beherbergendes Integrationsgebiet vorzugeben und darin die Konvektion durch kleine Zufallsstörungen anzuregen. Auf diese Weise könnte nicht nur die Zellgliederung sondern zugleich auch der Umschichtungsvorgang, insbesondere in der Spätphase, realistisch simuliert werden. Hinsichtlich der Bestimmung relevanter Horizontalmittel (z.B. Vertikalflüsse) und Gebietsmittel (z.B. Energieumsetzungen) erscheint es weniger sinnvoll, anstedessen in einem ausgedehnten Integrationsgebiet ((106): $H = 14$ km, $L = 64$ km) einen

einzelnen Cumulonimbus zu simulieren, der seine Entstehung einer signifikanten Anfangsstörung verdankt. Gerade bei den räumlich gemittelten Größen unterscheiden sich die Experimente KONFEU 44 und 45 sowohl während der Hauptentwicklung (bis etwa 35 min; Abb. 52, 53, 54) als auch im Umschichtungsergebnis (Abb. 50, 51) auffallend wenig. Zudem findet sich der Zellbreitenunterschied in der Sekundärkonvektion wieder: beide Experimente zeitigen 2 aktive Wolken (in Abb. 28a, b angedeutet). Es liegt also die Vermutung nahe, daß sich die instationäre Feuchtkonvektion, über ihre Organisationsstruktur auf äußere Bedingungen elastisch reagierend, allgemein in einem Zellgrößenspektrum manifestieren wird.

4. Bilanz und Perspektiven

Fassen wir die wichtigsten Aspekte dieser Arbeit, die zugleich eine Abgrenzung gegen vergleichbare Untersuchungen markieren, zusammen!

Der Simulation feuchtkonvektiver Prozesse werden die ursprünglichen Eulerschen Gleichungen der Hydro-Thermodynamik zugrundegelegt. Die unangetastete Physik der Gleichungen umfaßt auch die meteorologisch irrelevanten Schallwellen, die sich aber als ungefährlich und energetisch belanglos erwiesen haben, sofern sie aus dem Anfangszustand hinreichend eliminiert sind. Andererseits gibt es bis heute kein praktikables schallgefiltertes Gleichungssystem, das den Ergebnissen der Maßstabsanalyse für hochreichende Feuchtkonvektion konsistent Rechnung trägt. Die Thermodynamik wird auf reversible Vorgänge (Sättigungsgleichgewicht, Mitführung des tropfbaren Wassers) spezialisiert, was jedoch keine grundsätzliche Einschränkung bedeutet.

Die Ansätze zur Parametrisierung der als stochastisch angesehenen subskaligen (turbulenten) Prozesse orientieren sich an der Formulierung der molekularen Diffusion. Als spezifische skalare Austauschgrößen werden individuelle Invarianten des diffusionsfreien molekularen Gleichungssystems herangezogen. Der skalare (Annahme der Isotropie) und für alle Austauschgrößen gleiche (Nichtunterscheidung vektorieller und skalarer Größen) Diffusionskoeffizient wird als Funktion von Ort und Zeit aus der quasistationären Behandlung der Bilanzgleichung für die Turbulenzenergie bestimmt, in die als Quellen sowohl das Strömungsfeld als auch die thermische Schichtung eingehen.

Der Integrationsablauf des ungefilterten Prognosesystems ist vom Typ der reinen Vorwärtsextrapolation. Das Nichtauftreten einer für gefilterte Systeme charakteristischen Randwertaufgabe muß durch einen relativ kleinen Zeitschritt erkauft werden. Das verwendete Differenzschema ist räumlich und zeitlich zentriert und auf einem (für alle Variablen gleich) versetzten Gitterpunktsystem definiert; besondere Aufmerksamkeit wird einer bilanztreuen Formulierung der diffusiven Flüsse gewidmet. Dieses Schema ist numerisch stabil, wenn man die linearen Stabilitätsbedingungen (Courant-Friedrichs-Lewy-Kriterium;

räumliche Mittelung des Terms $g\varrho$ in der vertikalen Bewegungsgleichung) erfüllt und wenn die Parametrisierungsansätze für den turbulenten Diffusionskoeffizienten (provisorisch $K = K(t)$, endgültig $K = K(x,z,t)$) die erforderliche Größenordnung und Feldstruktur liefern. Letztere sind vereinbar mit den vorliegenden Meßdaten. Das amplitudenneutrale Verhalten des Bocksprung-Schemas erlaubt es, die Effekte expliziter Diffusionsansätze miteinander quantitativ zu vergleichen.

Die physikalischen Gleichungen werden auf das ebene Querschnittssystem einer in Längsrichtung unendlich ausgedehnten Wolkenwalze (Einzelzelle) angewendet. Das Integrationsgebiet vorgegebener Höhe und Breite ist physikalisch abgeschlossen: Die kinetische Energie des Prozesses entstammt vollständig der statischen Energie der theoretischen Anfangsatmosphäre, die eine feuchtlabile Schicht (Oberschicht) enthält; der simulierte Vorgang verkörpert somit die Abbau-phase eines Instabilitätszyklus. Die indirekte Auslösung der Feuchtkonvektion in der Oberschicht durch einen Warmluftkörper in der neutralen Grundschicht ermöglicht bis zu einem gewissen Grade die Selbstfestlegung der internen Proportionen. Schallwellen beträchtlicher Amplitude, die aus der Anfangsstörung hervorgehen können, werden durch eine schallfilternde Adaptation der Anfangsfelder beseitigt.

Die einfache Modellphysik (reversible Thermodynamik, abgeschlossenes System) läßt den Aspekt der Luftmassenumschichtung und ihrer energetischen Konsequenzen deutlich hervortreten. Diesbezügliche Ergebnisse dynamischer Abläufe erfahren durch parallel vorgenommene statische Umlagerungen, die der Ermittlung der verfügbaren kinetischen Energie und des zugehörigen Schichtungszustands dienen, eine qualitative Deutung.

Die Ergebnisse der numerischen Experimente mithilfe des neuentwickelten Prognosesystems haben dessen Tauglichkeit und - soweit zu erkennen - relative Überlegenheit erwiesen, so daß ein Weiterschreiten auf diesem Wege angezeigt erscheint.

Das Element der Konvektion ist zwar die Einzelzelle, aber ihr Heraustrennen aus dem räumlichen Zusammenhang geschieht unter Vorbehalt. Dennoch kann erwartet werden, daß bei genügender Ausweitung des Integrationsraumes in vertikaler und horizontaler Richtung der Mechanismus eines einzelnen hochreichenden feuchtkonvektiven Prozesses sich realistisch simulieren läßt. Schon aus Gründen des numerischen Aufwandes wird die weiterführende Forschung zunächst auf eine realistischere Abbildung der Einzelzelle zielen.

Die interne Physik des Modells ist vor allem durch die Mikrophysik der Wolke (Niederschlagsvorgang einer Wasser- oder Mischwolke) zu ergänzen; hierzu liegen bereits brauchbare Formulierungen vor. In Abänderung der Randbedingungen könnten beispielsweise nichtmaterielle Flüsse über den unteren Rand (Reibung, Transport fühlbarer Wärme, Verdunstung) Berücksichtigung finden. Hierdurch ließe sich - evtl. in Verbindung mit langwelliger Abstrahlung am oberen Wolkenrand - die konvektive Erwärmung einer Luftmasse über beheizter Unterlage (Aspekt der Quasistationarität; allgemeine konvektive Zirkulation) simulieren. Wird ein horizontaler Grundstrom mit betragsmäßiger Vertikalscherung vorausgesetzt, so sind seitlich offene oder zyklische Randbedingungen anzuwenden.

Möglichkeiten der Verbesserung liegen auch in der Geometrie. In wind-schwachen Konvektionslagen scheinen sich eher kreisförmige Zellen als Konvektionswalzen auszubilden. Axialsymmetrische Zellen erweisen sich in numerischen Experimenten als effektiver. Auch erfordern sie keinen numerischen Mehraufwand. Eine echte 3dimensionale Behandlung ist bei Voraussetzung eines vertikal gescherten Grundstroms zu verlangen; sie hat vermutlich auch für eine realistische Simulation der Energiekaskade an der Auflösungsgrenze Bedeutung. Der vergrößerte Rechenaufwand läßt sich durch Symmetrieanahmen reduzieren.

Für eine endgültige Beurteilung der numerischen Simulation von Einzelzellen ist es dringend erforderlich, sich nicht auf relative Vergleiche verschiedener Modellmodifikationen zu beschränken und mit einer qualitativen Ähnlichkeit von Modell und Naturphänomen zufriedenzugeben, sondern das Kriterium der Praxis anzuwenden. Erst

die quantitative Gegenüberstellung von Meßdaten (Radiosonde, Flugzeug, Radar) und Rechenergebnissen kann zeigen, inwieweit feucht-konvektive Prozesse durch bestimmte Modelle erfaßt werden.

Eine adäquate Nachbildung der konvektiven Aktivität der Atmosphäre verspricht allerdings erst die Behandlung größerer Areale, die viele Zellen zu produzieren vermögen. Das ist das Fernziel der Simulation. Aus derartigen Experimenten sollten Zellgrößenverteilungen bzw. bevorzugte Zellabmessungen in Abhängigkeit von der Anfangsschichtung (instationärer Fall) oder von mittleren Vertikalverteilungen (quasi-stationärer Fall) zu entnehmen sein. Der instationäre Fall ist beispielsweise in sommerlichen Nachmittagsgewittern realisiert. Es steht zu hoffen, daß der hochreichende konvektive Abbau instabiler Schichtung von den Prozessen, die sie herbeiführten (Vorgeschichte; insbes. Konvektion kleineren Maßstabs), weitgehend entkoppelt behandelt werden kann. Beim quasistationären Fall ist u.a. an äquatorwärts vorstoßende Polarluft gedacht, innerhalb derer durch die wärmer werdende Unterlage ständig hochreichende Konvektion aufrechterhalten wird. Mithilfe der Großraumsimulation könnten Wechselwirkungen zwischen den Zellen und die Herausbildung mesomaßstäbiger Strukturen ("clusters"; "open cells", "closed cells") studiert werden. Für eine zeitsparende qualitative Untersuchung dieser Gesichtspunkte bietet sich wiederum die ebene 2dimensionale Version an.

Auch der Bedarf großmaßstäbiger Modelle mit Gitterweiten von mehreren hundert Kilometern besteht letztlich in konvektiven Vertikalflüssen, die über das Gitterflächenelement gemittelt sind. Deren Parametrisierung steht heute noch am Anfang, und die existierenden Ansätze sind nicht frei von Willkür. Als ein systematisches und physikalisch kontrollierbares Entwicklungsverfahren wäre eine stufenweise Parametrisierung über eine Hierarchie von Modellen (z.B. Zellsystem, repräsentative Einzelzelle in 3-, 2-, 1dimensionaler Formulierung, eventuelle weitergehende Abstraktion) vorstellbar. Jedes Modell einer bestimmten Explizitätsstufe besitzt gegenüber dem nächsthöherstehenden Parametrisierungselemente, die auf ihre Brauch-

barkeit geprüft bzw. mit optimalen Parameterwerten ausgestattet werden können.

Zunächst geht es jedoch vor allem darum, die physikalisch-numerische Basis der expliziten Simulation konvektiver Prozesse zu verbessern. Hierzu sollte diese Arbeit beitragen.

ANMERKUNG. Die vorliegende Arbeit ist in der Forschungsabteilung des Deutschen Wetterdienstes entstanden und stellt einen Beitrag zum Simulationsprojekt der Allgemeinen Atmosphärischen Zirkulation (SPAAZ) dar, das 1967 von theoretisch orientierten meteorologischen Institutionen der Bundesrepublik auf Initiative von Prof. Dr. H. Fortak ins Leben gerufen wurde.

Dem ehemaligen Leiter der Forschungsabteilung, Dr. H. Christians, und seinem Nachfolger, Dr. H. Reiser, verdanke ich großzügige Arbeitsmöglichkeiten während der Durchführung (1970-1973), der SPAAZ-Gruppe stete Ermutigung durch wissenschaftliche Resonanz. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Hinkelmann für viele anregende und vertiefende Diskussionen sowie anderweitige Unterstützung.

Voruntersuchungen zum trockenen System wurden 1969/70 gemeinsam mit Frl. Elke Grimm durchgeführt, die diese Richtung mit der Untersuchung "Numerische Experimente zur Ermittlung charakteristischer Abmessungen und Intensitäten von Konvektionszellen" (Diss. TH Darmstadt 1972) weiterverfolgt hat.

Literatur

- (1) ACKERMANN, B.: The nature of the meteorological fluctuations in clouds. J.Appl.Meteor. 6 (1967) Nr. 1, S.61-71.
- (2) ALEKSANDROV, V.S.; SILAYEVA, V.I.; SHMETER, S.M.: Atmospheric turbulence in and near cumulonimbus clouds. Trudy Centr.Aerol. Obs. 78 (1967) S.32-49. Transl. Air Force Cambridge Res. Labor.Nr. 45 (1969) = AFCRL-69-0178.
- (3) AMIROV, A.D.: Development of thermals and cumulus clouds in a stratified atmosphere. Izv.Acad.Sci.USSR Atmosph.Oceanic Phys., Washington/D.C., 2 (1966) Nr. 5, S.271-279.
- (4) AMIROV, A.D.: On the role of turbulence in convective motion. Izv.Acad.Sci.USSR Atmosph.Oceanic Phys., Washington/D.C., 2 (1966) Nr. 7. S.427-431.
- (5) ARNASON, G.; GREENFIELD, R.S.; NEWBURG, E.A.: A numerical experiment in dry and moist convection including the rain stage. J.Atmosph.Sci. 25 (1968) Nr. 3, S.404-415.
- (6) ARNASON, G.; GREENFIELD, R.S.: Micro- and macro-structures of numerically simulated convective clouds. J.Atmosph.Sci. 29 (1972) Nr. 2, S.342-367.
- (7) ASAI, T.: Numerical experiment of cumulus convection under the pseudo-adiabatic process. Pap.Meteor.Geophys., Tokyo, 15 (1964) Nr. 1, S.1-30.
- (8) ASAI, T.: Cumulus convection in the atmosphere with vertical wind shear: numerical experiment. J.Meteor.Soc.Japan 42 (1964) Nr. 4, S.245-259.
- (9) ASAI, T.: Three-dimensional features of thermal convection in a plane Couette flow. J.Meteor.Soc.Japan 48 (1970) Nr. 1, S.18-29.
- (10) ASAI, T.; KASAHARA, A.: A theoretical study of the compensating downward motions associated with cumulus clouds. J.Atmosph.Sci. 24 (1967) Nr. 5, S.487-496.
- (11) AUSTIN, P.M.: Microstructure of storms as described by quantitative radar data. In: Weickmann, H. (Ed.), Physics of precipitation. Washington/D.C.: American Geophysical Union 1960 = Geophys. Monogr. 5, S.86-93.
- (12) BERRY, E.X.: Modification of the warm rain process. Proc. 1st Nat.Conf.Weather Modification, Albany, New York 1968. S.81-88.
- (13) BJERKNES, J.: Saturated-adiabatic ascent of air through dry-adiabatically descending environment. Quart.J.Roy.Meteor.Soc. 64 (1938) Nr. 275, S.325-330.

- (14) BROWNING, K.A.; LUDLAM, F.H.: Air-flow in convective storms. Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 88 (1962) Nr. 376, S.117-135.
- (15) BYERS, H.R.; BRAHAM, R.R.: The thunderstorm. Washington: Weather Bureau 1949.
- (16) CATON, P.G.F.: A study of raindrop-size distributions in the free atmosphere. Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 92 (1966) Nr. 391, S.15-30.
- (17) COURVOISIER, P.: Über Luftdruckvariographen und Luftdruckschwankungen. Archiv Meteor. Geophys. Bioklimat. Ser. A 1 (1948) S.1-38.
- (18) CROWLEY, W.P.: Numerical advection experiments. Monthly Weather Rev. 96 (1968) Nr. 1, S.1-11.
- (19) DALEY, R.; MERILEES, P.: A spectral model of bubble convection. J. Atmosph. Sci. 28 (1971) Nr. 6, S.933-943.
- (20) DANIELSEN, E.F.; BLECK, R.; MORRIS, D.A.: Hail growth by stochastic collection in a cumulus model. J. Atmosph. Sci. 29 (1972) Nr. 1, S.135-155.
- (21) DAS, P.: Role of condensed water in the life cycle of a convective cloud. J. Atmosph. Sci. 21 (1964) Nr. 4, S.404-418.
- (22) DEARDORFF, J.W.: Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers. J. Atmosph. Sci. 29 (1972) Nr. 1, S.91-115.
- (23) DESSENS, H.: Severe hail storms are associated with very strong winds between 6000 and 12000 meters. In: Weickmann, H. (Ed.), Physics of precipitation. Washington/D.C.: American Geophysical Union 1960 = Geophys. Monogr. 5. S.333-338.
- (24) DUFOUR, L.; DEFAY, R.: Thermodynamics of clouds. New York and London: Academic Press 1963.
- (25) DUTTON, J.A.; FICHTL, G.H.: Approximate equations of motion for gases and liquids. J. Atmosph. Sci. 26 (1969) Nr. 2, S.241-254.
- (26) ECKART, C.: Hydrodynamics of oceans and atmospheres. Oxford u.a.: Pergamon Press 1960.
- (27) ELLISON, T.H.: Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plane. J. Fluid Mech. 2 (1957) S.456-466.
- (28) FORSYTHE, G.E.; WASOW, W.R.: Finite-difference methods for partial differential equations. New York u.a.: J. Wiley and Sons, Inc. 1960.
- (29) FORTAK, H.: Meteorologie. Berlin u. Darmstadt: Carl Habel 1971.

- (30) FOX, D.G.: Numerical simulation of three-dimensional, shape-preserving convective elements. *J. Atmosph. Sci.* 29 (1972) Nr. 2, S. 322-341.
- (31) HALTINER, G.J.: Numerical weather prediction. New York u.a.: J. Wiley and Sons, Inc. 1971.
- (32) JONES, R.F.: Size-distribution of ice crystals in cumulonimbus clouds. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 86 (1960) Nr. 368, S. 187-194.
- (33) KESSLER, E.: On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations. *Meteor. Monogr.* 10 (1969) Nr. 32.
- (34) KRAICHNAN, R.H.: Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* 10 (1967) S. 1417-1423.
- (35) KUO, H.L.: Convection in conditionally unstable atmosphere. *Tellus*, Stockholm, 13 (1961) Nr. 4, S. 441-459.
- (36) KUO, H.L.: Perturbation of plane Couette flow in stratified fluid and origin of cloud streets. *Phys. Fluids* 6 (1963) S. 195-211.
- (37) LEBEDEV, S.L.: Non-stationary unidimensional model of a convective cloud. (Orig. russ.) *Doklady Akad. Nauk SSSR* 156 (1964) Nr. 4, S. 806-809.
- (38) LEBEDEV, S.L.: A three-dimensional nonstationary model of an atmospheric convective cell with a cloud. *Izv. Acad. Sci. USSR Atmosph. Oceanic Phys.*, Washington/D.C., 2 (1966) Nr. 1, S. 8-14.
- (39) LEBEDEV, S.L.: On rainfall from a convective cloud. (Orig. russ.) *Meteor. i Gidrol.* 1969 Nr. 2, S. 65-70.
- (40) LEITH, C.: Internal turbulence and vertical momentum transfer. In: *Parameterization of sub-grid scale processes. WMO/ICSU 1972 = GARP Publications Series Nr. 8.* S. 40-51.
- (41) LILLY, D.K.: A proposed staggered-grid system for numerical integration of dynamic equations. *Monthly Weather Rev.* 89 (1961) Nr. 3, S. 59-65.
- (42) LILLY, D.K.: On the numerical simulation of buoyant convection. *Tellus*, Stockholm, 14 (1962) Nr. 2, S. 148-172.
- (43) LILLY, D.K.: Numerical solutions for the shape-preserving two-dimensional thermal convection element. *J. Atmosph. Sci.* 21 (1964) Nr. 1, S. 83-98.
- (44) LILLY, D.K.: On the computational stability of numerical solutions of time-dependent nonlinear geophysical fluid dynamics problems. *Monthly Weather Rev.* 93 (1965) Nr. 1, S. 11-26.

- (45) LILLY, D.K.: The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. Proc. IBM Scient. Computing Symp. Environm. Sci., 14.-16. Nov. 1966 Yorktown Heights, N.Y. S.195-210.
- (46) LILLY, D.K.: Comments on "Venus's general circulation is a merry-go-round." J. Atmosph. Sci. 28 (1971) Nr. 5, S.827-828.
- (47) LIPPS, F.B.: Two-dimensional numerical experiments in thermal convection with vertical shear. J. Atmosph. Sci. 28 (1971) Nr. 1, S.3-19.
- (48) LIST, R.; LOZOWSKI, E.P.: Pressure perturbations and buoyancy in convective clouds. J. Atmosph. Sci. 27 (1970) Nr. 1, S.168-170.
- (49) LITWIN, W.: Die Energie trocken- und feuchtlabiler Schichtungen. Forsch.-Arb. Staatl. Obs. Danzig Nr. 4 (1935).
- (50) LIU, J.Y.; ORVILLE, H.D.: Numerical modeling of precipitation and cloud shadow effects on mountain-induced cumuli. J. Atmosph. Sci. 26 (1969) Nr. 6, S.1283-1298.
- (51) LORENZ, E.N.: Available potential energy and the maintenance of the general circulation. Tellus, Stockholm, 7 (1955) Nr. 2, S.157-167.
- (52) MADDEN, R.A.; ROBITAILLE, F.E.: A comparison of the equivalent potential temperature and the static energy. J. Atmosph. Sci. 27 (1970) Nr. 2, S.327-329.
- (53) MALKUS, J.S.: On the structure of the trade wind moist layer. Pap. Phys. Oceanogr. Meteor. 13 (1958) Nr. 2.
- (54) MALKUS, J.S.; WITT, G.: The evolution of a convective element: a numerical calculation. In: Bolin, B. (Ed.), The atmosphere and the sea in motion. New York: The Rockefeller Institute Press in assoc. with Oxford University Press 1959. S.425-439.
- (55) MANABE, S.; SMAGORINSKY, J.; STRICKLER, R.F.: Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle. Monthly Weather Rev. 93 (1965) Nr. 12, S.769-798.
- (56) MARGULES, M.: Zur Sturmtheorie. Meteor. Z. 23 (1906) Nr. 11, S.481-497.
- (57) MARSHALL, J.S.; MAC PALMER, W.: The distribution of raindrops with size. J. Meteor. 5 (1948) Nr. 4, S.165-166.
- (58) MASON, B.J.: Some outstanding problems in cloud physics - the interaction of microphysical and dynamical processes. Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 95 (1969) Nr. 405, S.449-485.

- (59) MASON, B.J.; EMIG, R.: Calculations of the ascent of a saturated buoyant parcel with mixing. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 87 (1961) Nr. 372, S. 212-222.
- (60) MIEGHEM, J.VAN; DUFOUR, L.: Thermodynamique de l'atmosphère. *Mém. Inst. Roy. de Belgique* 30 (1948).
- (61) MOLENKAMP, C.R.: Accuracy of finite-difference methods applied to the advection equation. *J. Appl. Meteor.* 7 (1968) Nr. 2, S. 160-167.
- (62) MURRAY, F.W.: Numerical models of a tropical cumulus cloud with bilateral and axial symmetry. *Monthly Weather Rev.* 98 (1970) Nr. 1, S. 14-28.
- (63) MURRAY, F.W.: Humidity augmentation as the initial impulse in a numerical cloud model. *Monthly Weather Rev.* 99 (1971) Nr. 1, S. 37-48.
- (64) MURRAY, F.W.; KOENIG, L.R.: Numerical experiments on the relation between microphysics and dynamics in cumulus convection. Santa Monica/Cal.: Rand Corp. 1971 = R-852-ARPA. Contract DAHC15-67-C-0141. AD733670.
- (65) NEWTON, C.W.: Circulations in large sheared cumulonimbus. *Tellus*, Stockholm, 18 (1966) Nr. 4, S. 699-713.
- (66) NEWTON, C.W.: Severe convective storms. In: Landsberg, H.E.; Miegheem, J. van (Ed.), *Advances in Geophysics*. Vol. 12. New York and London: Academic Press 1967. S. 257-308.
- (67) NICKERSON, E.C.: A numerical experiment in buoyant convection involving the use of a heat source. *J. Atmosph. Sci.* 22 (1965) Nr. 4, S. 412-418.
- (68) OGURA, Y.: Convection of isolated masses of a buoyant fluid: a numerical calculation. *J. Atmosph. Sci.* 19 (1962) Nr. 6, S. 492-502.
- (69) OGURA, Y.: The evolution of a moist convective element in a shallow, conditionally unstable atmosphere: a numerical calculation. *J. Atmosph. Sci.* 20 (1963) Nr. 5, S. 407-424.
- (70) OGURA, Y.: A numerical study of wavenumber selection in finite-amplitude Rayleigh convection. *J. Atmosph. Sci.* 28 (1971) Nr. 5, S. 709-717.
- (71) OGURA, Y.; PHILLIPS, N.A.: Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere. *J. Atmosph. Sci.* 19 (1962) Nr. 2, S. 173-179.

- (72) OGURA, Y.; TAKAHASHI, T.: Numerical simulation of the life cycle of a thunderstorm cell. *Monthly Weather Rev.* 99 (1971) Nr. 12, S.895-911.
- (73) OGURA, Y.; YAGIHASHI, A.: On the degeneracy of finite-amplitude steady-state solutions for Bénard-convection in a highly truncated system. *J.Meteor.Soc.Japan* 47 (1969) Nr. 6, S.437-445.
- (74) OGURA, Y.; YAGIHASHI, A.: A numerical study of finite-amplitude time-dependent convection induced by time-independent internal heating: truncated systems. *J.Meteor.Soc.Japan* 48 (1970) Nr. 1, S.1-17.
- (75) ORSZAG, S.A.: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: accuracy. *J.Fluid Mech.* 49 (1971) S.75-112.
- (76) ORVILLE, H.D.: Ambient wind effects on the initiation and development of cumulus clouds over mountains. *J.Atmosph.Sci.* 25 (1968) Nr. 3, S.385-403.
- (77) ORVILLE, H.D.; SLOAN, L.J.: Effects of higher order advection techniques on a numerical cloud model. *Monthly Weather Rev.* 98 (1970) Nr. 1, S.7-13.
- (78) ORVILLE, H.D.; SLOAN, L.J.: A numerical simulation of the life history of a rainstorm. *J.Atmosph.Sci.* 27 (1970) Nr. 8, S.1148-1159.
- (79) PETERMAN, W.A.: A model for a climatology of the potential of ice-phase modification of convective clouds. Norfolk/Va.: Navy Weather Research Facility 1967 = NAVWEARSCHFAC Techn.Pap. Nr. 8-67.
- (80) PINUS, N.Z.; LITVINOVA, V.D.: On the intensity of turbulence in clouds. *Bull. (Izv.) Acad.Sci.USSR Geophys.Ser.* 1962 Nr. 1, S.86-88.
- (81) RIEHL, H.; MALKUS, J.S.: On the heat balance in the equatorial trough zone. *Geophysica, Helsinki*, 6 (1958) S. 503-538.
- (82) SCHNAIDT, F.: Über die adiabatischen Zustandsänderungen feuchter Luft, die abgeleiteten Temperaturen und den Energievorrat atmosphärischer Schichtungen. *Gerlands Beitr.Geophys.* 60 (1943) Nr. 1/2, S.16-138.
- (83) SCORER, R.S.: Experiments on convection of isolated masses of buoyant fluid. *J.Fluid Mech.* 2 (1957) S.583-594.
- (84) SIMPSON, J.; WIGGERT, V.: Models of precipitating cumulus towers. *Monthly Weather Rev.* 97 (1969) Nr. 7, S.471-489.

- (85) SMAGORINSKY, J.: General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment. Monthly Weather Rev. 91 (1963) Nr. 3, S.99-164.
- (86) ŠMETER, S.M.; SILAEVA, V.I.: The vertical flows in cumulonimbus. (Orig.russ.) Meteor.i Gidrol. 1966 Nr. 11, S.7-13.
- (87) SRIVASTAVA, R.C.: A study of the effect of precipitation on cumulus dynamics. J.Atmosph.Sci. 24 (1967) Nr. 1, S.36-45.
- (88) STEINER, J.T.: A three dimensional numerical model of atmospheric convection. Sci.Rep. McGill Univ. Stormy Weather Group MW-73 (1972).
- (89) STOMMEL, H.: Entrainment of air into a cumulus cloud. J.Meteor. 4 (1947) Nr. 3, S.91-94.
- (90) TAKEDA, T.: The downdraft in convective shower-cloud under the vertical wind shear and its significance for the maintenance of convective system. J.Meteor.Soc.Japan 43 (1965) Nr. 6, S.302-309.
- (91) TAKEDA, T.: The downdraft in the convective cloud and raindrops: a numerical computation. J.Meteor.Soc.Japan 44 (1966) Nr. 1, S.1-11.
- (92) TAKEDA, T.: Effects of the prevailing wind with vertical shear on the convective cloud accompanied with heavy rainfall. J. Meteor.Soc.Japan 44 (1966) Nr. 2, S.129-144.
- (93) TAKEDA, T.: Numerical simulation of large convective clouds. Sci.Rep. McGill Univ. Stormy Weather Group MW-64 (1969).
- (94) TAKEDA, T.: Numerical simulation of a precipitating convective cloud: the formation of a "long-lasting" cloud. J.Atmosph.Sci. 28 (1971) Nr. 3, S.350-376.
- (95) THOMPSON, P.D.: Numerical weather analysis and prediction. New York: The Macmillan Company 1961.
- (96) THOMPSON, R.O.R.Y.: Reply. J.Atmosph.Sci. 28 (1971) Nr. 5, S.828.
- (97) THRAN, P.: Untersuchungen über das Wesen statisch steigender, trockener Luftmassen in der Atmosphäre und über Größe und Wirkungsweise der dabei auftretenden Scheinreibung. Diss.Univ. Königsberg 1935.
- (98) VINNIČENKO, N.K.; PINUS, N.Z.; ŠMETER, S.M.; Šur, G.N.: Turbulentnost' v svobodnoj atmosfere (Turbulenz in der freien Atmosphäre, Orig.russ.) Leningrad: Gidrometeor.Izdat. 1968.

- (99) VULFSON, N.I.: A method of studying downward compensation air currents about developing cumuli. (Orig.russ.) Doklady Akad. Nauk SSSR 112 (1952) S.626-627.
- (100) WARNER, J.: The microstructure of cumulus cloud. Part III. The nature of the updraft. J.Atmosph.Sci. 27 (1970) Nr. 4, S.682-688.
- (101) WARNER, J.: On steady-state one-dimensional models of cumulus convection. J.Atmosph.Sci. 27 (1970) Nr. 7, S.1035-1040.
- (102) WEINSTEIN, A.I.: A numerical model of cumulus dynamics and microphysics. J.Atmosph.Sci. 27 (1970) Nr. 2, S.246-255.
- (103) WEINSTEIN, A.I.; DAVIS, L.G.: A parameterized numerical model of cumulus convection. University Park/Pa.: Pennsylvania State Univ., Dept.Meteor. 1968 = Rep.Nr. 11 to the National Science Foundation. NSF-GA-777. PB 179 389.
- (104) WEINSTEIN, A.I.; MAC CREADY, P.B.: An isolated cumulus cloud modification project. J.Appl.Meteor. 8 (1969) Nr. 6, S.936-947.
- (105) WEIZEL, W.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Bd. 1. Berlin u.a.: Springer 1949.
- (106) WILHELMSON, R.; OGURA, Y.: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. J.Atmosph.Sci. 29 (1972) Nr. 7, S.1295-1307.
- (107) WISNER, C.; ORVILLE, H.D.; MYERS, C.: A numerical model of a hail-bearing cloud. J.Atmosph.Sci. 29 (1972) Nr. 6, S.1160-1181.
- (108) WOODWARD, B.: The motion in and around isolated thermals. Quart. J.Roy.Meteor.Soc. 85 (1959) Nr. 364, S.144-151.
- (109) ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik. 2.Aufl. Berlin u.a.: Springer 1957.

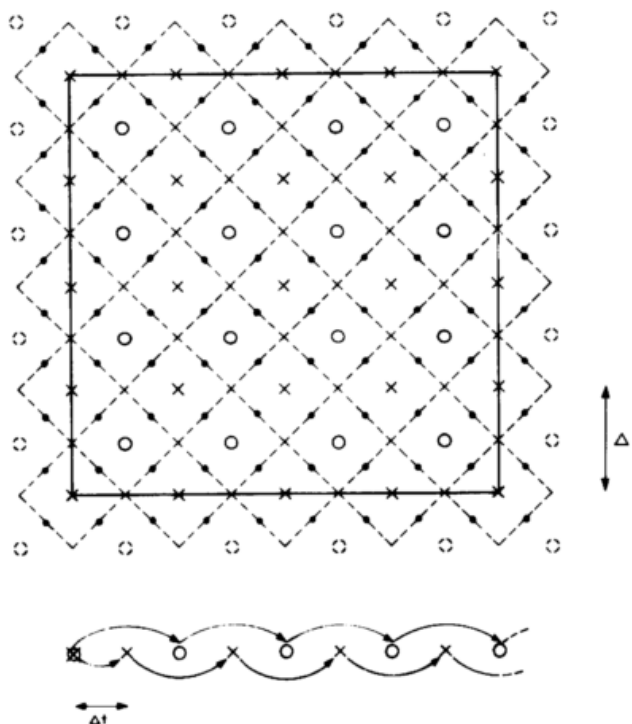


Abb. 1a
Gitterpunktschema, das den Konvektionsexperimenten zugrundeliegt

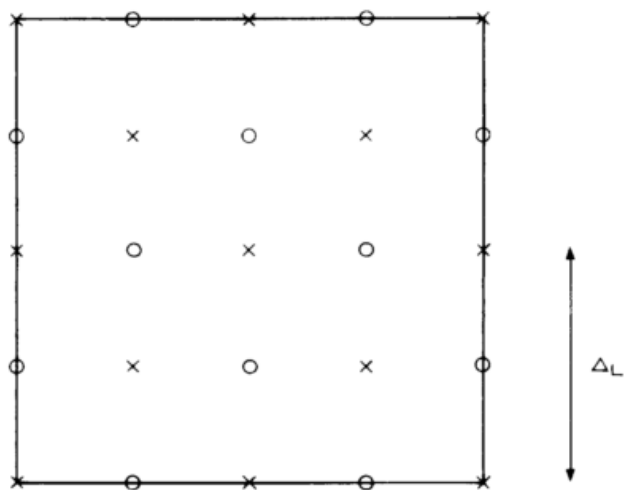


Abb. 1b
Gitterpunktschema, das 1962 von Lilly in Konvektionsexperimenten verwendet wurde

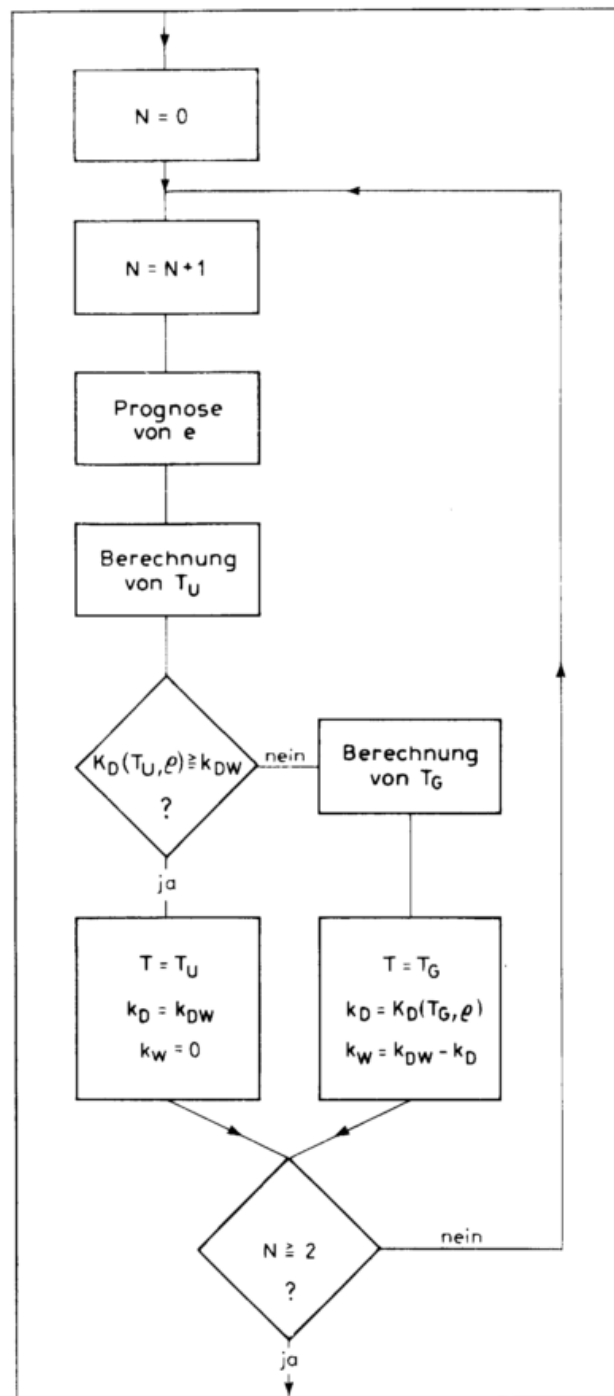


Abb. 2
Flußdiagramm für den diagnostischen Prozeß zur Bestimmung von T, k_D, k_W aus g, e, k_{DW}

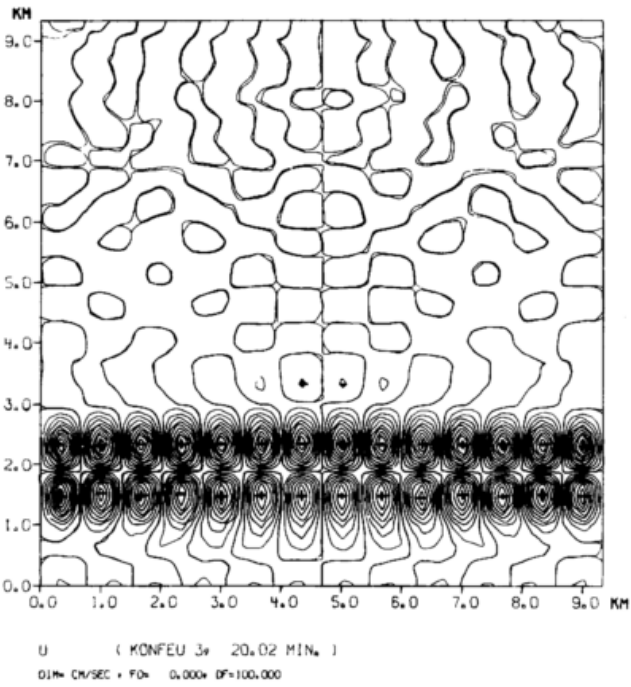


Abb. 3
Numerische Fehlstrukturen im u-Feld eines Experimentes zur Feuchtkonvektion mit zeitlicher $\bar{\rho}$ -Mittelung im linearen Term von [91]

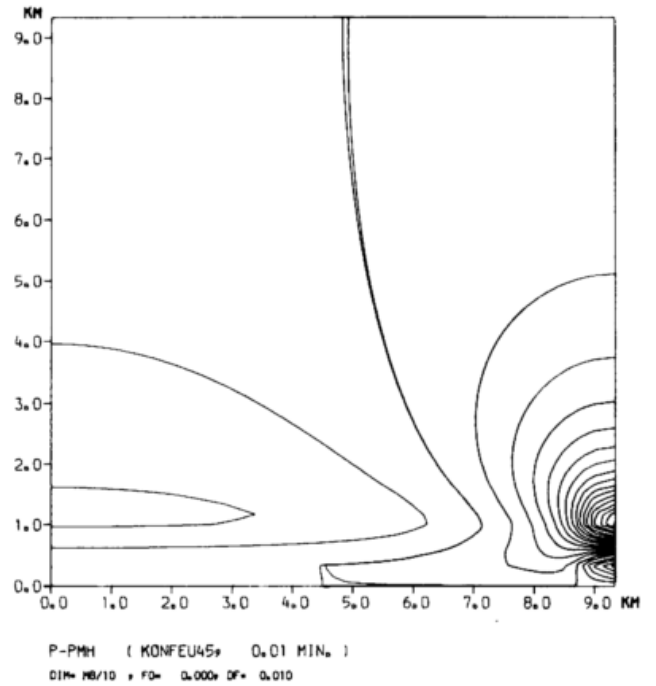


Abb. 5
Abweichung des Druckes vom horizontalen Mittelwert in der schallgefilterten Anfangsatmosphäre KONFEU 45

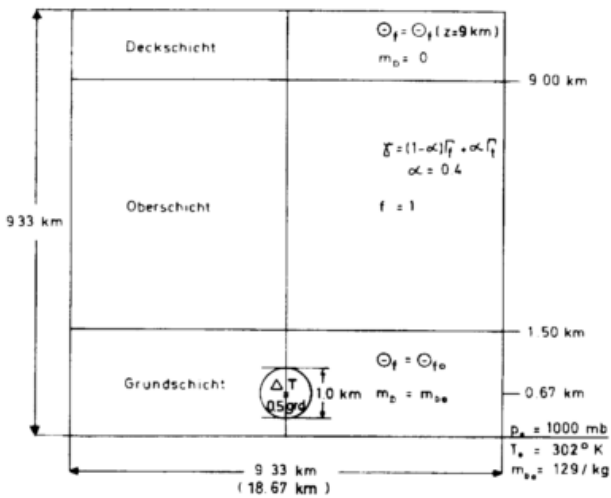
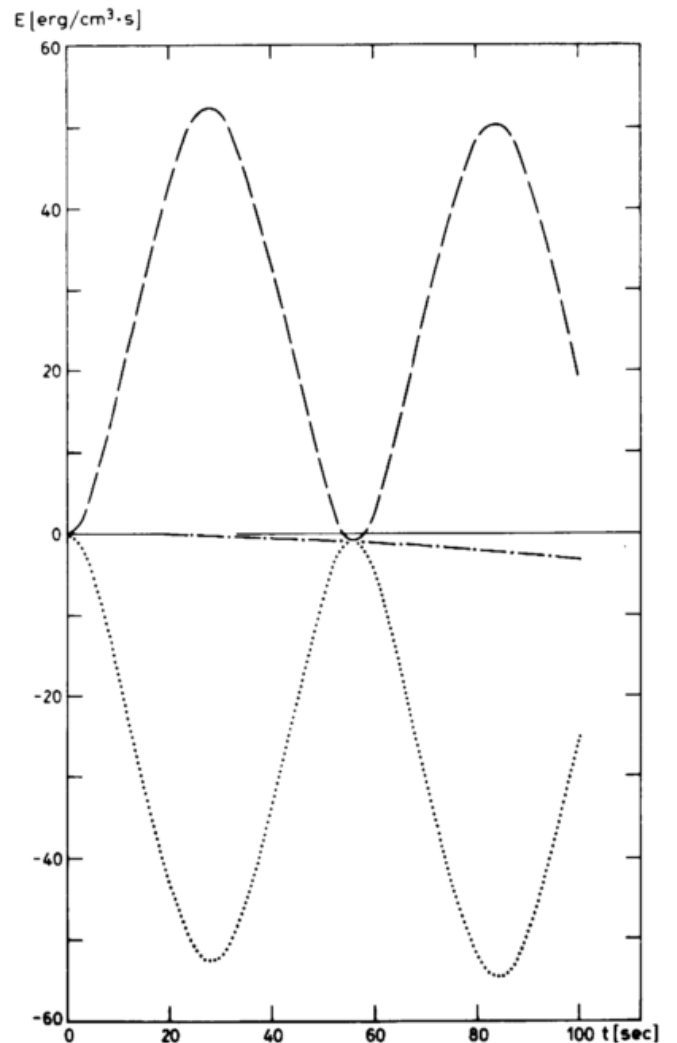


Abb. 4
Schema der Anfangsatmosphäre für die Experimente KONFEU 43, 44, (45)

Abb. 6 →
Gebietsmittlere Inhalte an potentieller Energie (P) und Wärme (W) - bezogen auf den Anfangszustand - in einem trockenen Konvektionsexperiment zur Simulation eines aufsteigenden Wärmeluftkörpers bei Anfangsfeldern ohne (P ---- W) bzw. mit (P und W - - - -) Schallfilterung



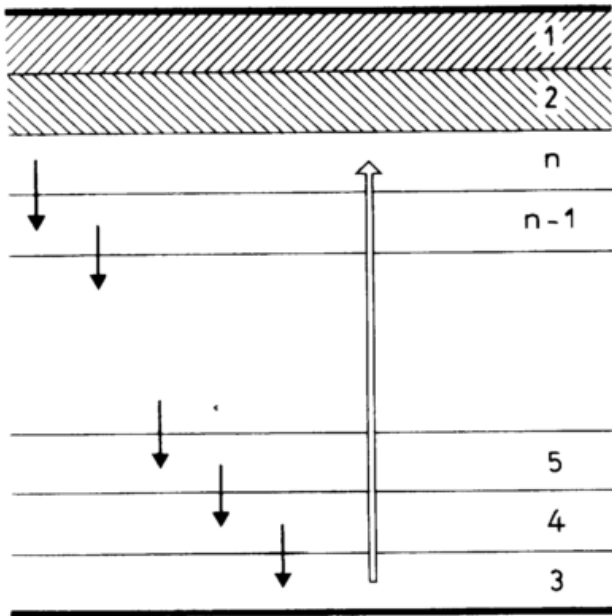


Abb. 7
Umordnungsschema der Anfangsatmosphäre KONFEU 43/44/45 (Grundzustand)

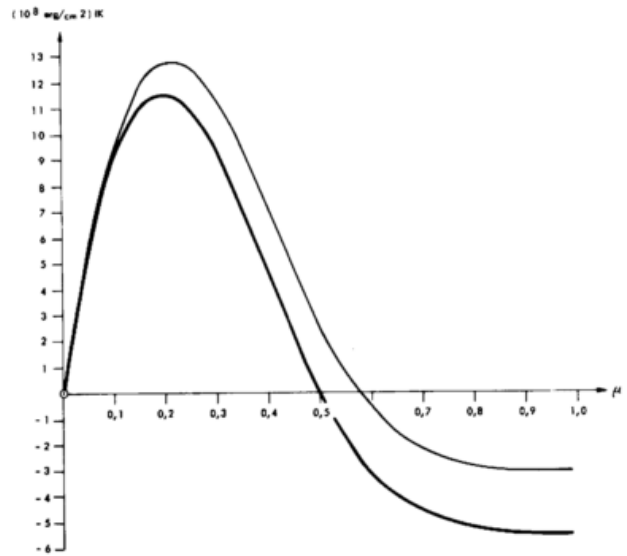


Abb. 8
Freisetzbare kinetische Energie (K) einer Luftsäule der Anfangsschichtung KONFEU 43/44/45 (Grundzustand) in Abhängigkeit vom Massenanteil (μ) der quasistatisch aufwärts verlagerten Luft bei festem (—) und beweglichem (---) oberem Rand

Erläuterung der programmgesteuerten Zeichnungen

Für ein angegebenes Experiment wird das Feld einer in der Bildunterschrift erläuterten skalaren Größe zu einem angegebenen Zeitpunkt durch Isolinien veranschaulicht. In der Maßeinheit DIM beträgt der Wertunterschied zwischen 2 Linien DF und der absolute Bezugswert, der durch eine dickere bzw. doppelt ausgezogene Linie kenntlich zu machen versucht wurde, F0. Aus zeichentechnischen Gründen wurde im Fall nicht-negativer Variabler der physikalisch ausgezeichnete Bezugswert 0 geringfügig heraufgesetzt. Punkte relativer Maxima (Minima) sind, falls erforderlich, durch + (-) markiert.

Das Vektorfeld der Geschwindigkeit ist durch Pfeile an den Gitterpunkten dargestellt. Der Geschwindigkeitsbetrag (V) wurde auf den maximalen im Feld angetroffenen Wert (V_{MAX}) bezogen ($v = V/V_{MAX}$) und in die 5 Werteklassen $1 \geq v > 0,50$, $0,50 \geq v > 0,25$, $0,25 \geq v > 0,10$, $0,10 \geq v > 0,01$, $0,01 \geq v$ geteilt, denen abnehmende Pfeillängen bzw. (letzte Klasse) ein Vollkreis entsprechen.

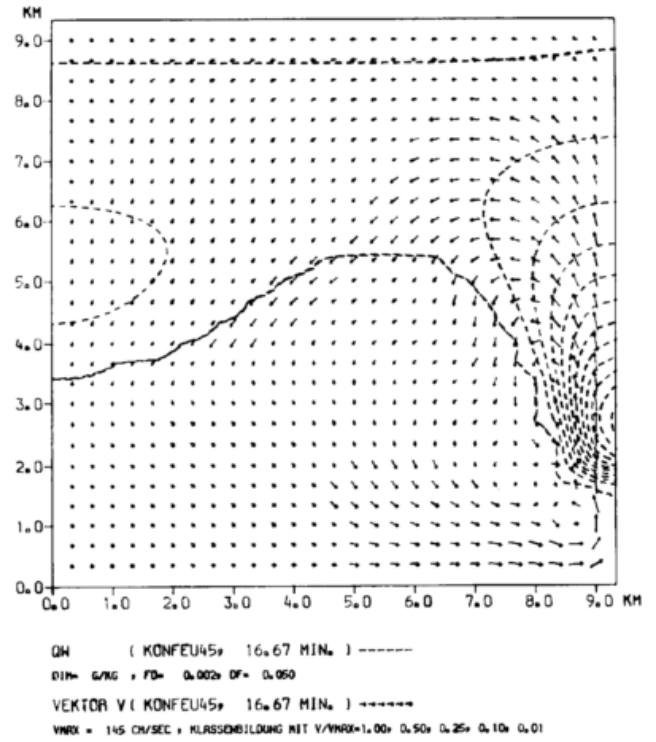
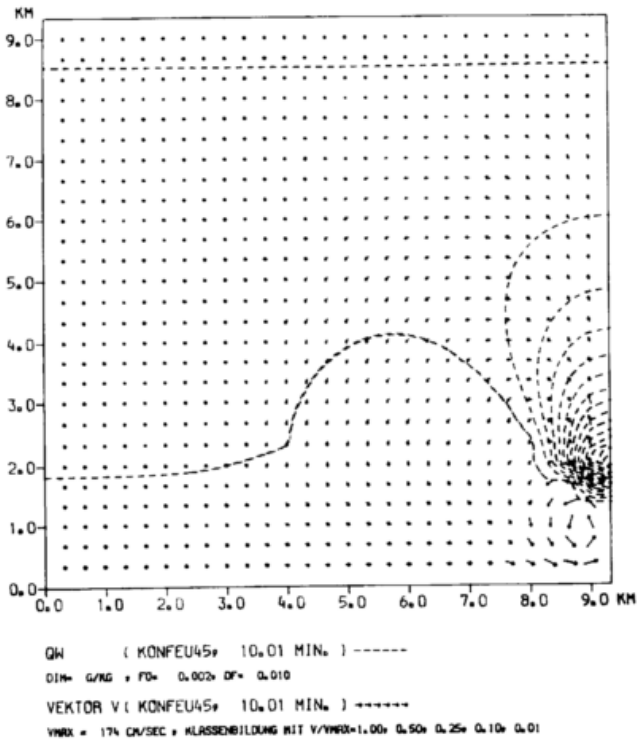


Abb. 9

Abb. 11

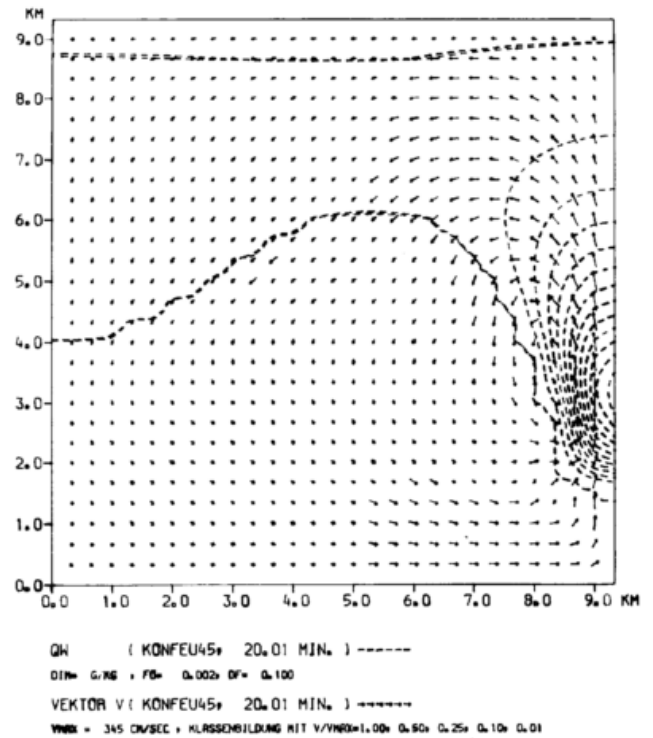
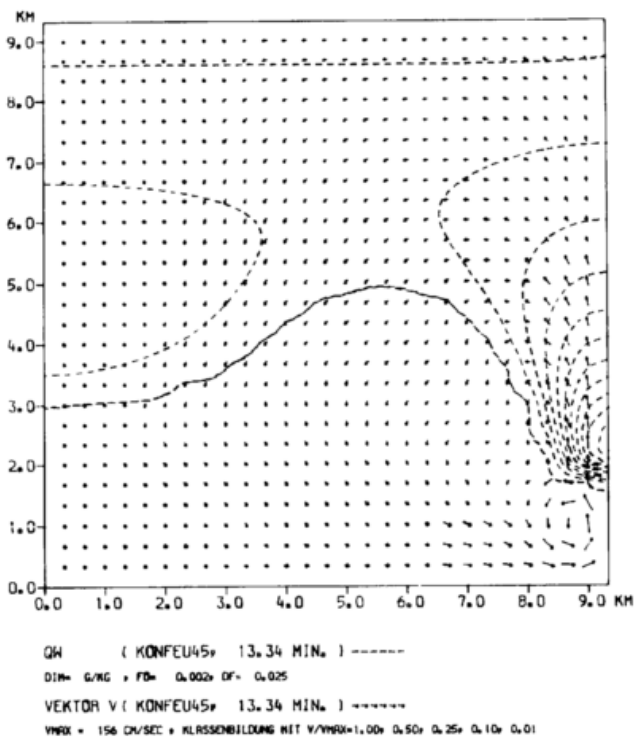


Abb. 10

Abb. 12

Abb. 9-12: Strömung und Wolke (Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers)

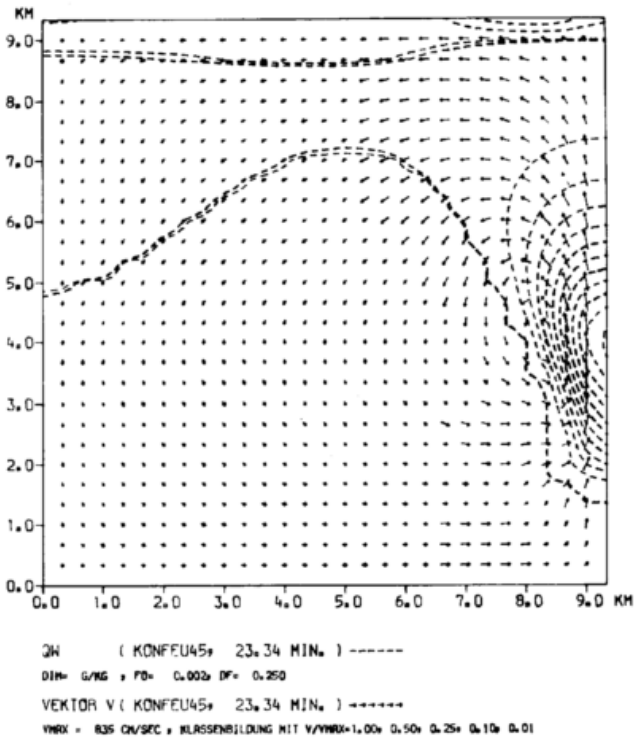


Abb. 13

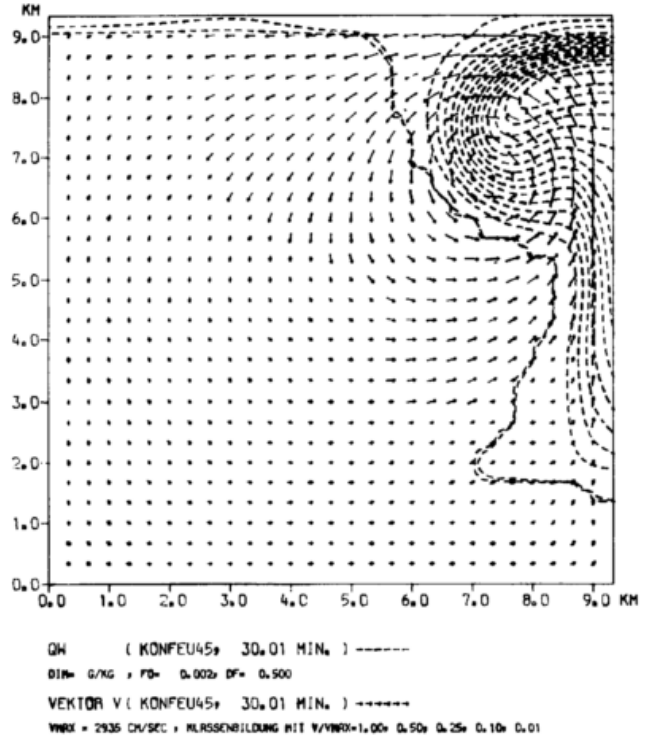


Abb. 15

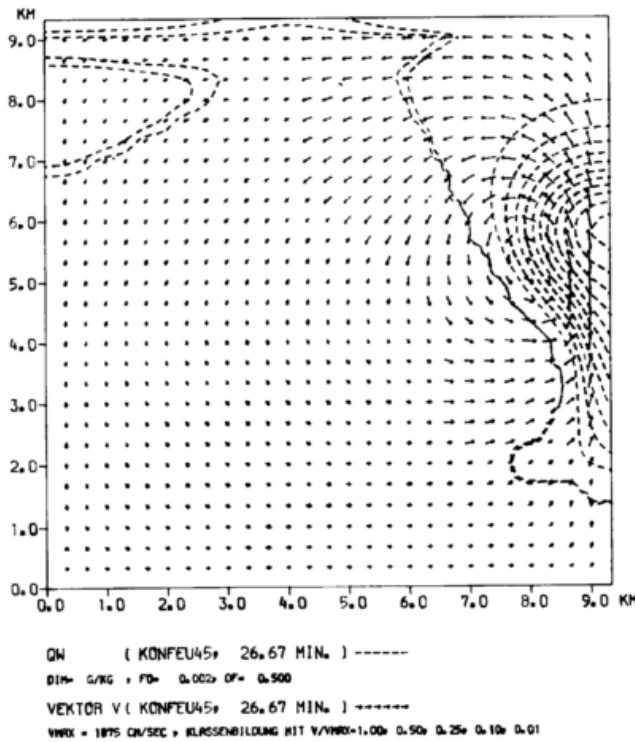


Abb. 14

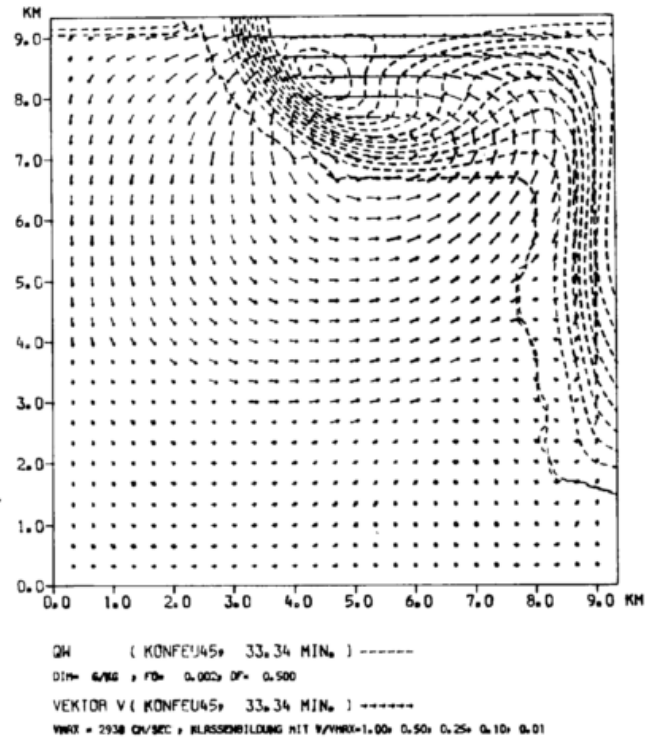


Abb. 16

Abb. 13-16: Strömung und Wolke (Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers)

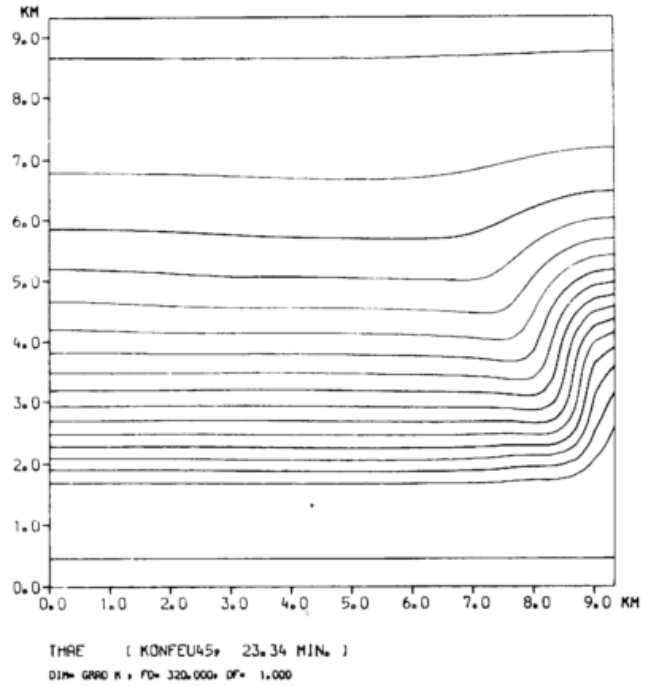
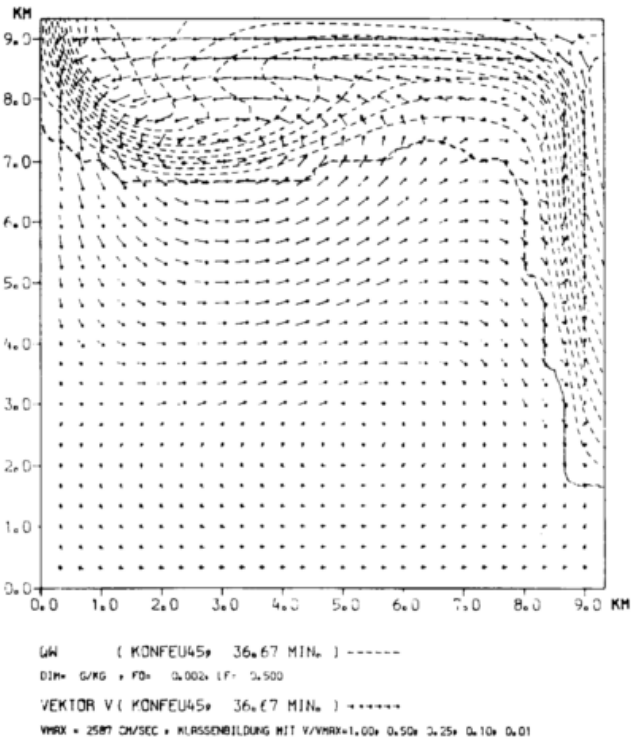


Abb. 18

Abb. 17a

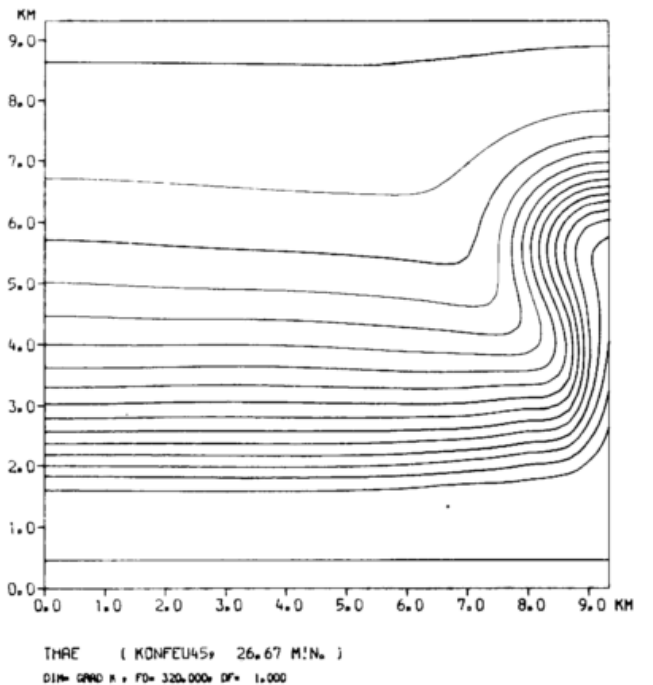
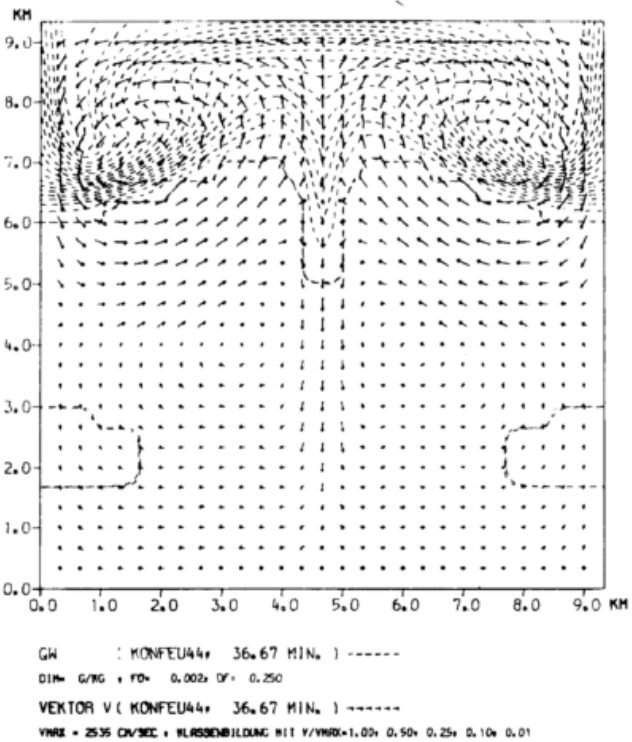


Abb. 19

Abb. 17b

Abb. 17a-b: Strömung und Wolke (Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers)

Abb. 18-19: Potentiell-äquivalente Temperatur

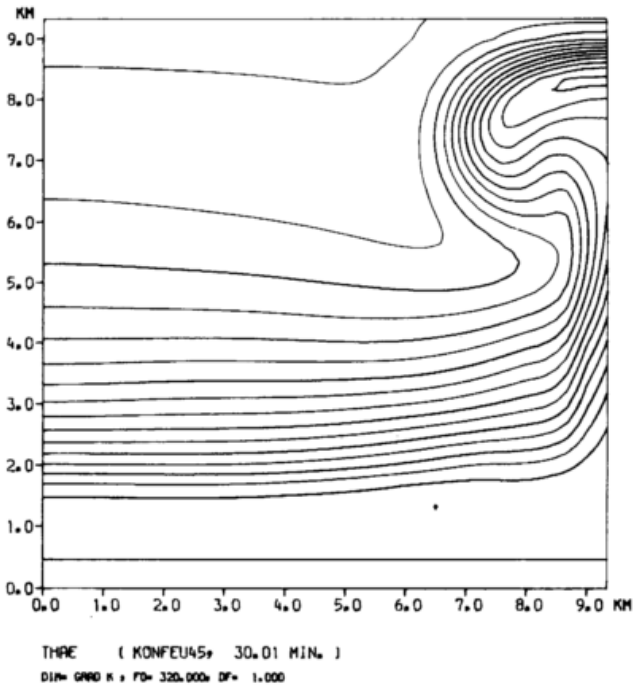


Abb. 20

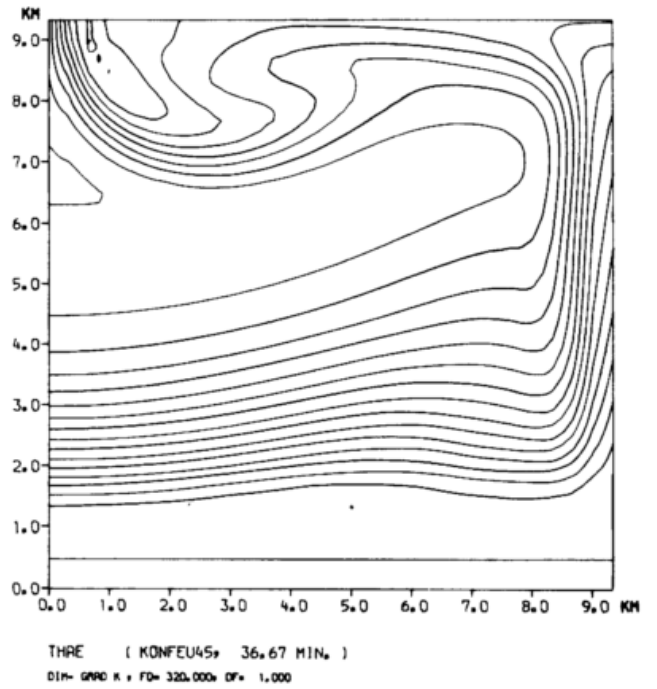


Abb. 22

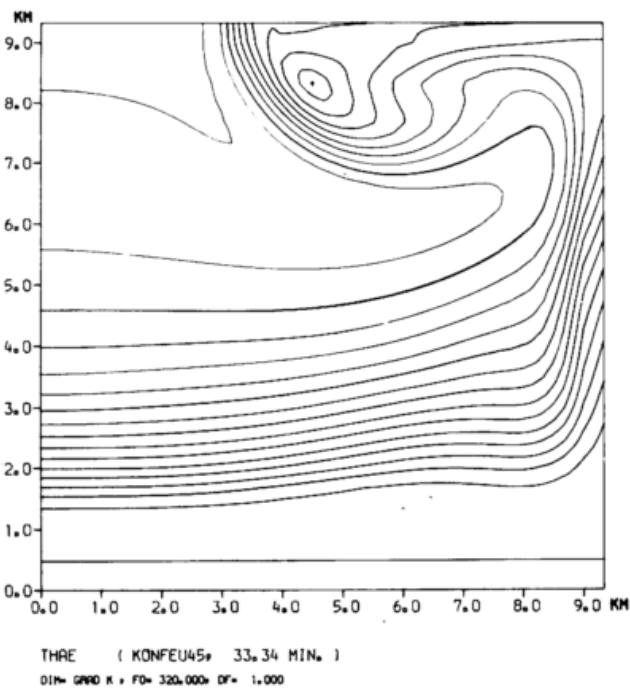


Abb. 21

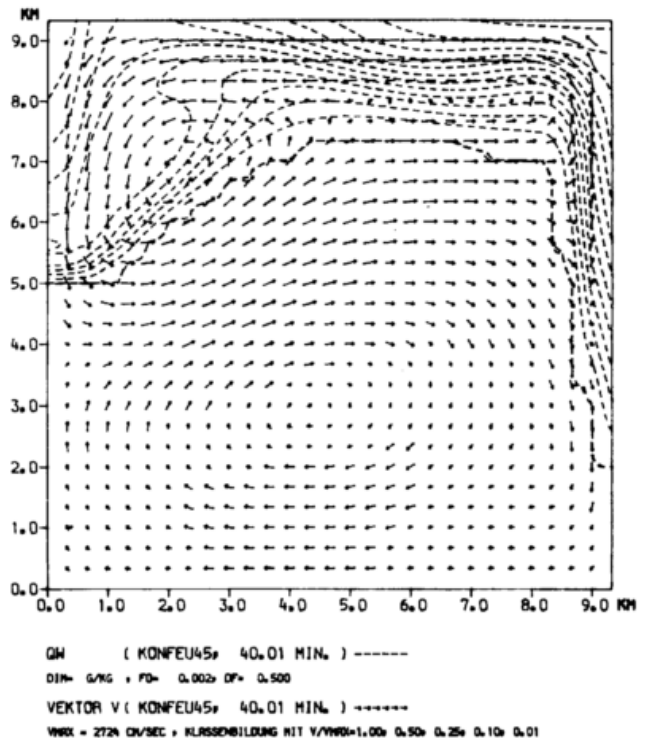


Abb. 23

Abb. 20-22: Potentiell-äquivalente Temperatur

Strömung und Wolke (Mischungsverhältnis
 tropfbaren Wassers)

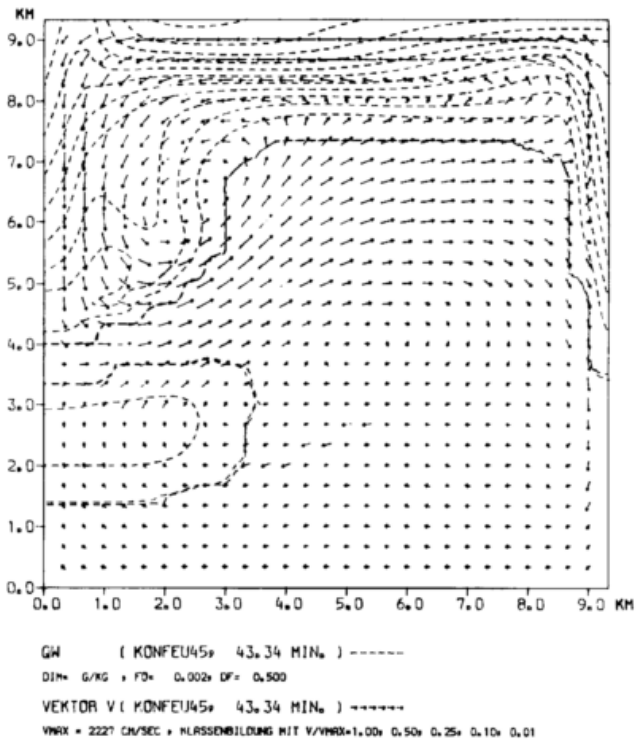


Abb. 24

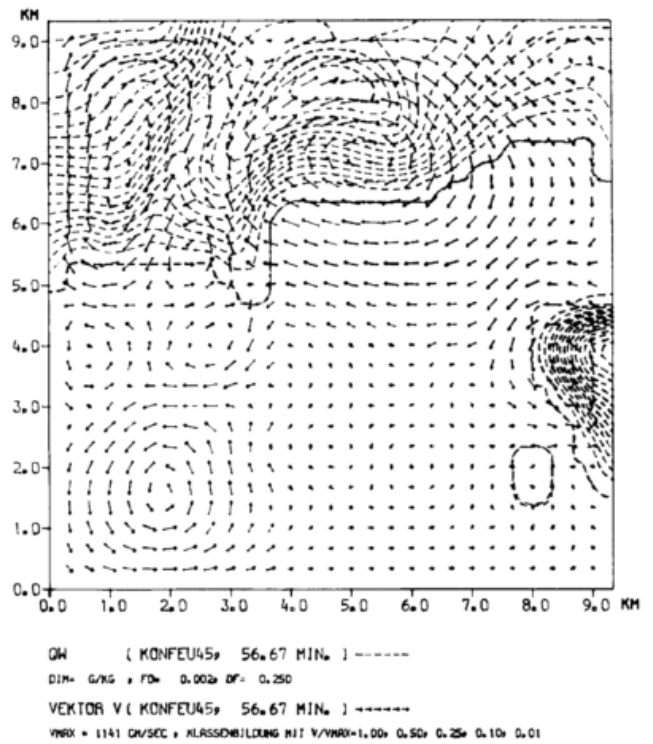


Abb. 26

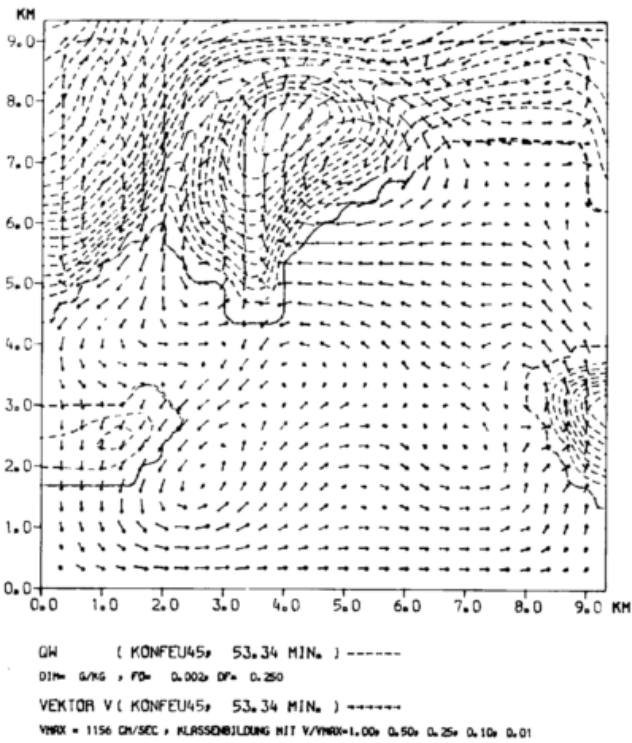


Abb. 25

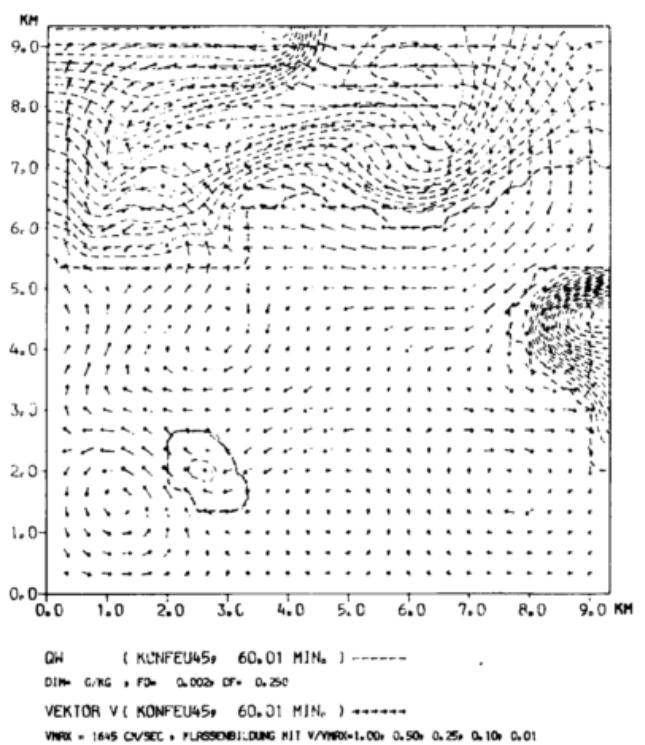


Abb. 27

Abb. 24-27: Strömung und Wolke (Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers)

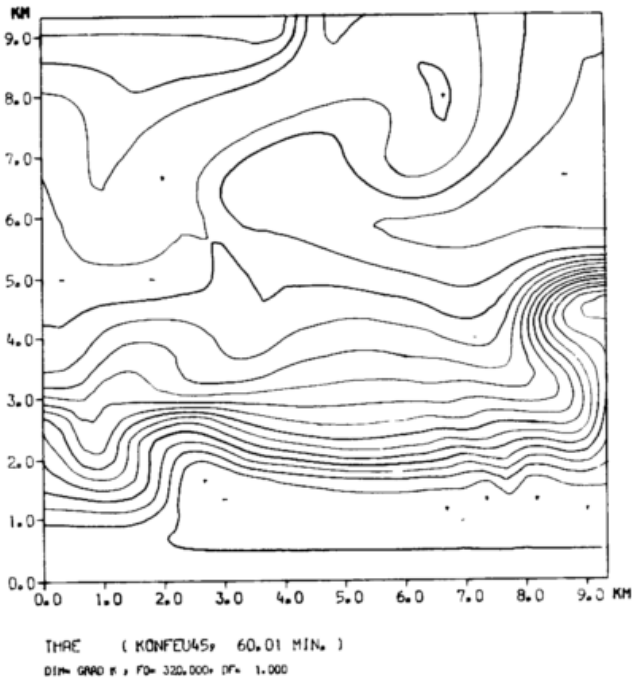


Abb. 28a

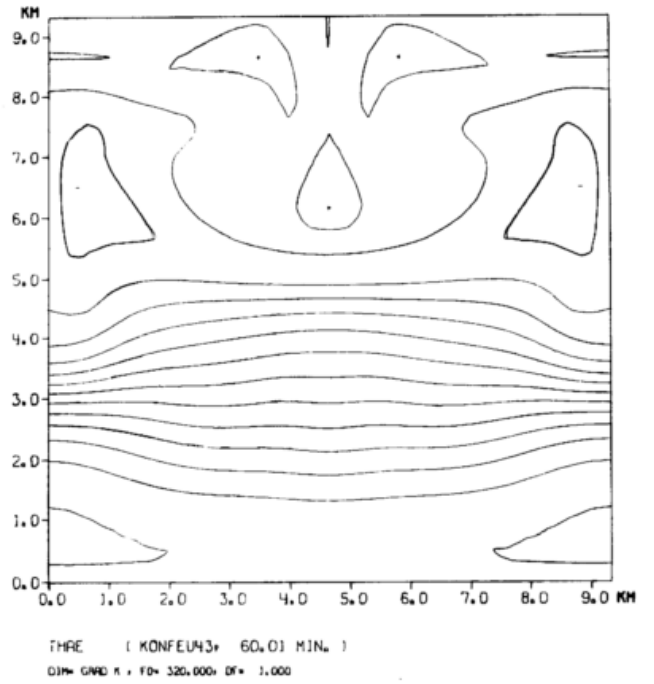


Abb. 28c

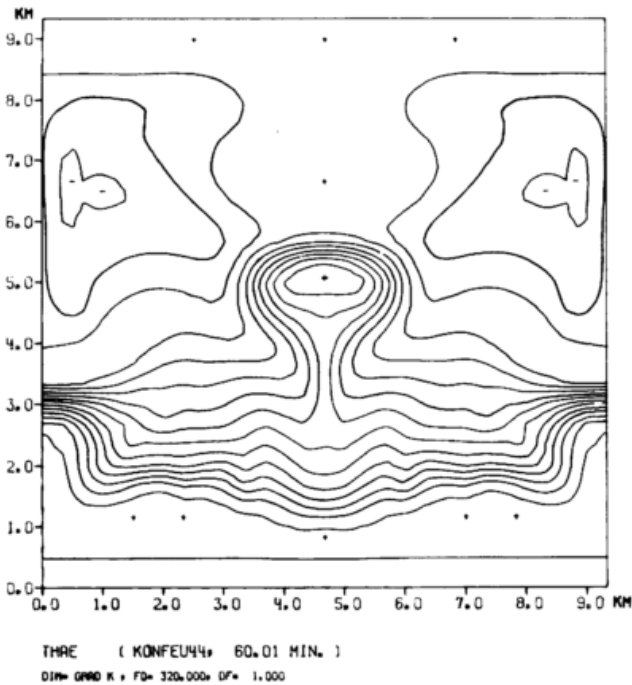


Abb. 28b

Abb. 28a-c: Potentiell-äquivalente Temperatur

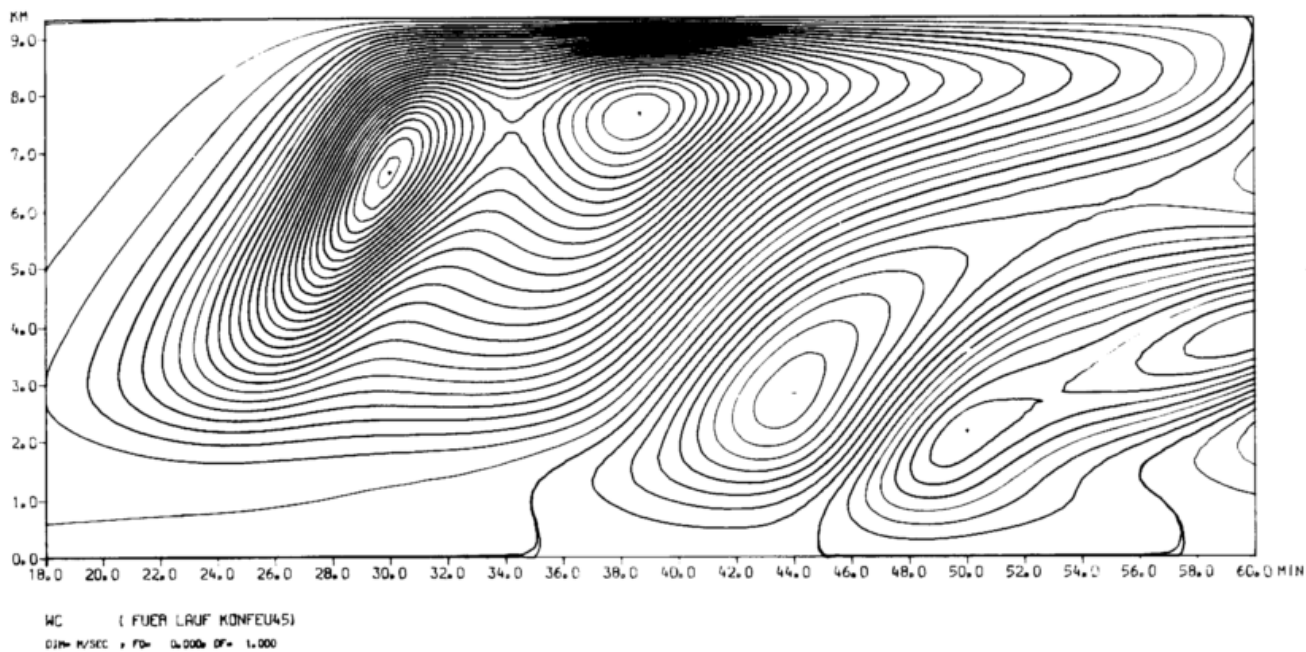


Abb. 29a

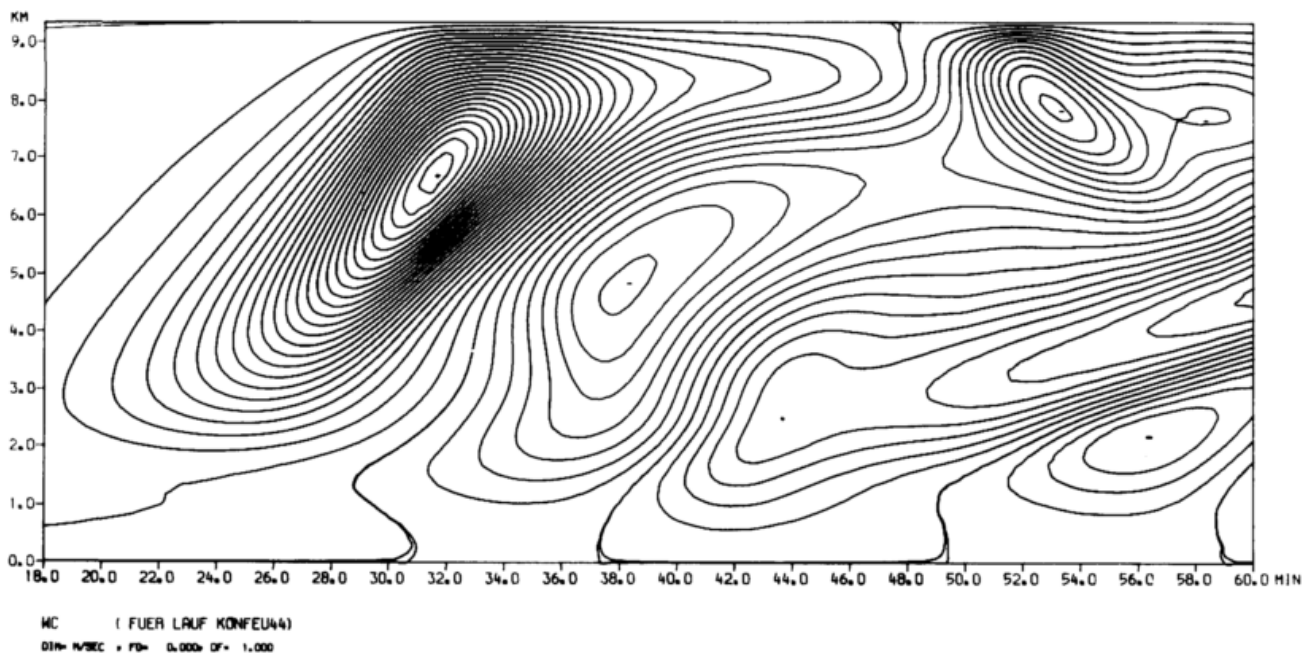


Abb. 29b

Abb. 29a-b: Vertikalgeschwindigkeit auf der Zentralachse

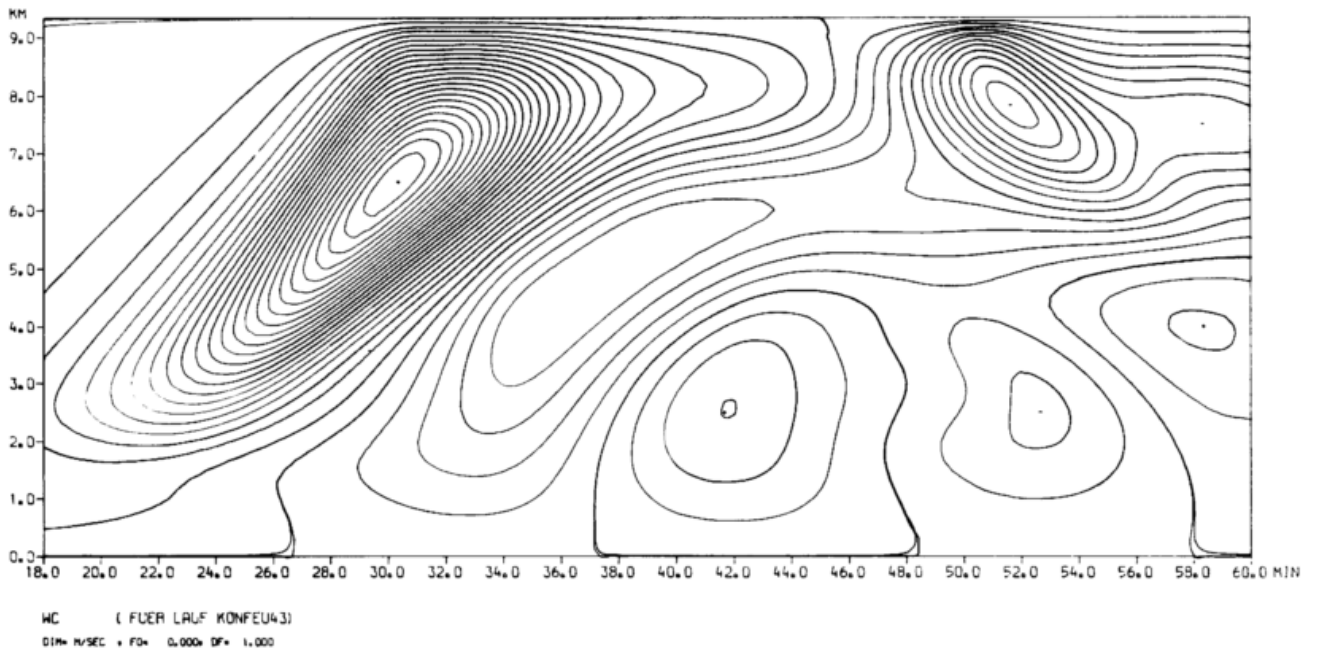


Abb. 29c
Vertikalgeschwindigkeit auf der Zentralachse

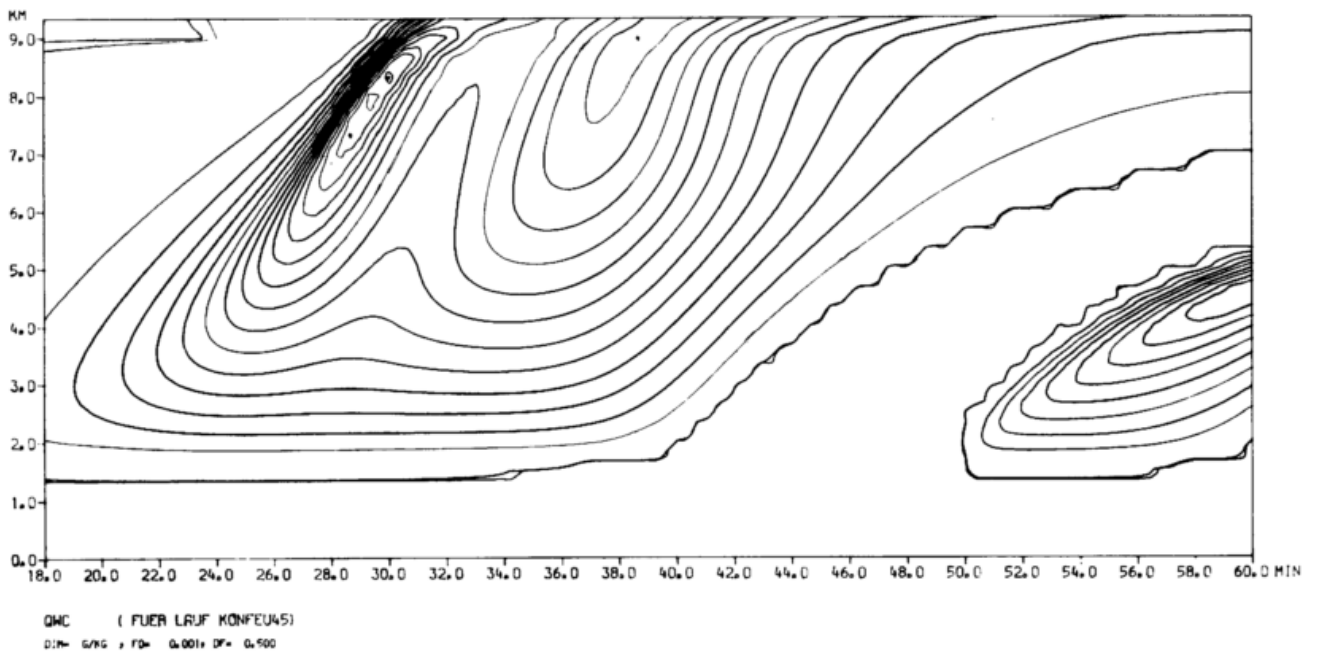


Abb. 30a
Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers auf der Zentralachse

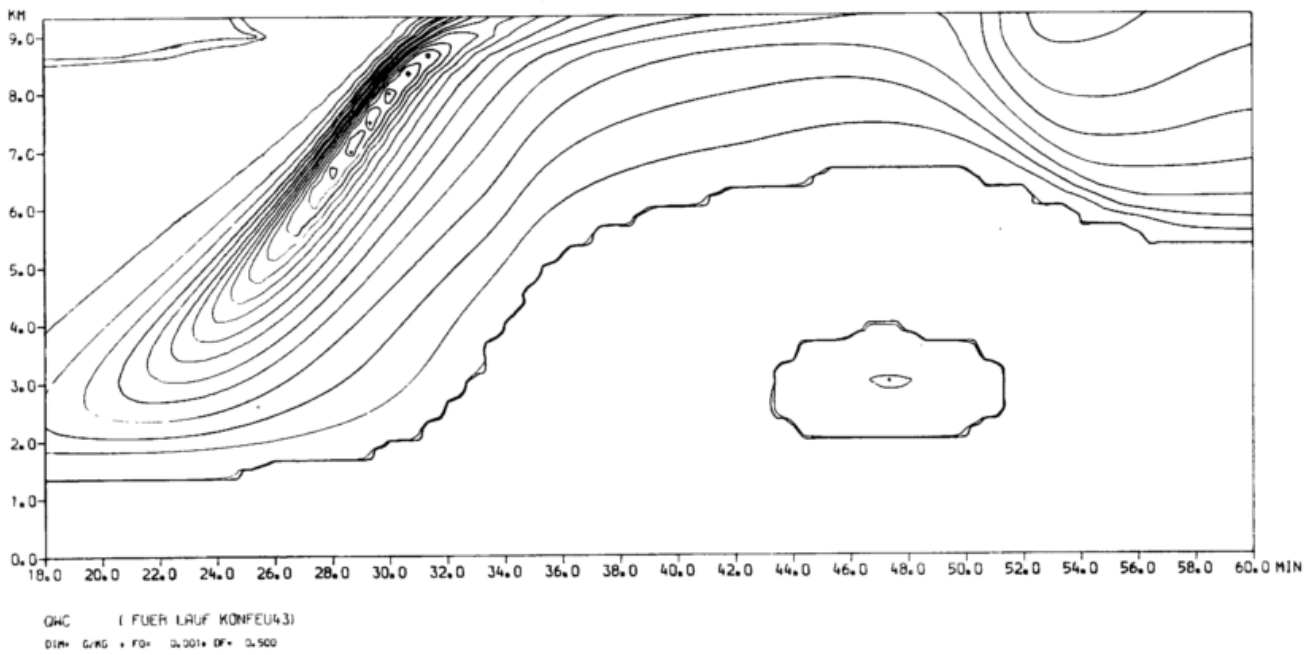


Abb. 30b
Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers auf der Zentralachse

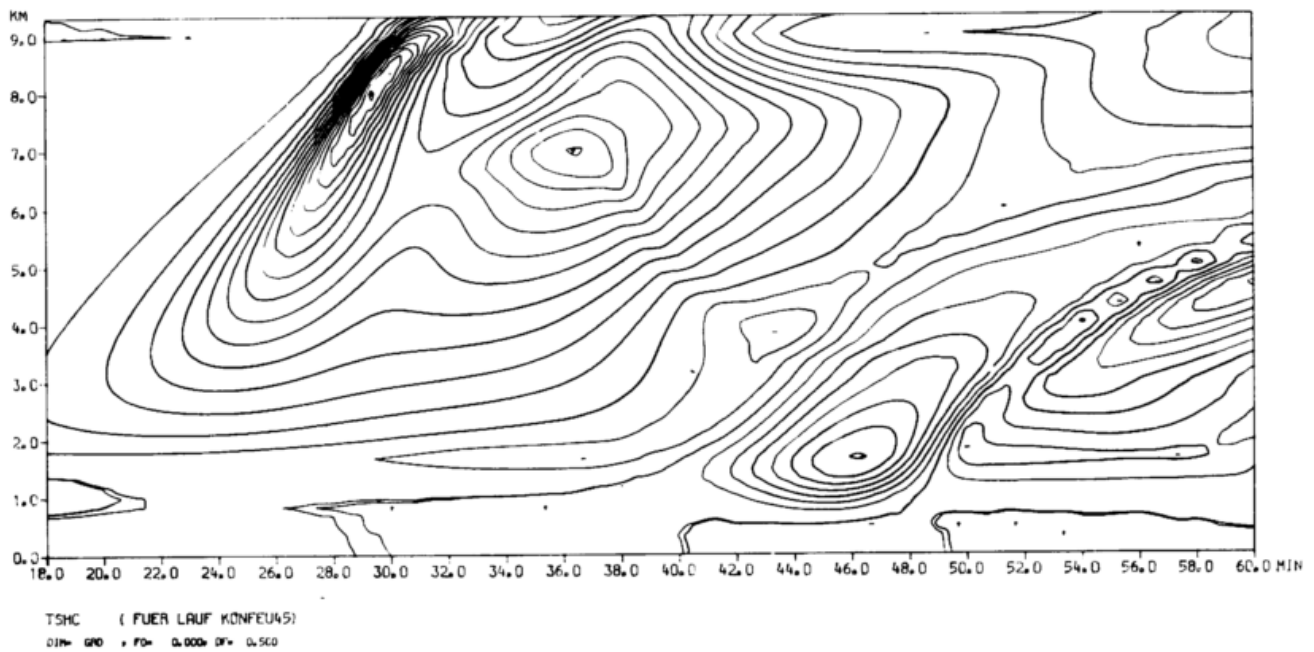


Abb. 31a
Abweichung der Temperatur auf der Zentralachse vom horizontalen Mittelwert

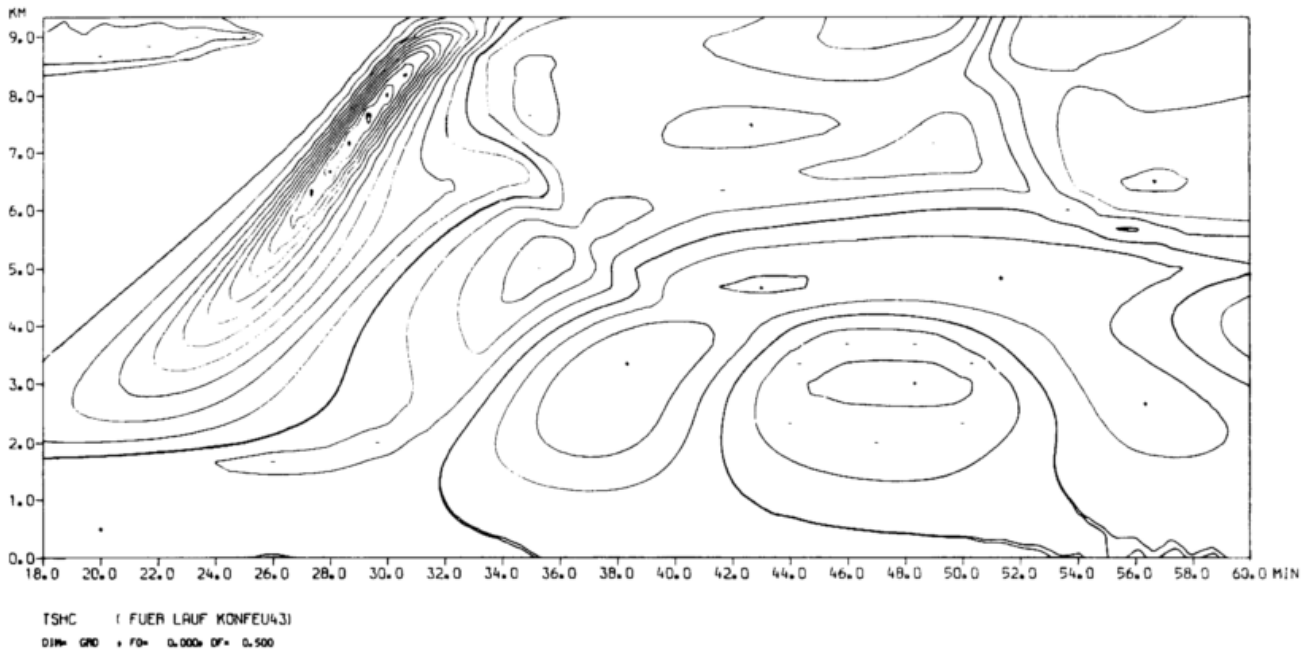


Abb. 31b
Abweichung der Temperatur auf der Zentralachse vom horizontalen Mittelwert

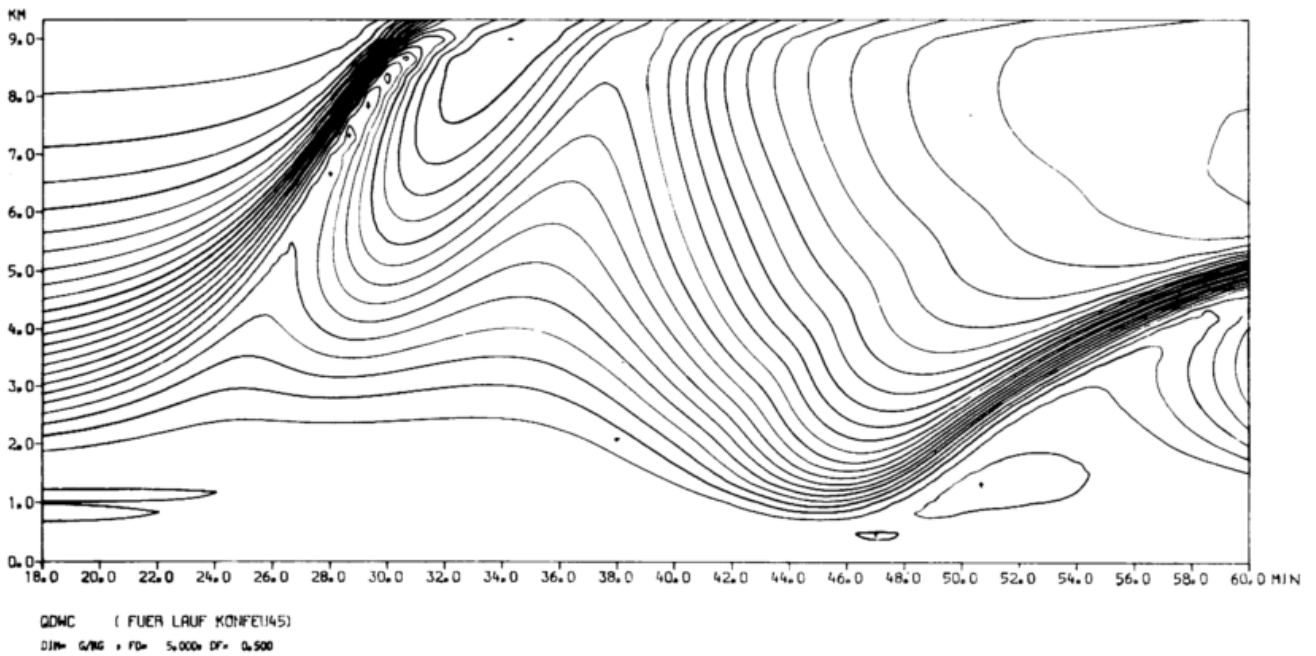


Abb. 32
Mischungsverhältnis der Substanz Wasser auf der Zentralachse

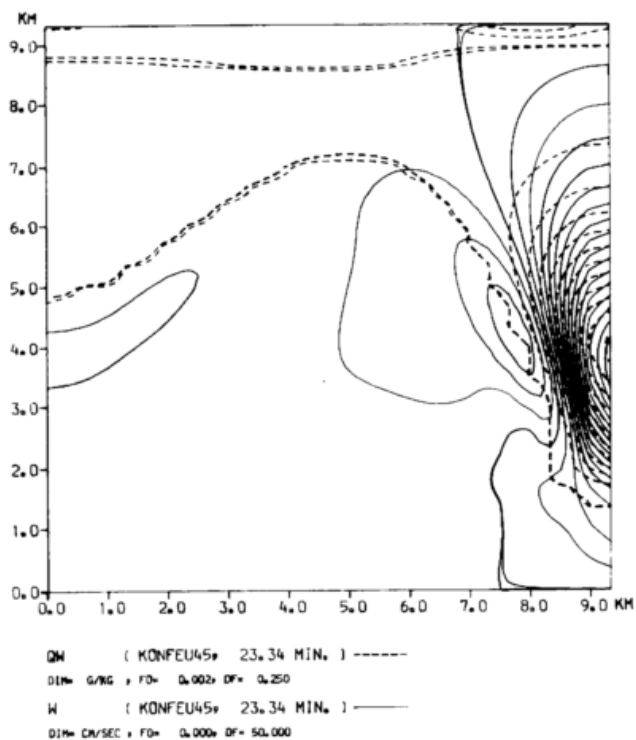


Abb. 33
Vertikalgeschwindigkeit und Wolke (Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers)

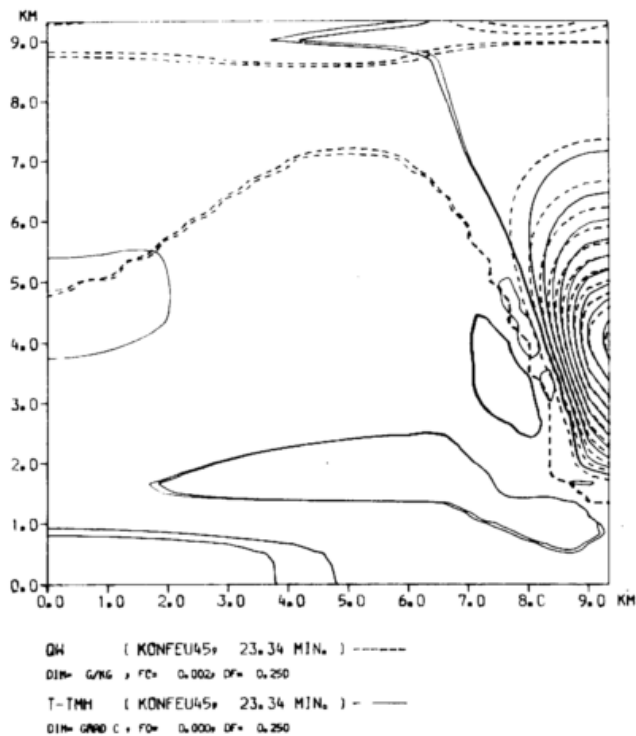


Abb. 34
Abweichung der Temperatur vom horizontalen Mittelwert und Wolke (Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers)

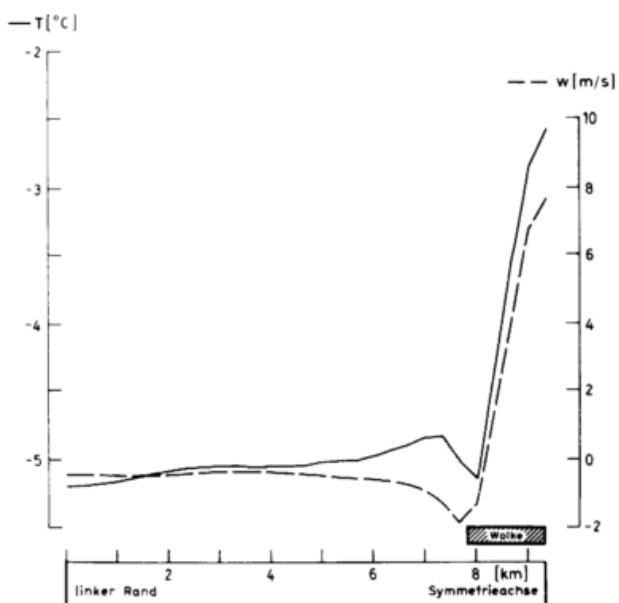


Abb. 35
Traversierung der Modellatmosphäre KONFEU45 in der Höhe 4 km zum Zeitpunkt 23,34 min

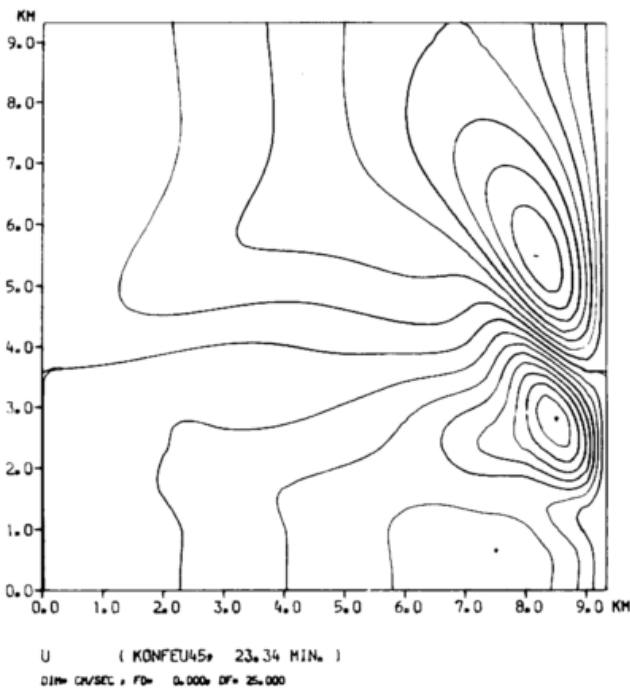


Abb. 36
Horizontalgeschwindigkeit

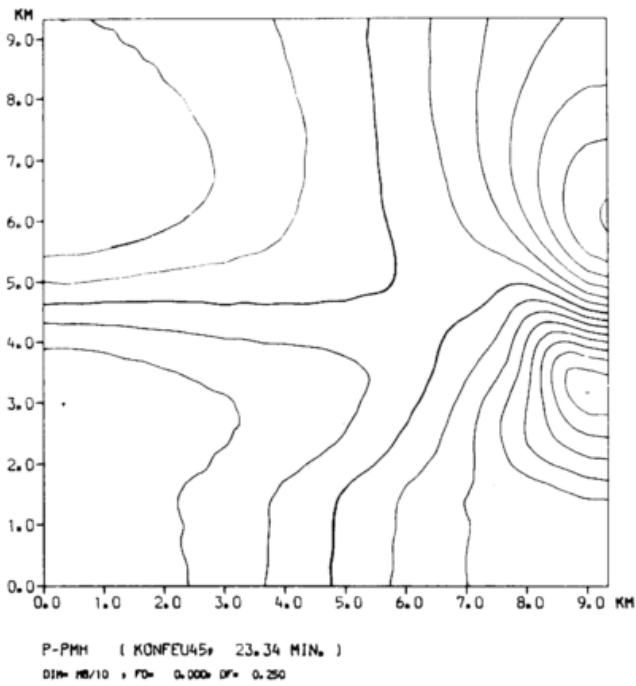


Abb. 37
Abweichung des Druckes vom horizontalen Mittelwert

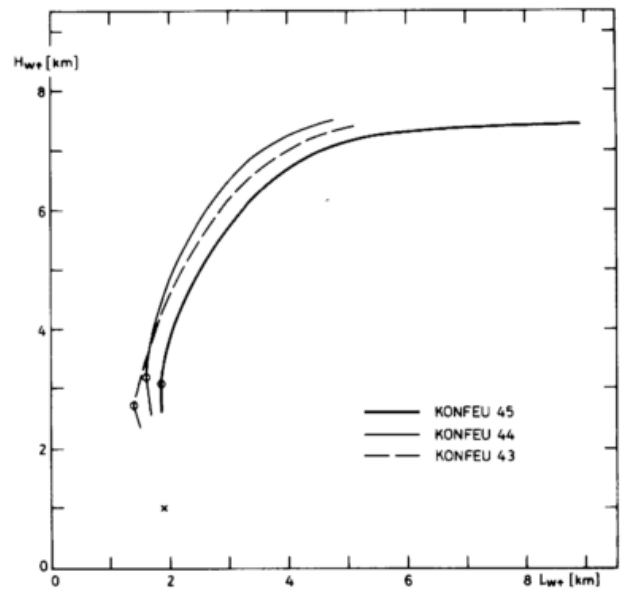


Abb. 39
Zusammenhang zwischen der Höhe des Aufwindmaximums auf der Zentralachse (H_{wt}) und der Breite des Aufwindbandes (L_{wt}) in diesem Niveau

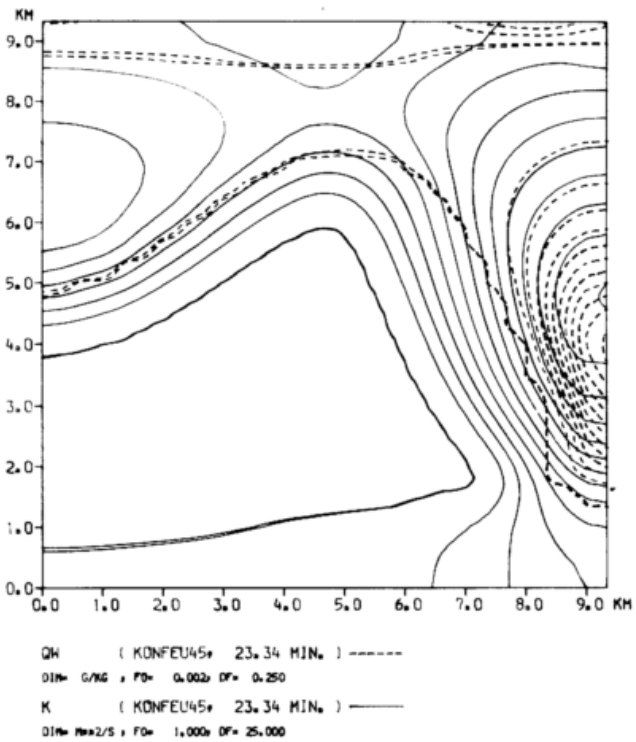


Abb. 38a

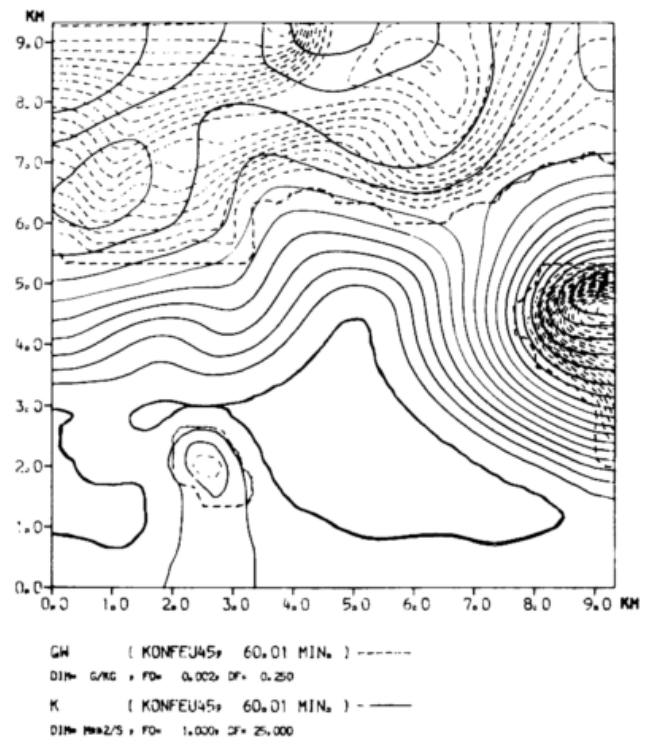


Abb. 38b

Abb. 38a-b: Diffusionskoeffizient und Wolke

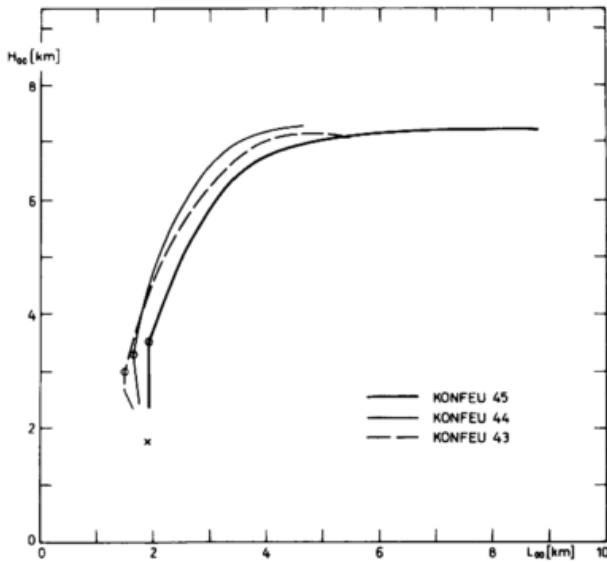


Abb. 40
Zusammenhang zwischen Höhe (H_{00}) und horizontalem Abstand (L_{00}) der beiden Hauptwirbelzentren

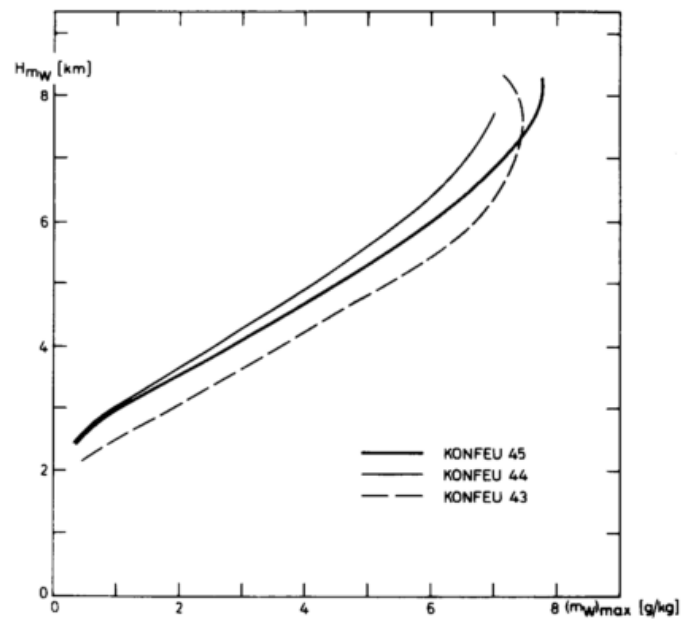


Abb. 42

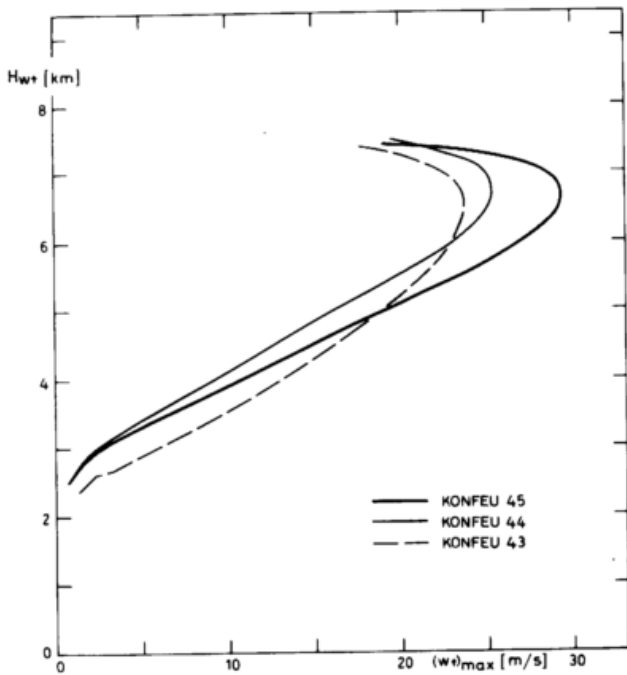


Abb. 41
Zusammenhang zwischen Höhe (H_{wt}) und Wert $((w_t)_{max})$ des Aufwindmaximums auf der Zentralachse

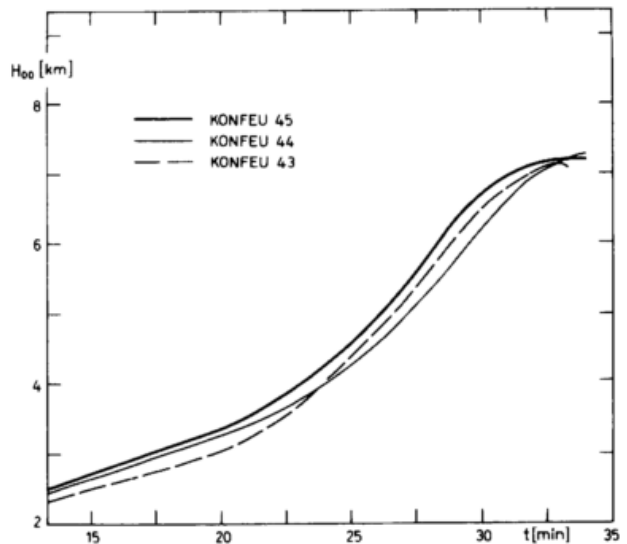
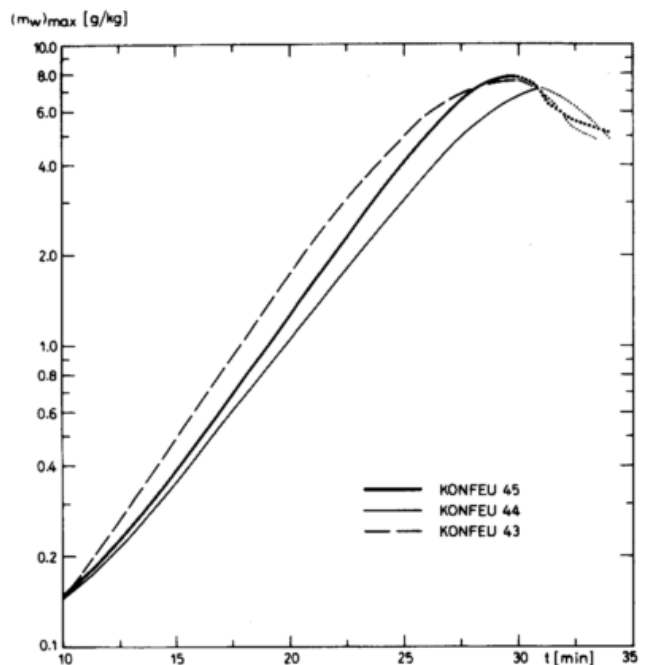


Abb. 43

Abb. 42: Zusammenhang zwischen Höhe (H_{mw}) und Wert $((m_w)_{max})$ des maximalen Mischungsverhältnisses tropfbaren Wassers auf der Zentralachse

Abb. 43: Höhe der beiden Hauptwirbelzentren

Abb. 44 →
Maximales Mischungsverhältnis tropfbaren Wassers auf der Zentralachse



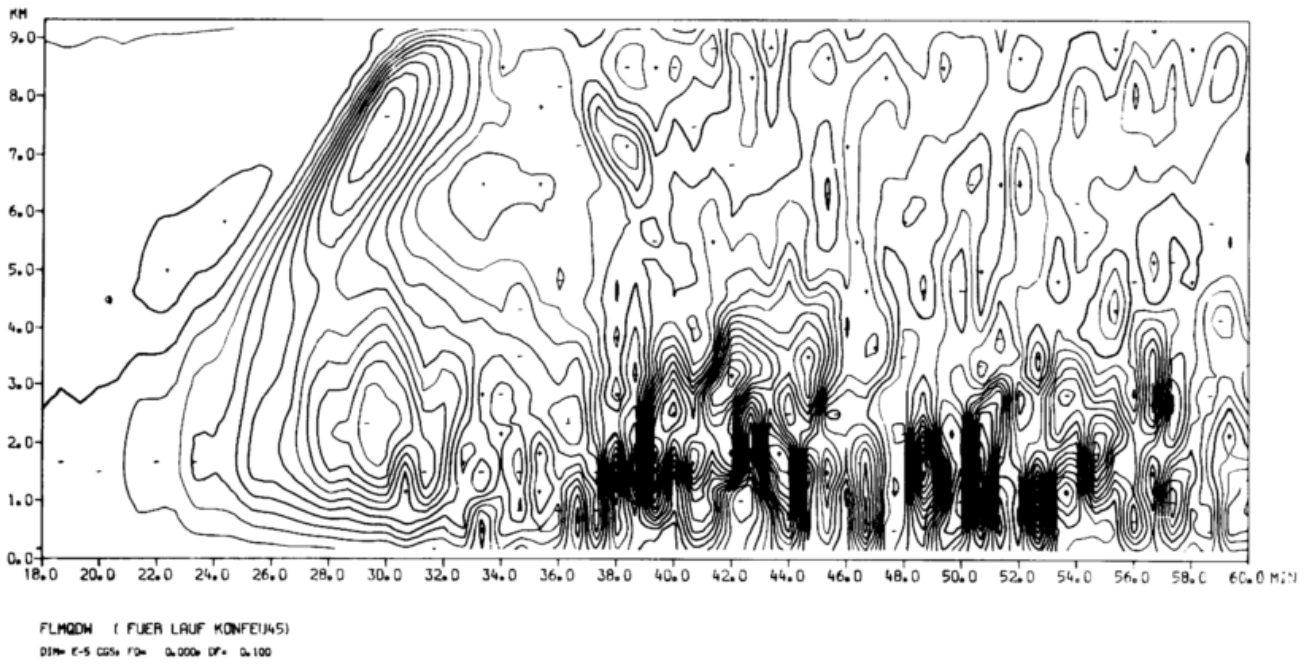


Abb. 45
Mittlerer Vertikalfluß der Substanz Wasser [$10^{-5} \text{g/cm}^2 \cdot \text{s}$]

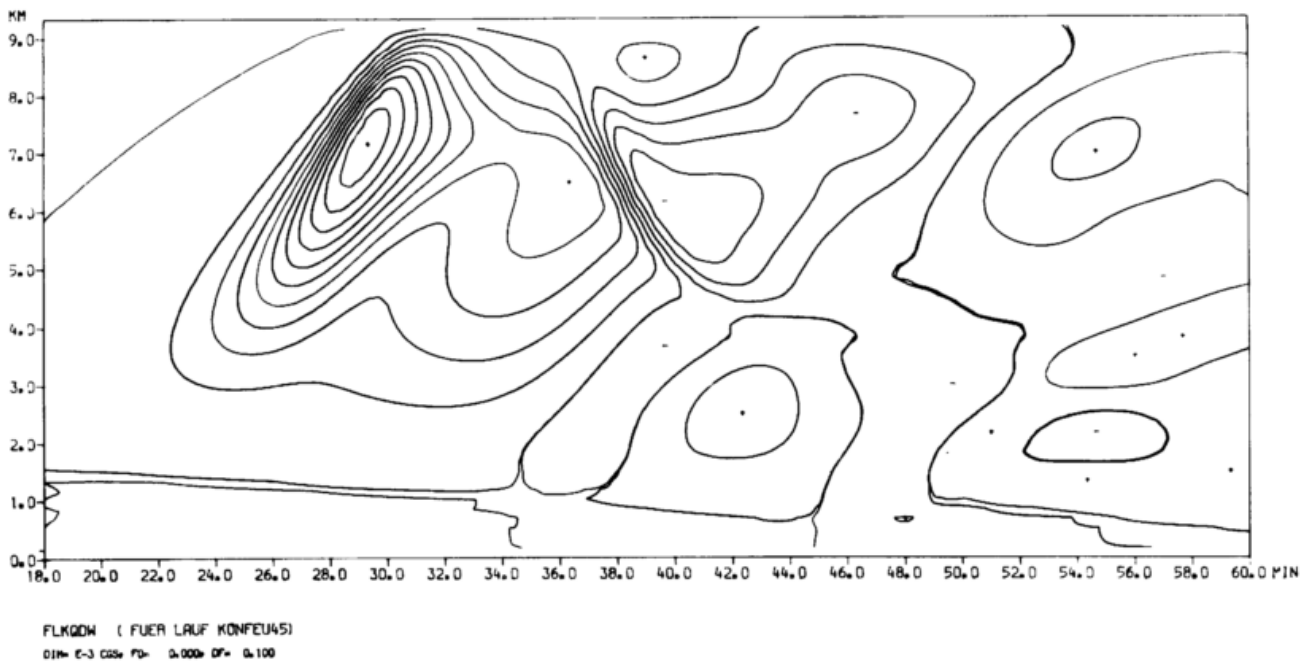


Abb. 46
Konvektiver Vertikalfluß der Substanz Wasser [$10^{-3} \text{g/cm}^2 \cdot \text{s}$]

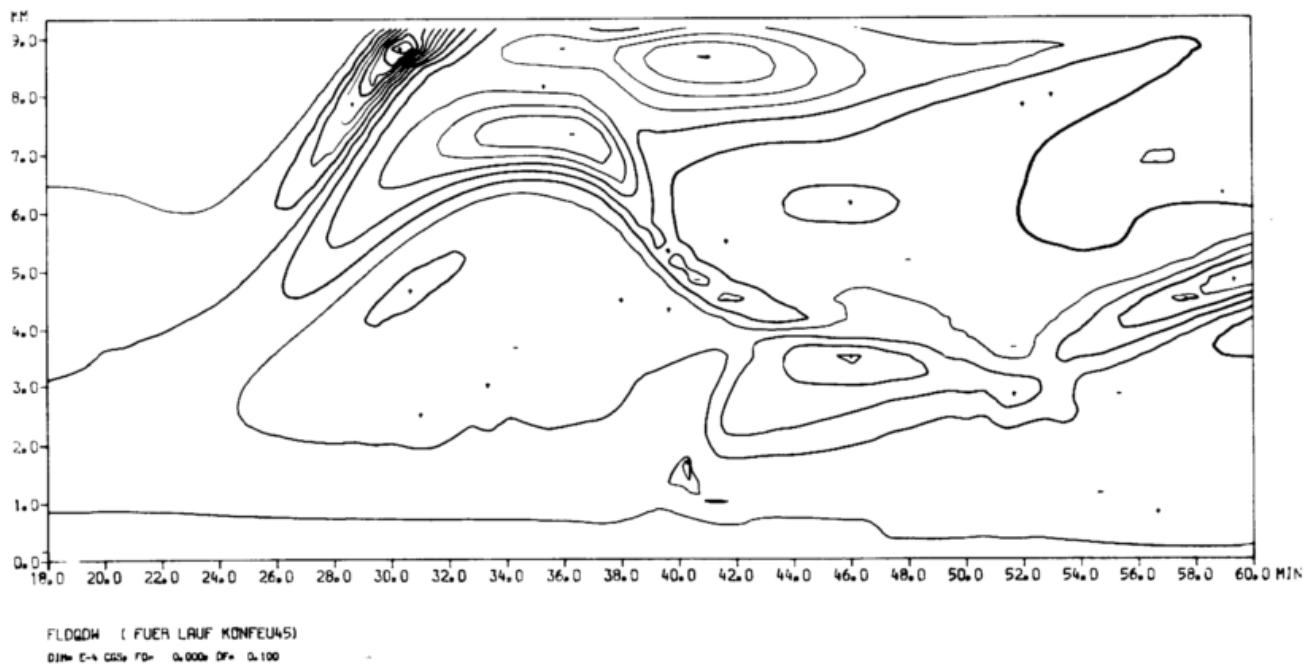


Abb. 47a

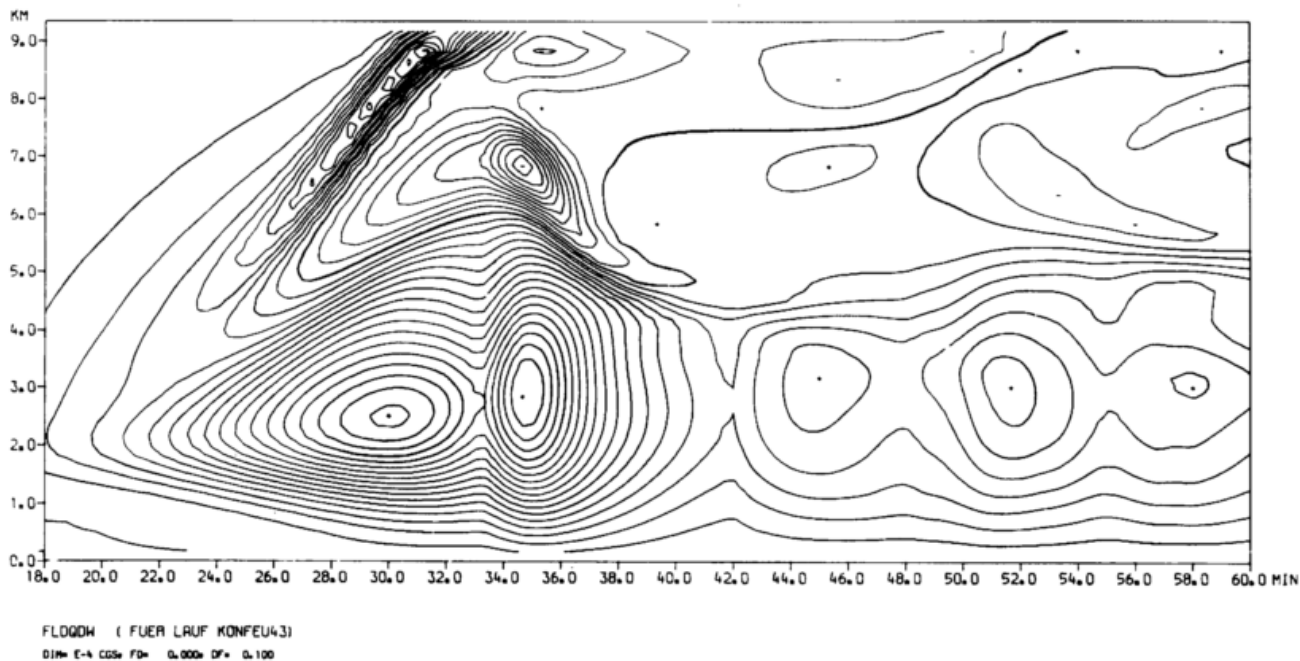


Abb. 47b

Abb. 47a-b: Turbulenter Vertikalfluß der Substanz Wasser [$10^{-4} \text{ g/cm}^2 \cdot \text{s}$]

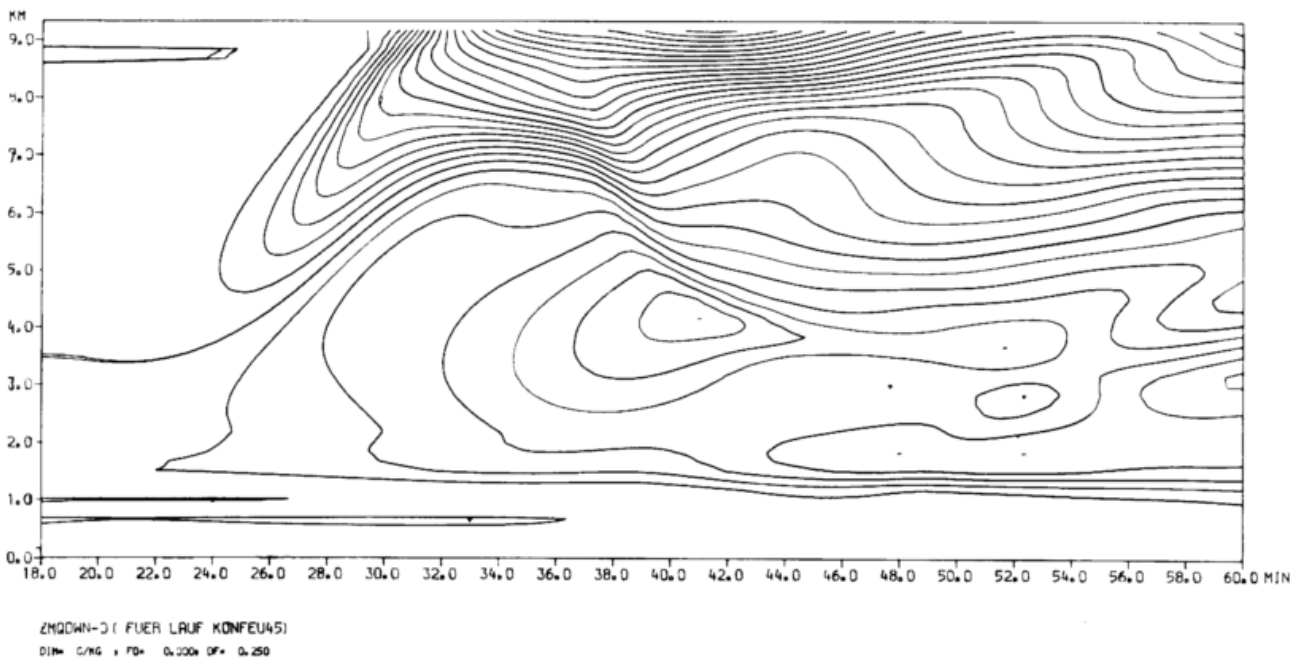


Abb. 48
Abweichung des horizontal gemittelten Mischungsverhältnisses der Substanz Wasser vom Anfangswert

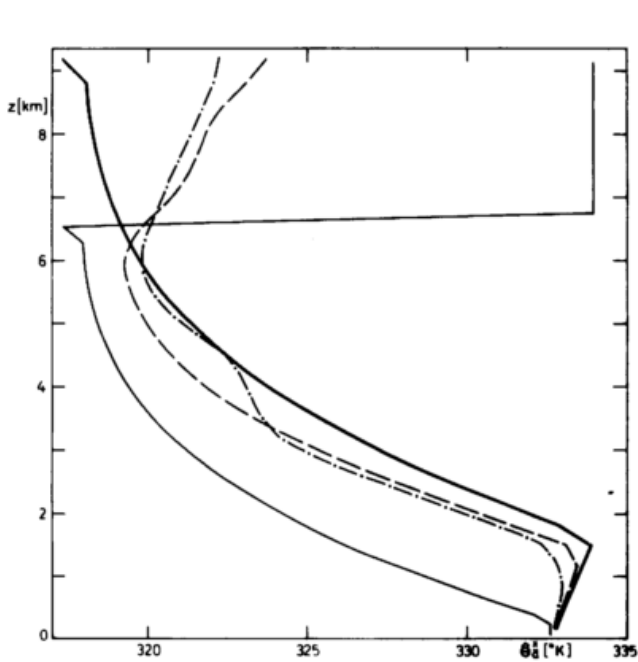


Abb. 49
Horizontalmittel der potentiell-äquivalenten Temperatur für folgende Situationen:
Anfangsschichtung ———
statische Umschichtung ($\mu = 0, 202$) - - - -
KONFEU 45 (38 min, Minimum von S)
KONFEU 45 (60 min) - · - · -

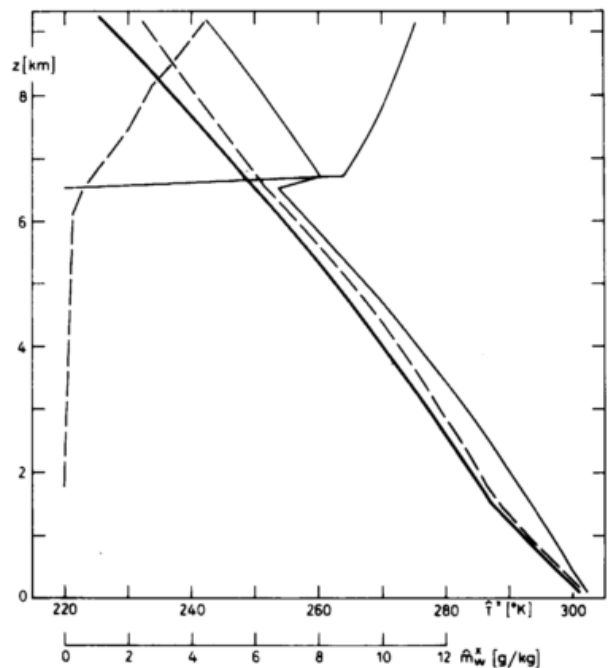


Abb. 50
Horizontalmittel der Temperatur und des Mischungsverhältnisses tropfbaren Wassers für folgende Situationen:
Anfangsschichtung ———
statische Umschichtung ($\mu = 0, 202$) - - - -
KONFEU 45 (38 min, Minimum von S)

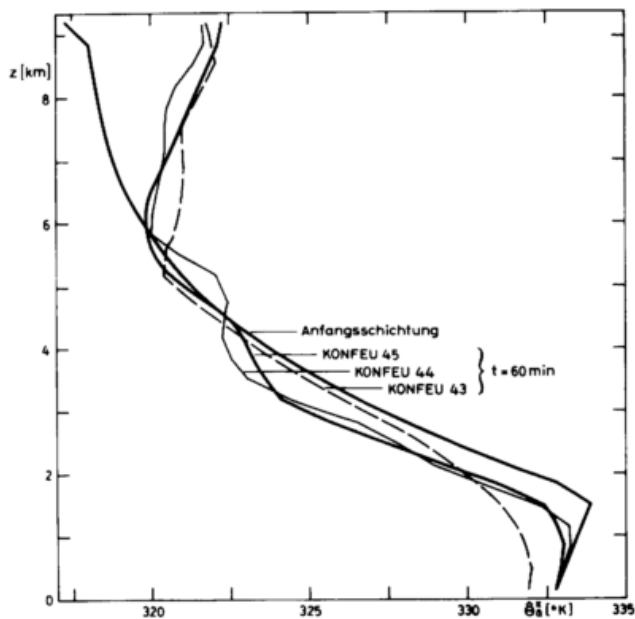


Abb. 51
Horizontalmittel der potentiell-äquivalenten Temperatur für verschiedene Situationen

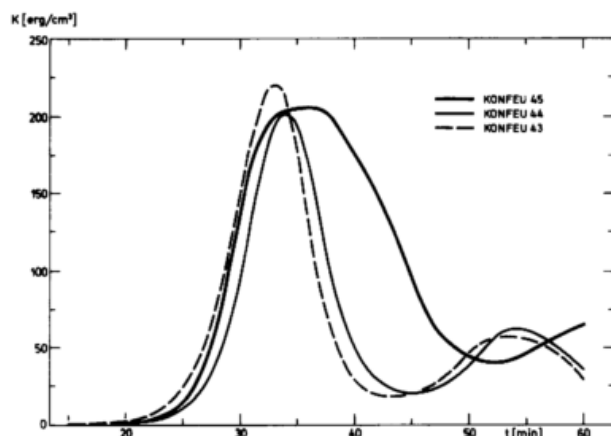


Abb. 53
Gebietsmittlerer Inhalt an kinetischer Energie

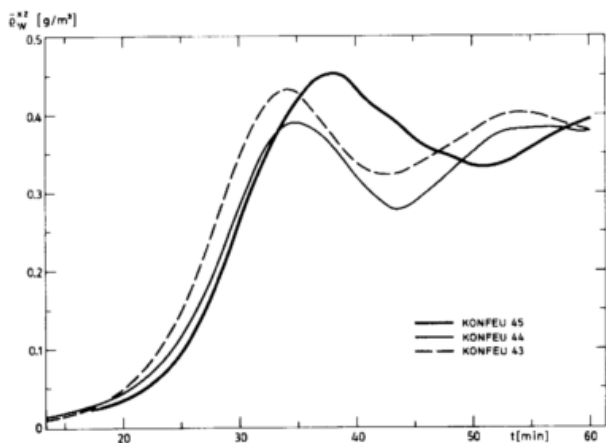


Abb. 52
Gebietsmittlerer Inhalt an tropfbarem Wasser

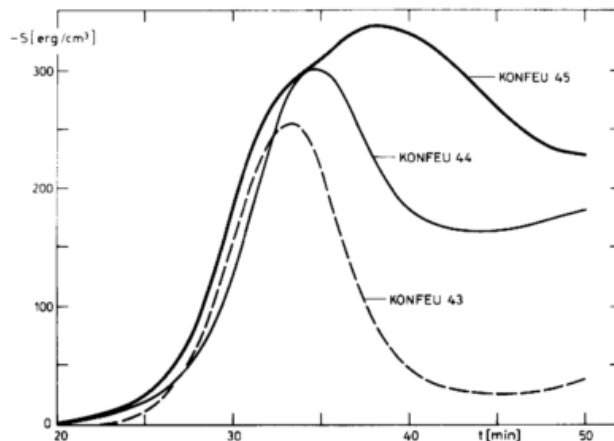


Abb. 54
Gebietsmittlerer Inhalt an statischer Energie, bezogen auf den Zeitpunkt 20 min

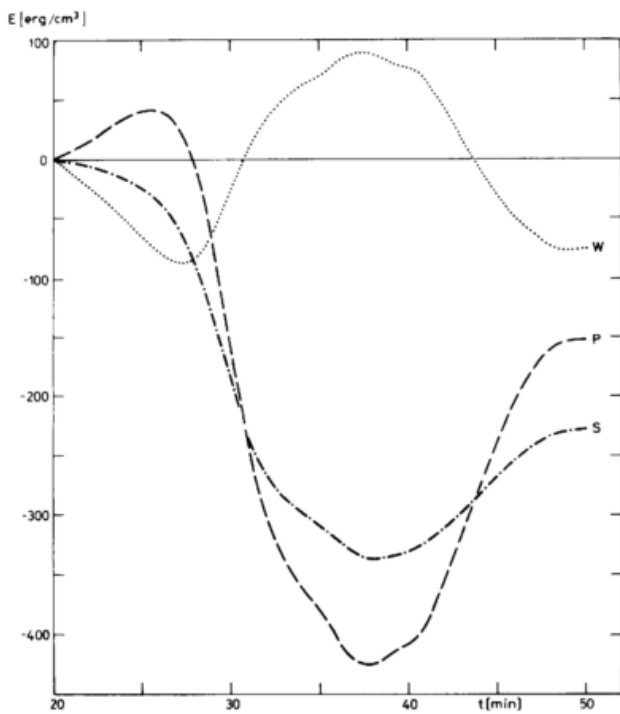


Abb. 55
Gebietsmittlere Inhalte an potentieller Energie (P), Wärme (W) und statischer Energie (S) für das Experiment KONFEU 45, bezogen auf den Zeitpunkt 20 min

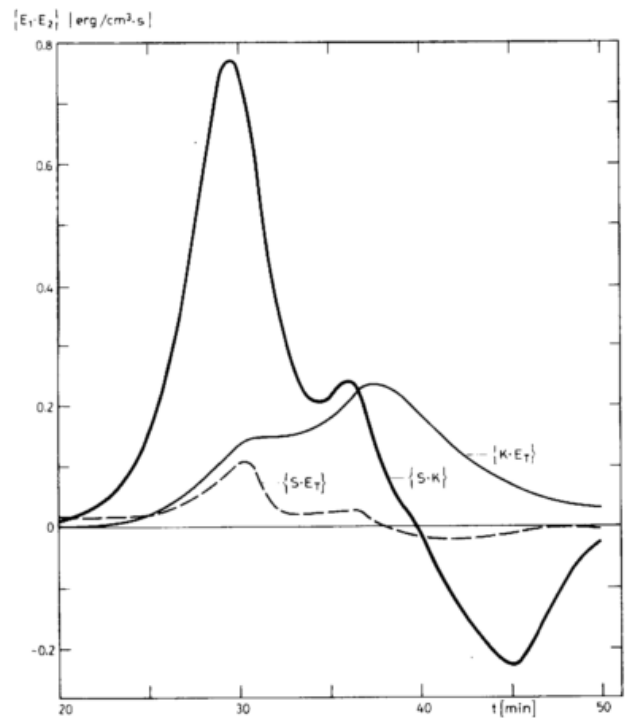


Abb. 57
Gebietsmittlere Umwandlungsraten statischer in kinetische Energie ($\{S \cdot K\}$) sowie kinetischer bzw. statischer Energie in Turbulenzenergie ($\{K \cdot E_T\}$ bzw. $\{S \cdot E_T\}$) für das Experiment KONFEU 45

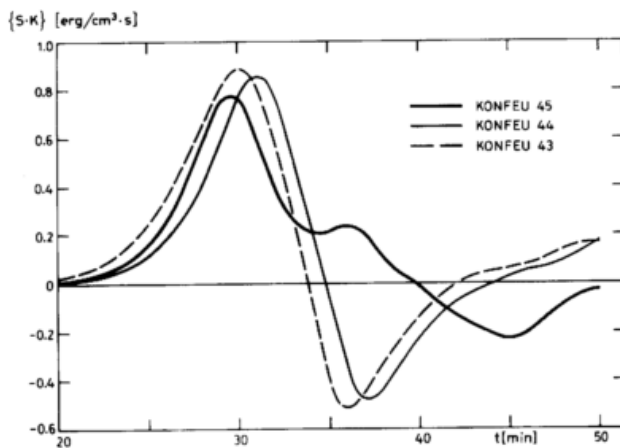


Abb. 56
Gebietsmittlere Umwandlungsrate statischer in kinetische Energie

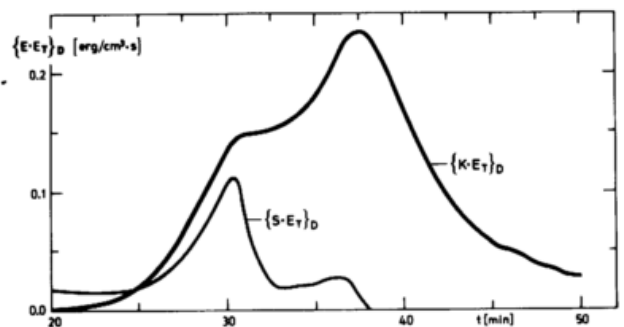


Abb. 58
Dissipative Komponente der gebietsmittleren Umwandlungsraten kinetischer ($\{K \cdot E_T\}_D$) und statischer ($\{S \cdot E_T\}_D$) Energie in Turbulenzenergie für das Experiment KONFEU 45

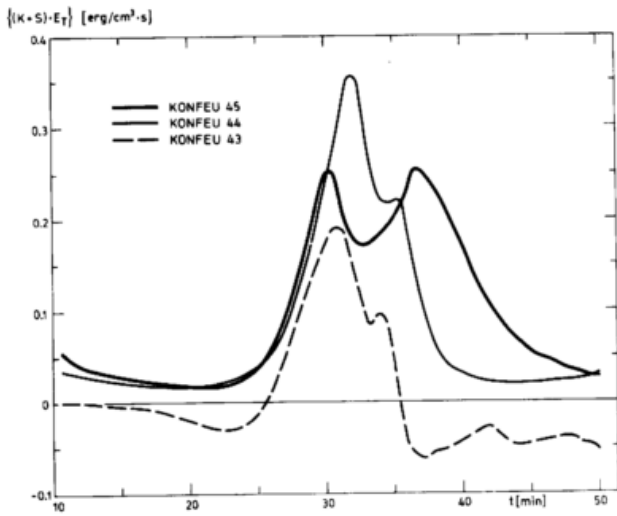


Abb. 59
Gebietsmittlere Umwandlungsrate skaliger Energie in Turbulenzenergie

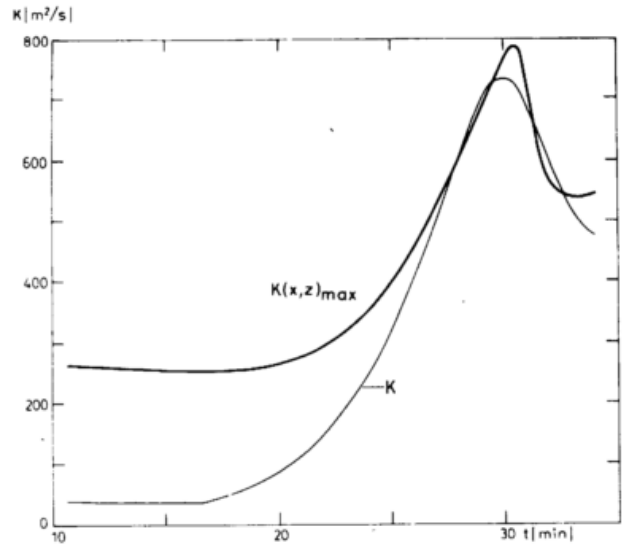


Abb. 61
Maximum des ortsabhängigen turbulenten Diffusionskoeffizienten ($K(x, z)_{max}$) und der nach Ansatz [199] diagnostisch berechnete konstante Wert (K) für das Experiment KONFEU 45

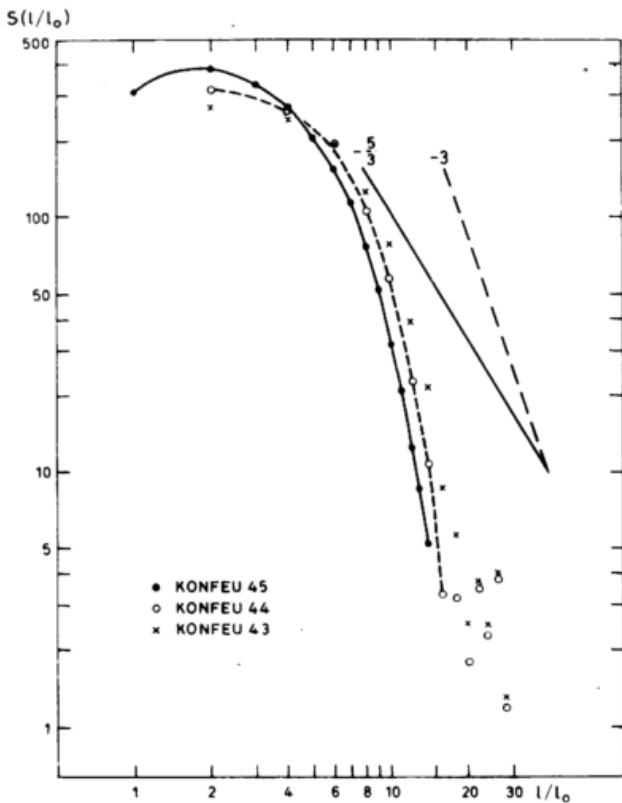


Abb. 60
Horizontale Energiespektren der Vertikalbewegung für die Experimente KONFEU 43-45 zum Zeitpunkt 20,01 min (Definitionen gemäß Abschnitt 2.5.)