

Berichte
des
Deutschen Wetterdienstes

Nr. 55
(Band 8)

DK 551.509.322.7 : 551.556.4

**Zum Problem der Verfrachtung radioaktiver
Spurenstoffe in der Atmosphäre**

von

Hans Haarländer

(mit 34 Abbildungen und 9 Tabellen im Text)

Offenbach a. M. 1959

Inhalt

	Seite
Zusammenfassung	3
Abstract	3
1. Allgemeine Betrachtungen zur Kinematik im stetig veränderlichen Massenfeld	3
1.1. Grundfragen	3
1.1.1. Stromlinien und Trajektorien	3
1.1.2. Darstellung der Bewegungsvorgänge nach Euler und Lagrange	4
2. Analytische Modellrechnungen zum Verfrachtungsproblem atmosphärischer Beimengungen	5
2.1. Bedeutung der verwendeten Symbole (Terminologie)	5
2.2. Geostrophisch approximierte Bahnlinien einer Druckverteilung mit amplifizierenden Wellen und Translation	6
2.3. Ein geostrophisches Strömungsfeld mit Translation zellularer Druckgebilde	7
2.3.1. Das zugehörige Druckfeld	7
2.3.2. Die Koordinaten der Trajektorien	8
2.4. Ein nichtgeostrophisches Stromfeld mit Translation permanenter Wellen in der F a u s t'schen Nullschicht	10
2.4.1. Die Koordinaten der Trajektorien im nichtgeostrophischen Fall	10
2.4.2. Die Koordinaten der Trajektorien im geostrophischen Fall	11
2.4.3. Das Druckfeld	12
2.4.4. Numerische Auswertung	13
2.4.5. Ein Vergleich zwischen der geostrophisch approximierten und der nichtgeostrophischen Trajektorie	15
3. Ergebnisse der Vorhersage von Trajektorien im 500-mb-Niveau und Beispiele der Verfrachtung atmosphärischer Verunreinigungen	16
3.1. Zur Konstruktionsmethode	16
3.1.1. Fehlerabschätzung der graphischen Konstruktionsmethode	20
3.1.2. Zur Konstruktion von Vorhersagetrajektorien	21
3.1.3. Vorläufige Ergebnisse einer Statistik der Trajektorien I. Näherung und der Vorhersagetrajektorien	22
3.1.4. Die Zugbahnen der Rauchpartikel anlässlich der kanadischen Waldbrände im September 1950	24
3.1.5. Die Verfrachtung des Saharasandes	26
Schlußbemerkungen	28
Literatur	32

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Met. H. H a a r l ä n d e r, Frankfurt/Main, Flughafen, Flugwetterwarte.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortführung der Ausführungen über die Konstruktion von Trajektorien (10). Neben der Verlagerung der Druckgebilde wird nunmehr das Hauptgewicht auf die Berücksichtigung der Entwicklungsdruckänderungen gelegt. Die Trajektorien werden an Hand zahlreicher Beispiele unter Benutzung der aktuellen und vorhergesagten Geopotentialfelder (absoluten Topographien einer Hauptisobarenfläche) konstruiert. Die Ergebnisse werden statistisch ausgewertet.

Im ersten Teil der Arbeit wird noch einmal auf die kinematischen Grundbegriffe und auf den Unterschied zwischen Stromlinien und Trajektorien hingewiesen. Die Bewegungsvorgänge werden in der Euler'schen und Lagrange'schen Form der Darstellung interpretiert.

Der zweite Teil befaßt sich mit analytischen Modellrechnungen. Es werden zwei analytische Modelle mit den zugehörigen geostrophisch approximierten Trajektorien und ein nichtgeostrophisches Modell (baroklines Strömungsfeld) mit den entsprechenden geostrophisch approximierten und nichtgeostrophischen Trajektorien durchgerechnet und verglichen. Die Berechnung der nichtgeostrophischen Trajektorien erfolgt in der Faust'schen Nullschicht.

Im dritten Teil findet die Methode der Konstruktion von Trajektorien eine Anwendung mit den aktuellen und vorhergesagten absoluten Topographien der 500-mb-Fläche. Der mittlere Fehlervektor beträgt im Falle der Vorhersagetrajektorien 24,5% der Länge der Trajektorien erster Näherung. Für die Konstruktion von Vorhersagetrajektorien wird eine vorläufige Faustregel aufgestellt (S. 24, Abb. 26).

Abschließend wird noch einiges über den Partikeltransport der kanadischen Waldbrände und über den Transport des Saharasandes gesagt. Auf das Problem der Sedimentation und die Konstruktion eines Ausfalldiagramms wird in den Schlußbemerkungen eingegangen.

Abstract

The present paper has been prepared in pursuance of the study on the construction of trajectories (10). Besides the removal of the pressure patterns particular stress is laid on the development of pressure changes. By means of numerous examples the trajectories are constructed by using the actual and forecasted geopotential fields (absolute topographies of a standard isobaric level). The results obtained are evaluated statistically.

The first part of the paper again refers to the fundamental kinematic terms as well as to difference between flowlines and trajectories. The processes of movement are interpreted according to the conception of Euler and Lagrange.

The second part deals with analytic model computations. Two analytic models with the relevant geostrophically approximated trajectories and one non-geostrophic model (barocline field of flow) are computed and compared with the corresponding geostrophically approximated and nongeostrophic trajectories. The non-geostrophic trajectories are computed in the Zero Layer (Nullschicht) as defined by Faust.

In the third part the method of constructing trajectories is referred to the actually measured and forecasted absolute topographies of the 500 mb level. The mean error of the vector for the forecasted trajectories amounts to 24.5% of the length of the trajectories of first approximation. A provisional thumb rule is given for the construction of forecast trajectories (cf. p. 24, table 26).

Conclusively are made some remarks on the particle transportation with the Canadian forest fires and with the transportation of the sand of the Sahara. The problem of the sedimentation and the construction of a fall-out diagramme is discussed.

1. Allgemeine Betrachtungen zur Kinematik im stetig veränderlichen Massenfeld

In den letzten Jahren sind zahlreiche Untersuchungen über das Problem radioaktiver Spurenelemente in der Atmosphäre durchgeführt worden. Zur systematischen Behandlung dieses Problemkreises wurden Ausschüsse und Unterausschüsse gebildet (41), die sich zur Aufgabe stellten, die Auswirkungen ionisierender Strahlen zu untersuchen. Von dem Trägerelement Atmosphäre und den damit zusammenhängenden Transportfragen abgesehen, sind vor allem Auswirkungen genetischer und pathologischer Natur zu erwarten. Insbesondere spielen hierbei Wirkungen von Strahlen eine besondere Rolle, die durch die Nahrungsmittelaufnahme in den menschlichen bzw. tierischen Körper gelangen.

In der vorliegenden Arbeit setzen wir uns in erster Linie mit dem atmosphärischen Transportproblem radioaktiver Spurenelemente auseinander und behandeln diesen Fragenkomplex ausschließlich unter meteorologischen Gesichtspunkten. Das Problem des Ausfalles tritt in den Hintergrund. Es soll einer späteren Bearbeitung vorbehalten bleiben.

1.1. Grundfragen

Die wachsende Bedeutung der Kernenergie für die Energieversorgung der Wirtschaft, wie leider auch für die Waffentechnik, hat in den letzten Jahren in der Meteorologie zu einer Wiederaufnahme der schon früher erörterten Probleme des Luftmassentransportes (1, 2, 3, 4) aber nunmehr mit anderen Mitteln geführt (5, 6, 7, 8, 9, 10). Das Problem der Verfrachtung erfordert detaillierte Untersuchungen über das stationäre und nichtstationäre räumliche Feld der Windvektoren. In den folgenden Kapiteln wollen wir uns mit einigen kinematischen Grundbegriffen über das horizontale Geschwindigkeitsfeld auseinandersetzen.

1.1.1. Stromlinien und Trajektorien

Eine anschauliche Darstellung des momentanen Windfeldes ist durch Stromlinien möglich. In einer strömenden Flüssigkeit bildet die Geschwindigkeitsverteilung ein zeitlich veränderliches Feld. Die Stromlinien geben uns zu einer bestimmten Zeit t überall die Richtung des Geschwindigkeitsvektors an. Ihre Differentialgleichung lautet in Vektorform

$$dr \times v(r, t) = 0 \quad [1]$$

und im zweidimensionalen Fall in Differentialform

$$v_y - y'v_x = 0 \text{ mit } y' = \frac{dy}{dx} \quad [2]$$

Für ein horizontales Geschwindigkeitsfeld gilt ganz allgemein die Beziehung

$$v = f \times \nabla \psi + \nabla \chi, \quad [3]$$

wobei ψ die Stromfunktion des divergenzfreien und χ das Geschwindigkeitspotential des wirbelfreien Anteiles des Windes bedeutet. Die Integrabilitätsbedingungen sind im Falle einer divergenzfreien Strömung für die Gleichung [2] erfüllt. In diesem Fall sind die Stromlinien mit der Stromfunktion identisch. Da die großräumigen Bewegungen der Atmosphäre erfahrungsgemäß quasigeostrophisch verlaufen und der geostrophische Wind — von der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters $f = 2 \omega \sin \varphi$ abgesehen — divergenzfrei ist, können entsprechend der Beziehung

$$v = \frac{f}{f_0} \times \nabla \Phi \quad [4]$$

auch die Isopotentiale $\Phi = \Phi(x, y, t) = \text{const.}$ als Stromlinien angesehen werden.

In einem kartesischen Rechtssystem $x \rightarrow E, y \rightarrow N$ sei als Beispiel das Geopotentialfeld durch die Beziehung

$$\Phi(x, y, t) = -f_0 U y + f_0 A_0 \cos k(x - ct) \quad [5]$$

mit

f_0	$= 2 \omega \sin \varphi_0$ [sec ⁻¹]	dem Coriolisparameter
U	$=$ [m sec ⁻¹]	der zonalen Grundströmung
$f_0 A_0$	$=$ [m ² sec ⁻²]	der Amplitude des Geopotentialfeldes ($A_0 = \text{m}^2 \text{sec}^{-4}$)
c	$=$ [m sec ⁻¹]	der Translationsgeschwindigkeit des Geopotentialfeldes
k	$= \frac{2\pi}{L}$ [m ⁻¹]	der Wellenzahl mit L als Wellenlänge
t	$=$ [sec]	der Zeit

gegeben. Die zu [5] gehörigen geostrophisch approximierten Geschwindigkeitskomponenten lauten dann zur Zeit $t = t_y$

$$v_x = U, \quad v_y = -k A_0 \sin k(x - ct_y) \quad [6]$$

Wegen [2] folgt als Differentialgleichung der Stromlinienschar

$$y' + \frac{k A_0}{U} \sin k(x - ct_y) = 0 \quad [7]$$

wodurch wir durch einfache Integration für die Schar der Stromlinien, die zur Zeit $t = t_0$ durch den Punkt x_0, y_0 (x_0, y_0 sind Scharparameter) gehen,

$$y = \frac{A_0}{U} [\cos k(x - ct_0) - \cos k(x_0 - ct_0)] + y_0 \quad [8]$$

erhalten.

Im nichtstationären Stromfeld weicht die Bahn der Teilchen vom Verlauf der Stromlinie ab. Ein Teilchen, das in der Zeit dt von P_0 nach P_1 gelangt ist, hat in P_1 eine andere Geschwindigkeit, als es dem Bild der Stromlinie zu einer Zeit entspricht, zu der das Teilchen noch in P_0 war. Die Trajektorie (Bahnlinie) wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{dt} - v[r(t), t] = 0 \quad [9]$$

beschrieben. Aus [9] folgt für die Ortskoordinaten

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v_x \{x(t), y(t), t\} dt + \text{const.} \\ y(t) &= \int v_y \{x(t), y(t), t\} dt + \text{const.} \end{aligned} \quad [10]$$

und mit [6] zur Zeit $t = t_0$ für die Trajektorie eines Massenteilchens, das zur Zeit t_0 den Punkt (x_0, y_0) passiere

$$y = -\frac{A_0}{c} [\cos k \left\{ \frac{\bar{U}x - cx_0}{U} \right\} - \cos(kx_0)] + y_0 \quad [11]$$

mit $\bar{U} = U - c$ [m sec⁻¹].

Die Stromlinie [8] beschreibt also den Weg eines Massenteilchens in einem von der Zeit unabhängigen Druckfeld, während die Bahnlinie [11] den Transportweg in einem zeitabhängigen Druckfeld ergibt. Beide Ergebnisse sind geostrophisch approximiert, da wir in der Meteorologie aus praktischen Gründen vom geostrophischen Wind Gebrauch machen. Er ist aber nur in erster Näherung erfüllt. Die Abweichungen zwischen ihm und dem wahren Wind können in der Schicht maximaler Windgeschwindigkeit in 9—11 km Höhe im Mittel bis zu 39% ansteigen (12).

1.1.2. Darstellung der Bewegungsvorgänge nach Euler und Lagrange

Den Zustand einer Flüssigkeitsbewegung können wir auf zwei Arten beschreiben:

a) Nach Euler ist er kinematisch dann als vollständig beschrieben, wenn der Geschwindigkeitsvektor v als Funktion des Ortsvektors $r = r(x, y, z)$ und der Zeit t , also durch die Beziehung

$$v = v(x, y, z, t) \quad [12]$$

gegeben ist. Man ist dann in der Lage, die Geschwindigkeit — aber auch andere Eigenschaften einer strömenden Flüssigkeit bei festgehaltenem Raumpunkt x, y, z — als Funktion der Zeit zu registrieren. Dabei ordnen wir irgendeiner registrierten Eigenschaft (z. B. Geschwindigkeit, Temperatur, Dichte . . .) stets andere Partikel des Mediums zu und erhalten charakteristische Werte für verschiedene Luftmassen an einer ortsfesten Station (ortsfeste Registrierung).

b) Hingegen ist die Flüssigkeitsbewegung nach Lagrange kinematisch dann bestimmt, wenn der Geschwindigkeitsvektor v als Funktion der Zeit t und der Massenteilchen bekannt ist (Numerierungskoordinaten a, b, c der Massenteilchen). Die Ortskoordinaten des Massenteilchens sind uns dann durch die Beziehung

$$r = r(a, b, c, t) \quad [13]$$

gegeben. Für den Geschwindigkeitsvektor v folgt dann

$$v = v(a, b, c, t) \quad [14]$$

Wir verwenden also zweckmäßig rechtwinklige Anfangskoordinaten a, b, c , welche die Lage der Teilchen im Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ bestimmen. An die Stelle der substantiellen Differentialquotienten der Euler'schen Gleichung

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad [15]$$

treten die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad [16]$$

wobei auch die äußeren Kräfte und der Druck als abhängig von den Numerierungskoordinaten und der Zeit zu betrachten sind. Diese Darstellung erlaubt für ein bestimmtes Teilchen die Eigenschaften als Funktion der Zeit zu registrieren, wobei die registrierte Eigenschaft stets andere Ortskoordinaten hat, aber demselben Teilchen zuzuordnen ist (Registrierung durch constant pressure level balloon).

Das Geopotential [Gl. 5] ist uns in der Euler'schen Form gegeben, wodurch wir für das zugehörige zweidimensionale geostrophisch approximierte Geschwindigkeitsfeld

$$v(x, y, t) = \sqrt{U^2 + k^2 A_0^2 \sin^2 k(x - ct)} \quad [17]$$

erhalten. Durch einfache Integration der Gleichung [6] mit der Anfangsbedingung, daß zur Zeit

$$\begin{aligned}
 x(0) &= a & x(0) &= x_0 \\
 t = 0 : & & \text{bzw.} : & \\
 y(0) &= b & y(0) &= y_0
 \end{aligned}
 \quad [18]$$

ist, vollziehen wir den Übergang von der Euler'schen Form der Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten in die Form von Lagrange, indem wir die [10] entsprechenden Gleichungen in [6] substituieren. Es ist

$$\begin{aligned}
 x(t) &= U t + a \\
 y(t) &= -\frac{A_0}{c} [\cos k (\bar{U} t + a) - \cos (ka)] + b
 \end{aligned}
 \quad [19]$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= U t + x_0 \\
 y(t) &= -\frac{A_0}{c} [\cos k (\bar{U} t + x_0) - \cos (kx_0)] + y_0.
 \end{aligned}
 \quad [20]$$

Die Gleichungen [19], [20] sind völlig identisch und be-

schreiben den Weg eines Luftteilchens in einem kartesischen Koordinatensystem. Nun setzen wir die Ortskoordinaten in Gleichung [6] ein, wodurch wir auch die Geschwindigkeitskomponenten eines bestimmten Massenteilchens in der Lagrange'schen Form der Darstellung zu

$$v_x = U, \quad v_y = -k A_0 \sin k (\bar{U} t + a) \quad [21]$$

erhalten. Ebenso läßt sich der zeitliche Ablauf des Geopotentials dieses Massenteilchens in der Lagrangeschen Form darstellen. Gleichung [5] geht dann über in

$$\phi(a, b, t) = f_0 A_0 \left\{ \frac{U^*}{c} \cos k (\bar{U} t + a) - \frac{U}{c} \cos (ka) \right\} - f_0 U b \quad [22]$$

mit $U^* = U + c$

2. Analytische Modellrechnungen zum Verfrachtungsproblem atmosphärischer Beimengungen

2.1. Bedeutung der verwendeten Symbole (Terminologie)

Symbol	Bedeutung	Größenordnung	Dimension
x, y, z	Raumkoordinaten	—	m
t, p	Zeit, Luftdruck	—, 10^8	sec $g \text{ m}^{-1} \text{ sec}^{-2}$
$\phi = g z$	Geopotential der Isobarenflächen (mit g als Schwerebeschleunigung und z als Höhe)	0 —	$10^3 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2}$
$v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_y = \frac{dy}{dt}$	Geschwindigkeitskomponenten	0 — ± 30	m sec^{-1}
$U, U(p)$	Zonale Grundströmung Spezieller Ansatz: $U(p) = U_0 \sin \left\{ \varepsilon^* x \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right) \right\}$ mit ε^* als Parameter	a) 37.5 b) 20.0	m sec^{-1}
$f_0 = 2 \omega \sin \varphi_0$	Coriolisparameter (mit ω als Winkelgeschwindigkeit der Erde und $\varphi_0 = 50^\circ \text{ N}$ der geogr. Breite)	1.117×10^{-4}	sec^{-1}
c	Verlagerungsgeschwindigkeit der Drucksysteme	10.0	m sec^{-1}
$f_0 A_0$	Amplitude der Druckfelder in der y -Richtung ($A_0 = 8.952 \times 10^6$)	10×10^2 A_0	$\text{m}^2 \text{ sec}^{-2}$ $\text{m}^2 \text{ sec}^{-1}$
$f_0 B_0$	Amplitude der Druckfelder in der x -Richtung ($B_0 = 7.752 \times 10^6$)	8.66×10^2 B_0	$\text{m}^2 \text{ sec}^{-2}$ $\text{m}^2 \text{ sec}^{-1}$
$k = \frac{2\pi}{L}$	Wellenzahl, mit $L = 2.0 \times 10^6$ [m] der Wellenlänge	10^{-6}	m^{-1}
$f_0 A_0 e^{\lambda t}$	Zeitabhängige Amplitude des Druckfeldes, mit λ dem Amplitudenkoeffizienten, $\lambda = 2.888 \times 10^{-3}$ [h^{-1}]	$10 \times 10^2 e^{\lambda t}$	$\text{m}^2 \text{ sec}^{-2}$
$\bar{U} = \frac{1}{p_0} \int U(p) dp$	Mittlere Grundströmung (Verlagerungsgeschwindigkeit der Druckgebilde) — spezielle Annahme —	—	—
μ	Koeffizient der Wirbelstärke	a) 0.6 b) 0.86	[1]
$\xi_{Z,A} = \left\{ \frac{1-\mu^2}{1+\mu} - 1 \right\} f_0$	Z = zyklonale Vorticity A = antizyklonale Vorticity	$\xi_Z = 1.0 f_0$ $\xi_A = -0.5 f_0$	sec^{-1} sec^{-1}
$(U - \bar{U})$	Ageostrophische zonale Grundströmung mit $U = 37.5$ [m sec^{-1}] und $\bar{U} = 15.73$ [m sec^{-1}]	21.77	$\text{m}^2 \text{ sec}^{-1}$

Ferner den Koeffizienten $\beta = \frac{1-\mu}{1+\mu}$, rkA_0 , $\frac{\lambda}{k\bar{U}}$ und φ wegen $\text{tg } \varphi = \frac{\lambda}{k\bar{U}}$, mit den speziellen Werten $\beta = 0.25$ bzw. 0.0753 , $rkA_0 = 0.8676 \times 10^6$, $\frac{\lambda}{k\bar{U}} = 0.2553$ und $\varphi = 14.31^\circ$.

2.2. Geographisch approximierte Trajektorien einer Druckverteilung mit amplifizierenden Wellen und Translation

Die nachfolgenden Modellrechnungen verfolgen das Ziel, das graphische Konstruktionsverfahren, auf das wir in einem späteren Kapitel noch einmal ausführlicher eingehen werden, einer eingehenden Überprüfung zu unterziehen. Dieses Konstruktionsverfahren beruht auf einer geostrophischen Approximation der Geschwindigkeitskomponenten, so daß wir größere Abweichungen bei nichtgeostrophischen Prozessen zu erwarten haben. In der Hauptsache werden wir drei analytische Modelle gegenüberstellen, zwei geostrophische und ein nichtgeostrophisches Strömungsfeld. Das nichtgeostrophische Feld enthält gleichzeitig die Vertikalkomponente der Windgeschwindigkeit, so daß neben der ageostrophischen Abweichung auch die vertikale Versetzung der Massenteilchen untersucht werden kann. In dieser Mitteilung beschränken wir uns zunächst auf die Feldverteilung in der Faust'schen Nullschicht (20, 21, 22), in der keine vertikalen Luftversetzungen stattfinden. Selbst das Reservoir der analytischen Modellrechnungen ist schnell erschöpft, da einer exakten Integration zur Bestimmung der Ortskoordinaten einer Bahnlinie erhebliche Schwierigkeiten im Wege stehen. Diese Schwierigkeiten lassen sich bei Benutzung von Schnellrechenautomaten vollständig überwinden.

Unseren Ansatz [Gl. 5], den wir als Beispiel zur Erklärung des Unterschiedes zwischen Stromlinien und Trajektorien ansetzten, erweitern wir nun derart, daß sich die Amplitude der oszillatorischen Verteilung des Geopotentialfeldes bei seiner Verlagerung von West nach Ost mit der Geschwindigkeit c gleichzeitig innerhalb von 24 Stunden auf den doppelten Betrag erhöht.

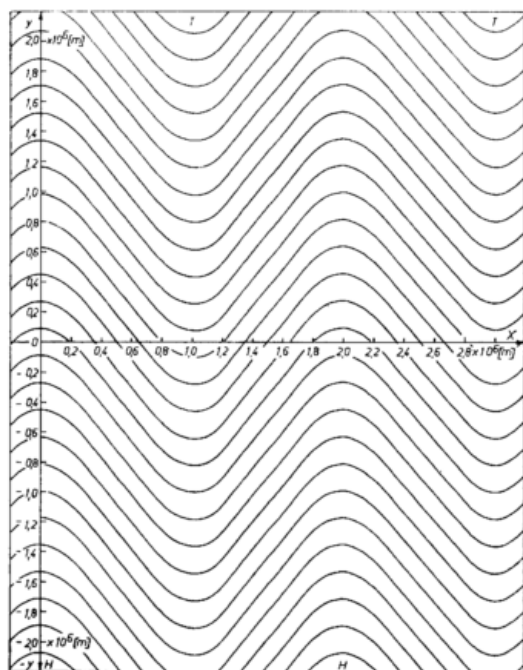


Abb. 1
Das Geopotentialfeld zur Zeit $t = 0$ (Analytisches Modell I)

Es ist

$$\Phi(x, y, t) = -f_0 U y + f_0 A_0 e^{\lambda t} \cos k(x - ct). \quad [23]$$

Die verwendeten Symbole sind in Kapitel 2.1. erklärt. Zur Zeit $t = 0$ liegt in Richtung der y -Achse (Abb. 1) ein Höhenhochkeil und in einer Entfernung von 1050 km ein Höhenrog. Nach 24 Stunden liegt der Rücken 9000 km vom Koordinatenanfangspunkt entfernt (Abb. 2).

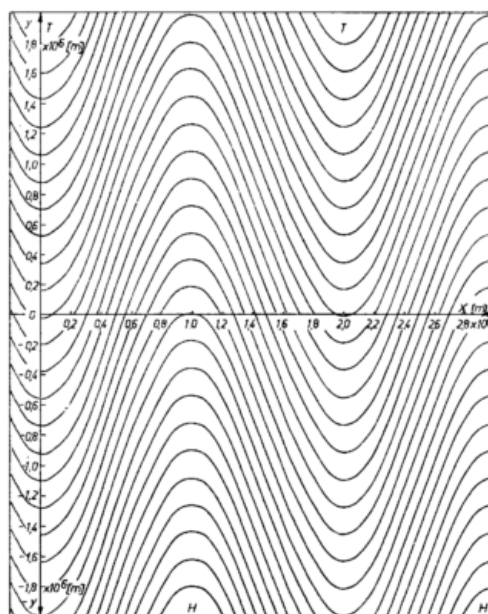


Abb. 2
Das Geopotentialfeld zur Zeit $t = 24h$ (Analytisches Modell I)

Mit [4] und [23] erhalten wir die geostrophisch approximierten Geschwindigkeitskomponenten in der Darstellungsform nach Lagrange zu

$$v_x = U, \quad v_y = -k A_0 e^{\lambda t} \sin k(\bar{\Gamma}t + a), \quad [24]$$

woraus wir durch elementare Integration die Ortskoordinaten der Bahnlinie eines Massenteilchens mit den Numerierungskordinaten (a, b) zur Zeit $t = 0$ zu

$$x(t) = Ut + a$$

$$y(t) = rk A_0 [e^{\lambda t} \cos \{ \varphi + k(\bar{\Gamma}t + a) \} - \cos(ka + \varphi)] + b \quad [25]$$

mit

$$r = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + k^2 \bar{\Gamma}^2}} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\lambda}{k \bar{\Gamma}} \right) \quad [26]$$

erhalten. Das Geopotential des Massenteilchens (a, b) als Funktion der Zeit ist uns ebenfalls nach Lagrange durch die Beziehung

$$\Phi(a, b, t) = -f_0 A_0 [rk U \{ e^{\lambda t} \cos(\varphi + k(\bar{\Gamma}t + a)) - \cos(\varphi + ka) \} - e^{\lambda t} \cos k(\bar{\Gamma}t + a)] - f_0 U b \quad [27]$$

gegeben, woraus zur Zeit $t = 0$

$$\Phi(a, b, 0) = f_0 A_0 \cos(ka) - f_0 U b \quad [28]$$

und für ein Teilchen, das im Koordinatenanfangspunkt startet,

$$\Phi(0, 0, 0) = f_0 A_0 \quad [29]$$

resultiert. Wir könnten auf diese Weise weitere Eigenschaften wie die Temperatur, die Dichte etc. als Funktion der Zeit für ein und dasselbe Teilchen darstellen und diskutieren.

Die numerische Auswertung der Gleichung [24] wurde für Massenteilchen mit den Anfangskordinaten

$$(a, b) = (0,0), (0,4,0), (0,6,0), (1,0,0) \times 10^6 \text{ [m]}$$

zur Zeit $t = 0$ durchgeführt.

Da das Geopotentialfeld völlige Symmetrie in der y -Richtung aufweist, können auch alle anderen Bahnlinien senkrecht oberhalb und unterhalb der x -Koordinate durch Parallelverschiebung ermittelt werden. Die berechneten Werte der Ortskoordinaten haben wir in Tabelle 1 zusammengestellt und in Abb. 3 graphisch dargestellt.

Tab. 1

Die Ortskoordinaten der Trajektorien mit den Anfangs-
koordinaten (a, b) in 10³ km.

t ^h	a ₀	b ₀	a _{0,4}	b ₀	a _{0,6}	b ₀	a _{1,0}	b ₀
0	0.00	0.00	0.400	0.000	0.600	0.000	1.000	0.00
4	0.29	-1.10	0.688	-0.434	0.888	-0.167	1.290	0.09
8	0.58	-0.43	0.976	-0.886	1.176	-0.419	1.580	0.40
12	0.86	-0.96	1.264	-1.263	1.464	-0.488	1.860	0.89
16	1.15	-1.62	1.552	-1.438	1.752	-0.288	2.150	1.48
20	1.44	-2.28	1.840	-1.357	2.040	-0.218	2.440	2.09
24	1.73	-2.78	2.128	-0.930	2.328	-0.892	2.730	2.55

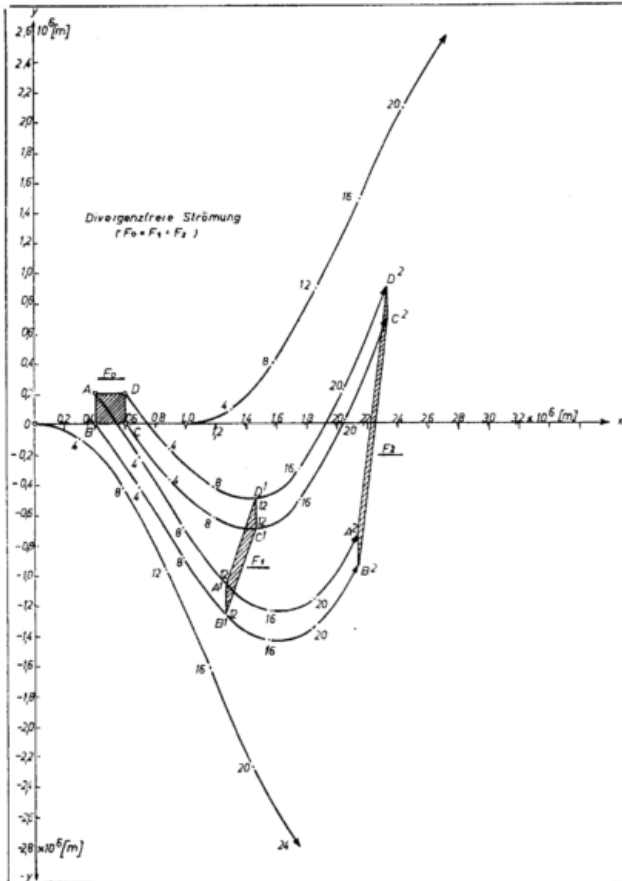


Abb. 3

Verschiedene Trajektorien einer geostrophischen approximierten Druckverteilung mit amplifizierenden Wellen u. Translation (Divergenzfreie Strömung)

Die Darstellung vermittelt uns ein anschauliches Bild von der horizontalen Ausbreitung atmosphärischer Beimengungen. Da das Strömungsfeld divergenzfrei ist, bleibt eine ursprünglich mit 40 000 qkm angenommene Fläche ABCD während der Dauer der Verfrachtung erhalten. Es tritt lediglich eine Verzerrung des Feldes ein*). Im nichtgeostrophischen Fall werden wir feststellen, daß sich die Felder in den Zonen der Konvergenz einengen, während sie sich im Bereich einer Divergenz auseinanderziehen. Damit ist gleichzeitig eine adäquate Konzentrationszunahme bzw. -abnahme der mit Spaltprodukten angereicherten Fläche oder Volumeneinheit verbunden.

Das Flächenelement ABCD hat nach 12 (24) Stunden eine ganz andere Form. Prüfen wir mit Hilfe eines

*) Vergleiche: Welander (23)

Integrators oder in unserem einfachen Fall durch exakte Berechnung nach der Formel

$$F(x, y) = \{y_A - y_B\} \{x_C - x_B\} 10^6 \quad [30]$$

die verzerrten Flächen F_1, F_2 , so stellen wir fest, daß diese gleich groß bleiben, d. h. daß die in der Ausgangsfläche F_0 vorhandene Konzentration an Spaltprodukten geblieben ist. Eine vertikale Abwanderung an Elementen wird durch eine gleiche Zuwanderung aus entgegengesetzter Richtung ausgeglichen. Wenn auch das divergenzfreie Strömungsfeld wesentliche Mängel gegenüber den wahren Vorgängen in der Atmosphäre aufweist, gibt es doch näherungsweise über die Bewegungsvorgänge recht gute Aufschlüsse. Nehmen wir zur Zeit $t = 0$ einen Transport atmosphärischer Beimengungen auf der x-Achse von den Punkten $x = 0, 0.4, 0.6, 0.8$ und 1.0×10^6 [m] an, so werden die Partikel bereits nach 12 Stunden um fast die fünffache Entfernung auseinandergezerrt. Ein Teil der Elemente wandert im Strömungsfeld nach Süden, der andere Teil nach Norden. Ein solches Verhalten kann keineswegs allein aus der Ausgangsdruckverteilung erschlossen werden, was bedeutet, daß wir bei Betrachtungen der absoluten Topographien sehr vorsichtig sein müssen, sofern es sich um den Transport bestimmter Luftmassen oder Luftkörper in diesem Strömungsfeld handelt. Den Ausschlag gibt dabei die zeitliche Änderung des Druckfeldes.

2.3. Ein geostrophisches Strömungsfeld mit Translation zellularer Druckgebilde

Eine Erweiterung des Problems in seiner mathematischen Behandlung erblicken wir zunächst darin, daß wir von dem einfachen Wellencharakter des Stromfeldes abgehen und ein Strömungsfeld mit geschlossenen Isohypsen vorgeben. Wir wissen aus der Erfahrung, daß selbst in großen Höhen (500, 300, 100 mb) unsere absoluten Topographien noch geschlossene Isopotentiallinien aufweisen und wollen uns die Frage vorlegen: „Welche Bahnen beschreiben die Luftkörper in einer solchen Druck- bzw. Stromfeldverteilung in unmittelbarer Nähe der Druckzentren oder im Jet-Stream?“ Später soll das graphische Konstruktionsverfahren auf diese Druckverteilung mit speziellen Anfangspunkten (x_0, y_0) oder (a, b) angewandt werden, um systematische Abweichungen festzustellen, die wir als Grundlage einer weiteren Verbesserung des graphischen Verfahrens auswerten wollen.

2.3.1. Das zugehörige Druckfeld

Wir verzichten auf eine zeitabhängige Amplitude der Gleichung [23] und erweitern diesen Ansatz, indem wir eine weitere von y abhängige oszillatorische Verteilung

lung überlagern (35). Als Ausgangsgleichung für die Geopotentialverteilung setzen wir

$$\Phi(x, y, t) = -f_0 U y + f_0 A_0 \cos(\alpha y) + f_0 B_0 \cos \gamma(x - ct) \quad [31]$$

In diesem Ansatz ist γ die Wellenzahl in der x -Richtung. Zur Berechnung des Druckfeldes sowie einiger Trajektorien mit speziellen Anfangskoordinaten haben wir $U = c$ (im nichtgeostrophischen Modell $\bar{U} = c$) zu setzen, d. h. daß die zonale Grundströmung (bzw. mittlere zonale Grundströmung) gleich der Translation der Druckgebilde ist. Diese Annahme stellt in diesem Modell einen Spezialfall dar. Wir müssen uns dieser Einschränkung fügen, da wir sonst auf mathematische Schwierigkeiten bei der exakten Lösung zur Bestimmung allgemeingültiger Trajektorien stoßen würden. Die Werte, die wir der Berechnung zugrundelegten, sind in 2.1. angegeben.

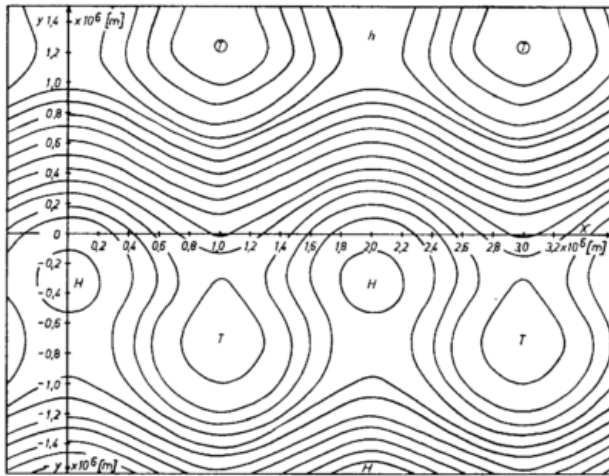


Abb. 4a

Ein geostrophisches Strömungsfeld mit Translation zellulärer Druckgebilde für die Amplitudenkoeffizienten:
 $A_0 = 8.95 \times 10^6$, $B_0 = 7.75 \times 10^6$ und $c = 10$
 (Divergenzfreie Strömung — Analytisches Modell II)

Abb. 4a zeigt die Funktion der Gl. [31] als graphische Darstellung. Bei $x = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ liegt für alle Werte von y ein Trog bzw. geschlossenes Tiefdrucksystem und bei $x = 2n + 2$ eine Antizyklone bzw. Hochdruckkeil. Zwischen den Kernen existiert ein mäandrierender Jet-Stream von West nach Ost. Die zyklonalen Wirbel sind im Geopotentialfeld stärker ausgeprägt als im Stromfeld (35).

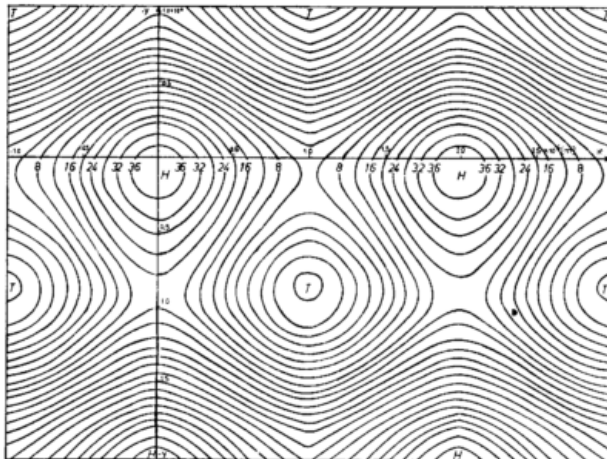


Abb. 4b

Ein geostrophisches Strömungsfeld mit Translation zellulärer Druckgebilde für die Werte der Amplitudenkoeffizienten:
 $A_0 = 17.9 \times 10^6$, $B_0 = 15.51 \times 10^6$, $c = 20.0$

Abb. 4b zeigt die gleiche Druckverteilung für andere Werte der Amplitudenkoeffizienten, um eine stärkere Zonalströmung zu erzeugen. Für diese Abbildung gelten die Werte:

$$\begin{aligned} f_0 A_0 &= 20 \times 10^2 \text{ [m}^2 \text{ sec}^{-2}\text{]}, & A_0 &= 17.9 \times 10^6 \text{ [m}^2 \text{ sec}^{-1}\text{]} \\ f_0 B_0 &= 17.3 \times 10^2 \text{ [m}^2 \text{ sec}^{-2}\text{]}, & B_0 &= 15.51 \times 10^6 \text{ [m}^2 \text{ sec}^{-1}\text{]} \\ U = c &= 20 \text{ [msec}^{-1}\text{]}, & \gamma &= 10^{-6} \pi \text{ [m}^{-1}\text{]}, \\ f_0 U &= 22.342 \times 10^{-4} \text{ [m sec}^{-2}\text{]} \end{aligned}$$

2.3.2. Die Koordinaten der Trajektorien

Aus [31] folgt für

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\gamma f_0 B_0 \sin \gamma(x - ct) \\ \text{b) } \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -f_0 U - \alpha f_0 A_0 \sin(\alpha y) \end{aligned} \quad [32]$$

wodurch wir im geostrophischen Fall mit der Substitution

$$\xi = x - ct, \quad c = U \quad [33]$$

die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d\xi}{dt} &= \alpha A_0 \sin(\alpha y) \\ \text{b) } \frac{dy}{dt} &= -\gamma B_0 \sin(\gamma \xi) \end{aligned} \quad [34]$$

erhalten. Gleichung [34a] multiplizieren wir mit $\frac{dy}{dt}$, Gleichung [34b] mit $\frac{d\xi}{dt}$ und subtrahieren beide Gleichungen voneinander. Es folgt

$$A_0 \cos(\alpha y) + B_0 \cos(\gamma \xi) = a_1(\xi_0, y_0) \quad [35]$$

woraus wir die y -Koordinate der Trajektorien dieser Stromfeldverteilung mit der Anfangsbedingung, daß zur Zeit

$$t = 0 \quad \text{auch} \quad a_1(\xi_0, y_0) \equiv 0 \quad [36]$$

sein soll, zu

$$y = \pm \frac{1}{\alpha} \arccos \left[-\frac{B_0}{A_0} \cos \gamma(x - ct) \right] \quad [37]$$

erhalten. Die Bestimmung der x -Koordinate führt auf ein elliptisches Integral erster Gattung. Aus [35] folgt

$$\sin(\alpha y) = \pm \sqrt{\left[1 - \left\{ \frac{a_1(\xi_0, y_0)}{A_0} - \frac{B_0}{A_0} \cos(\gamma \xi) \right\}^2 \right]} \quad [38]$$

Gleichung [38] in Gleichung [34a] eingesetzt, ergibt

$$\frac{d\xi}{dt} \sqrt{\left[1 - \left\{ \frac{a_1(\xi_0, y_0)}{A_0} - \frac{B_0}{A_0} \cos(\gamma \xi) \right\}^2 \right]} = \pm \alpha A_0 dt \quad [39]$$

und nach Umformung mit Hilfe der Additionstheoreme der ebenen Trigonometrie

$$\frac{d\xi}{dt} \sqrt{\left[1 - \left\{ \frac{a_1(\xi_0, y_0)}{A_0} - \frac{B_0}{A_0} \left(1 - \frac{1 - \text{tg}^2\left(\frac{\gamma \xi}{2}\right)}{1 + \text{tg}^2\left(\frac{\gamma \xi}{2}\right)} \right) \right\}^2 \right]} = \pm \alpha A_0 dt \quad [40]$$

womit wir wegen

$$Z = \text{tg}\left(\frac{\gamma \xi}{2}\right) \quad \text{und} \quad d\xi = \frac{2 dz}{\gamma(1+z^2)} \quad [41]$$

schließlich auf das Integral von der Form

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{\left[(1+z^2)^2 - \left\{ \frac{a_1(x_0, y_0)}{A_0} (1+z^2) - \frac{B_0}{A_0} (1-z^2) \right\}^2 \right]}} = \pm \frac{\alpha \gamma A_0 t}{2} \quad [42]$$

kommen. Der Einfachheit halber berechnen wir die speziellen Trajektorien mit den Anfangskoordinaten

$$x_0 = y_0 = \pm 0.5(2n + 1) \times 10^6 \quad \text{zur Zeit} \quad t = 0 \quad [43]$$

und setzen gleichzeitig $\alpha = \gamma = 10^{-6} \pi$, d. h. wir betrachten im Grundzustand quadratisch zelluläre Druckfelder.

Daraus ergibt sich

$$a_1(x_0, y_0) \equiv 0$$

und Gleichung [42] geht über in

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{\left[(1+z^2)^2 - \frac{B_0^2}{A_0^2} (1-z^2)^2 \right]}} = \pm \frac{\gamma^2}{2} A_0 t \quad [44]$$

bzw.

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{z^4 + k_1 z^2 + 1}} = \pm \frac{\gamma^2}{2} \sqrt{A_0^2 - B_0^2} t \quad [45]$$

mit

$$k_1 = \frac{2(A_0^2 + B_0^2)}{A_0^2 - B_0^2}, \quad k_2 = 1 \quad [46a]$$

und der Bedingung, daß

$$A_0 > B_0 \text{ und somit } k_1 > 0 \quad [47]$$

gefordert werden muß. Die Wurzeln der biquadratischen Gleichung haben mit [47] vier imaginäre Werte

$$Z_{1-4} = \pm \sqrt{-\frac{(A_0 \pm B_0)^2}{(A_0^2 - B_0^2)}} \quad [48]$$

Für Gleichung [46] können wir auch

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(q^2+z^2)(r^2+z^2)}} = \pm \frac{\gamma^2}{2} \sqrt{A_0^2 - B_0^2} t + \int_0^{z_0} \frac{dz_0}{\sqrt{(q^2+z_0^2)(r^2+z_0^2)}} \quad [49]$$

mit

$$q^2 = \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4}}{2}, \quad r^2 = \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4}}{2}, \quad r^2 > q^2 \quad [50]$$

schreiben und erhalten als Lösung des elliptischen Integrals

$$F(\alpha^*, q) = \pm \frac{\gamma^2 \sqrt{A_0^2 - B_0^2}}{2} \times t + F(\alpha^*, q_0) \quad [51]$$

mit

$$\begin{aligned} a) \sin^2 \alpha^* = \ell^2 = 1 - \frac{q^2}{r^2} & \quad b) \operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{q} \\ c) z = \operatorname{tg} \left[\frac{\gamma}{2} (x - ct) \right] & \quad d) q_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{z_0}{q} \right) \\ e) \alpha^* = \operatorname{arc} \sin \ell = \operatorname{arc} \sin \sqrt{1 - \frac{q^2}{r^2}} & = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{q} \right) \end{aligned} \quad [52]$$

Aus [52], [41] und [32] folgt dann für die x-Koordinate der Trajektorien

$$x(t) = \frac{2}{\gamma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ q \operatorname{tg} \varphi \right\} + ct \quad [53]$$

womit das Problem für alle Anfangspunkte gemäß [43] analytisch gelöst ist. Die Werte der elliptischen Funktion [51] entnehmen wir den Tabellen von Jahnke-Emde (37), so daß die erhaltenen Gleichungen numerisch ausgewertet werden können.

Wir haben die geostrophisch approximierten Trajektorien, die zum Druckfeld, das wir in Abb. 4a graphisch dargestellt haben, für die Anfangskoordinaten

$$(x_0, y_0) = (0.5, 0.5) \text{ und } (0.5, -0.5)$$

berechnet und fügen das Ergebnis in Tab. 2 bzw. Abb. 5 bei.

Tab. 2

Die Koordinaten der Trajektorien mit den Anfangswerten (a, b) des analytischen Modells II

	$x_0 = 0.5 \times 10^6$	$y_0 = 0.5 \times 10^6$	$x_0 = 0.5 \times 10^6$	$y_0 = -0.5 \times 10^6$
t	x	y	x	y
0	0.5000	0.5000	0.5000	-0.5000
4	1.1932	0.2061	0.476	-0.7554
8	1.8843	0.3358	0.575	-0.8330
12	2.5486	0.6626	0.672	-0.7530
16	3.0726	0.8193	0.645	-0.4940
20	3.5330	0.8139	0.527	-0.1860
24	4.0672	0.6840	0.407	-0.3470

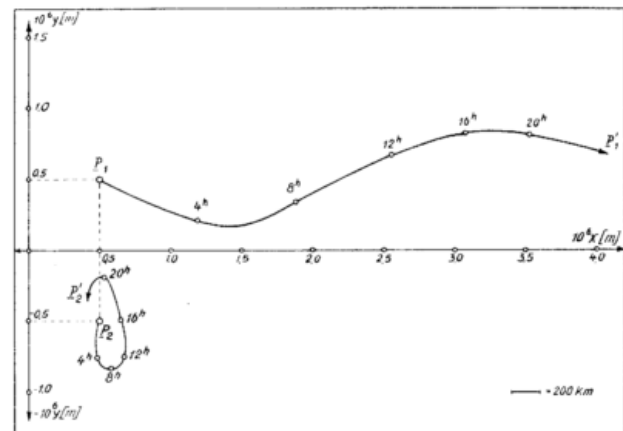


Abb. 5

Geostrophisch approximierten Trajektorien zum Strömungsfeld, das in Abbildung 4a dargestellt ist (Analytisches Modell II)

Den Verlauf der Bahnlinie P_1P_1' entnimmt man ohne Schwierigkeiten und mit bloßem Auge in erster Näherung dem Geopotentialfeld, denn die Strahlströmung ist zwischen den Druckzentren so stark, daß eine Abwanderung zu den Zentren hin unwahrscheinlich ist. Da der Wellencharakter völlige Symmetrie aufweist, würde man auch auf eine gleichmäßig zyklonal und antizyklonal gekrümmte Bahnlinie schließen. Wir stellen jedoch fest, daß die Partikel in der antizyklonalen Phase beschleunigt werden, die Bahnlinie zeigt eine geringere Krümmung als in der zyklonalen Phase. Weit schwieriger ist es, den Weg der Partikel mit den Anfangskoordinaten

$$x_0 = 0.5 \times 10^6 \text{ [m]}, \quad y_0 = -0.5 \times 10^6 \text{ [m]}$$

auf Grund der Anfangsdruckverteilung vorherzusagen. Die Teilchen werden zunächst nach Süden verfrachtet, gelangen dann mit erheblicher Verzögerung in den südlichen Konvergenzbereich und werden auf der Südseite der nördlichen Antizyklone wieder nach Norden verfrachtet. Sie bleiben jedoch südlich der schwachen Hochdruckbrücke unmittelbar nördlich der Zyklone mit geschlossenen Isohypsen, werden also nach Westen und auf der Vorderseite der nahenden nächsten Antizyklone wieder etwas nach Süden abgelenkt. Für solche Partikel, die sich in der Nähe von Druckzentren verlagern, spielt die Translation eine sehr wesentliche Rolle. In unserem Fall hätte man ebenso annehmen können, daß die Teilchen sofort auf die Südseite der nach Osten wandernden Antizyklone geraten und nach Westen verfrachtet werden.

Eine Überprüfung mit der verbesserten graphischen Konstruktionsmethode, auf die wir an anderer Stelle noch einmal zurückkommen, wird zeigen, wie gut die Übereinstimmung mit der Bahnlinie $P_1P'_1$ ist, um wieviel größer aber die Abweichungen von der Trajektorie $P_2P'_2$ sind.

2.4. Ein nichtgeostrophisches Stromfeld mit Translation permanenter Wellen in der Faust'schen Nullschicht

Zur Untersuchung dynamischer Vorgänge in der Atmosphäre wird man zweckmäßig von den geostrophischen Betrachtungen abgehen und eine Lösung der horizontalen Bewegungsgleichungen für ein baroklines Strömungsfeld mit übergeostrophischer (untergeostrophischer) Zonalströmung in der oberen (unteren) Troposphäre suchen. Im Einklang mit den synoptisch-statistischen Ergebnissen von H. Faust (38) gelang G. Hollmann (39) dieser Nachweis auf theoretischer Grundlage. Die kohärenten Zyklonen und Antizyklonen weisen in diesem Modell eine verschiedene Wirbelstärke auf, so wie sie aus der Erfahrung zu fordern ist. Weiterhin enthält dieses Modell auch die von p abhängige Vertikalbewegung (individuelle Druckänderung) in der Form

$$\omega(p) = \frac{dp}{dt} = \frac{d^2G}{d\xi^2} \int_0^p (U - \bar{U}) dp \text{ mit } G(\xi) = \frac{U}{k} \sin(k\xi). \quad [54]$$

Das gesamte Feld verlagert sich außerdem mit der konstanten Geschwindigkeit \bar{U} ($\equiv c$) in zentraler Richtung.

2.4.1. Die Koordinaten der Trajektorien im nichtgeostrophischen Fall

Wir gehen diesmal nicht vom Geopotentialfeld, sondern von den Geschwindigkeitskomponenten in der Form

$$\begin{aligned} a) v_x &= U(p) + (U - \bar{U}) \frac{dG}{d\xi} \\ b) v_y &= \frac{dF}{d\xi} \end{aligned} \quad [55]$$

mit

$$\begin{aligned} a) U(p) &= U_0 \sin \left\{ \tau \cdot \pi \left(\frac{p - p_0}{p_0} \right) \right\} \\ b) \bar{U}(p) &= \frac{1}{p_0} \int_0^p U dp \\ c) \frac{dF}{d\xi} &= \frac{2 f_0}{k} \left[\arctg \left\{ \sqrt{\beta} + \operatorname{tg} \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\} - \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad [56]$$

aus. Die Berechnung der x, y -Koordinate erfordert zur geschlossenen Integration der Gleichungen [55a, b] mit [56a, b, c] noch einige Umformungen, die wir nun in ausführlicher Form an dieser Stelle bringen wollen.

Aus [55a] erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \xi &= x - ct \quad \text{und} \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + \bar{U} \\ \frac{d\xi}{dt} &= (U - \bar{U}) \left\{ 1 + \mu \cos(k\xi) \right\}, \end{aligned} \quad [57]$$

wodurch ein Integral von dieser Form

$$\int_0^{\xi} \left\{ 1 + \mu \cos(k\xi) \right\} d\xi = (U - \bar{U}) t + \int_0^{\xi_0} \left\{ 1 + \mu \cos(k\xi_0) \right\} d\xi_0 \quad [58]$$

resultiert. Dieses Integral ist geschlossen lösbar. Die Lösung lautet:

$$\frac{2}{\sqrt{D}} \arctg \left\{ \sqrt{\beta} + \operatorname{tg} \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\} = k(U - \bar{U}) t + \frac{2}{\sqrt{D}} \arctg \left\{ \sqrt{\beta} \operatorname{tg} \left(\frac{kx_0}{2} \right) \right\} \quad [59]$$

mit

$$a) D = 1 - \mu^2 > 0, \quad b) \sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}$$

Nun lösen wir Gleichung [59] nach ξ auf. Die x -Koordinate der Trajektorie lautet dann

$$x(t) = \frac{2}{k} \arctg \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} \operatorname{tg} \left\{ k \left[1 - \frac{\mu^2}{2} (U - \bar{U}) t + \arctg \left\{ \sqrt{\beta} \operatorname{tg} \left(\frac{kx_0}{2} \right) \right\} \right] \right\} \right] \quad [60]$$

Aus [55b] ergibt sich mit [56c], wenn wir für

$$\frac{k\xi}{2} = \arctg \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\} \quad [61]$$

setzen, als y -Koordinate der horizontalen Geschwindigkeit

$$v_y = \frac{2 f_0}{k} \arctg \left[\frac{(\sqrt{\beta} - 1) \operatorname{tg} \left(\frac{k\xi}{2} \right)}{1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right)} \right] \quad [62]$$

Die rechte Seite der Gleichung [62] läßt sich nun bei guten Konvergenzeigenschaften in die Reihe

$$v_y = \frac{2 f_0}{k} \left[\frac{(\sqrt{\beta} - 1) \operatorname{tg} \left(\frac{k\xi}{2} \right)}{1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right)} - \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^3 \operatorname{tg}^3 \left(\frac{k\xi}{2} \right)}{3 \left\{ 1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\}^3} + \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^5 \operatorname{tg}^5 \left(\frac{k\xi}{2} \right)}{5 \left\{ 1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\}^5} - \dots \right] \quad [63]$$

mit der Bedingung, daß stets

$$x^* = \frac{(\sqrt{\beta} - 1) \operatorname{tg} \left(\frac{k\xi}{2} \right)}{1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right)} \leq 1.0 \quad [64]$$

erfüllt ist, entwickeln. Da $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt}$, erhalten wir mit [57] und [63] allgemein

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\xi} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2 f_0 (\sqrt{\beta} - 1)^{2n+1}}{k (U - \bar{U}) (2n+1)} \times \\ &\times \frac{\operatorname{tg}^{2n+1} \left(\frac{k\xi}{2} \right)}{\left\{ 1 + \mu \cos(k\xi) \right\} \left\{ 1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\}^{2n+1}} \end{aligned} \quad [65]$$

und nach einigen Umformungen als Koordinate

$$\begin{aligned} y(\xi) &= A(n) \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\left\{ \sin \left(\frac{k\xi}{2} \right) \cos \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\}^{2n+1} d\xi}{\left\{ 1 + \mu \cos^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) - \mu \sin^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\} \left\{ \cos^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) + \sqrt{\beta} \sin^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) \right\}^{2n+1}} \\ &\quad + y_0 \end{aligned} \quad [66]$$

mit

$$A(n) = \frac{(-1)^n f_0 (\sqrt{\beta} - 1)^{2n+1}}{(n + v_2) k (U - \bar{U})}$$

Weitere Substitutionen (40) mit

$$\begin{aligned} a) t &= \operatorname{tg} \left(\frac{k\xi}{2} \right) & b) d\xi &= \frac{2}{k} \left(\frac{dt}{t^2 + 1} \right) \\ c) \sin \left(\frac{k\xi}{2} \right) \cos \left(\frac{k\xi}{2} \right) &= \frac{t}{t^2 + 1} & d) \sin^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) &= \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ e) \cos^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) &= \frac{1}{t^2 + 1} \end{aligned} \quad [67]$$

und $t^2 = u$, $t^{2n} = u^n$ führen schließlich auf ein Integral von der Form

$$y = \frac{A^{(n)}}{\beta^{(n+1/2)}(1+\mu)k} \int_{u_0}^u \frac{u^n du}{(1/\sqrt{\beta}+u)^{2n+1}} + y_0 \quad [68]$$

das durch Partialbruchzerlegung gelöst werden kann. Es sei

$$\begin{aligned} \text{a) } g(u) &= u^n \\ \text{b) } h(u) &= (1/\sqrt{\beta}+u)(1/\sqrt{\beta}+u)^{2n+1} \end{aligned} \quad [69]$$

mit den Nullstellen

$$\text{a) } u_1 = -1/\sqrt{\beta} \quad \text{b) } u_2 = -(1/\sqrt{\beta})^{2n+1} \quad [70]$$

der Funktion $h(u)$, so daß der Integrand den allgemeinen Wert

$$\frac{g(u)}{h(u)} = \frac{A\nu}{(U+1/\sqrt{\beta})} + \frac{B\nu}{(U+1/\sqrt{\beta})^{2n+1}} + \frac{C\nu}{(U+1/\sqrt{\beta})^{2n}} + \frac{D\nu}{(U+1/\sqrt{\beta})^{2n-1}} + \dots \quad [71]$$

mit $\nu = 0, 1, 2, 3 \dots$ annimmt. Eine etwas umfangreiche aber leichte Rechnung führt für $n = 0, 1, 2 \dots$ mit bereits ausreichender Approximation für $n = 0, 1$ auf die folgenden auswertbaren Gleichungen der y -Koordinate der Trajektorien im nichtgeostrophischen Feld. Als Abkürzung führen wir noch

$$\begin{aligned} \text{a) } Z^*(x, t) &= t g^2 \frac{k}{2} (x - \bar{u} t) \\ \text{b) } Z_0^* &= t g^2 \left(\frac{kx_0}{2} \right) \end{aligned} \quad [72]$$

ein und erhalten für $n = 0$

$$y^0 = \frac{2 f_0 (\sqrt{\beta} - 1)}{(\beta - \sqrt{\beta})k^2 (U - \bar{U}) (1 + \mu)} \left[\ln \frac{[1 + \beta Z^*(x, t)][1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]}{[1 + \beta Z_0^*][1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)]} \right] + y_0 \quad [73]$$

für $n = 0, 1$

$$\begin{aligned} y^{0,1} &= \frac{f_0}{k^2 (U - \bar{U}) (1 + \mu)} \left[\frac{8 (\sqrt{\beta} - 1)}{3 (\beta - \sqrt{\beta})} \right. \\ &\ln \left\{ \frac{[1 + \beta Z^*(x, t)][1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]}{[1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)][1 + \beta Z_0^*]} \right\} + \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^3}{3(\beta - \sqrt{\beta})} \\ &\left\{ \frac{2 [Z_0^* - Z^*(x, t)] + \sqrt{\beta} [Z_0^{*2} - Z^{*2}(x, t)]}{[1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)]^2 [1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]^2} \right\} + \\ &\left. + \frac{2\sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} - 1)^2}{3 (\beta - \sqrt{\beta})^2} \left\{ \frac{(Z_0^* - Z^*(x, t))}{[1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)][1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]} \right\} \right] + y_0 \end{aligned} \quad [74]$$

und für $n = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} y^{0,1,2} &= \frac{f_0}{k^2 (U - \bar{U}) (1 + \mu)} \left[\frac{46 (\sqrt{\beta} - 1)}{15 (\beta - \sqrt{\beta})} \right. \\ &\ln \left\{ \frac{[1 + \beta Z^*(x, t)][1 + \beta Z_0^*]}{[1 + \beta Z_0^*][1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)]} \right\} + \\ &+ \frac{16 \sqrt{\beta} (\beta - 1)^3}{15 (\beta - \sqrt{\beta})^2} \left\{ \frac{Z_0^* - Z^*(x, t)}{[1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)][1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]} \right\} + \\ &+ \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^3}{3(\beta - \sqrt{\beta})} \left\{ \frac{2 [Z_0^* - Z^*(x, t)] + \sqrt{\beta} [Z_0^{*2} - Z^{*2}(x, t)]}{[1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)]^2 [1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]^2} \right\} + \\ &+ \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^2}{5(\beta - \sqrt{\beta})^2} \left\{ \frac{2\sqrt{\beta} [Z_0^* - Z^*(x, t)] + \beta [Z_0^{*2} - Z^{*2}(x, t)]}{[1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]^2 [1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)]^2} \right\} - \\ &\quad - \frac{2 (\sqrt{\beta} - 1)^2 (\sqrt{\beta} - 2)}{15 \sqrt{\beta} (\beta - \sqrt{\beta})^2} \\ &\left\{ \frac{3 \sqrt{\beta} [Z_0^* - Z^*(x, t)] + 3 \beta [Z_0^{*2} - Z^{*2}(x, t)] + 3 \sqrt{\beta} [Z_0^{*3} - Z^{*3}(x, t)]}{[1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]^3 [1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)]^3} \right\} + \\ &\quad + \frac{(\sqrt{\beta} - 1)^2}{10 \beta (\beta - \sqrt{\beta})} \\ &\left. \left\{ \frac{4\sqrt{\beta} [Z_0^* - Z^*(x, t)] + 6\beta [Z_0^{*2} - Z^{*2}(x, t)] + 4\beta \sqrt{\beta} [Z_0^{*3} - Z^{*3}(x, t)] + \beta^2 [Z_0^{*4} - Z^{*4}(x, t)]}{[1 + \sqrt{\beta} Z_0^*]^4 [1 + \sqrt{\beta} Z^*(x, t)]^4} \right\} \right] + y_0 \end{aligned} \quad [75]$$

mit [60] als zugehöriger x -Koordinate.

Zum Vergleich und zur Abschätzung der ageostrophischen Komponente wollen wir nun die Trajektorien auch im geostrophisch approximierten Fall berechnen.

2.4.2. Die Koordinaten der Trajektorien im geostrophischen Fall

Den Ausführungen G. Hollmanns (39) entnehmen wir, daß die geostrophische Zonalkomponente

$$v_x = \bar{U} + \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) \quad [76]$$

lautet, woraus wir für die x -Komponente

$$x_g(t) = \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) + \bar{U} t + x_0 \quad [77]$$

erhalten. Gleichung [77] stellt eine lineare Funktion in t dar, während die nichtgeostrophische Komponente eine vieldeutige Funktion mit ausgeprägten Minima und Maxima ist. Auf die numerische Auswertung und Diskussion der Abweichungen zwischen den geostrophischen und nichtgeostrophischen Bahnlinien kommen wir weiter unten zurück.

Zur Berechnung der y-Komponente gehen wir von

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad [78]$$

mit

$$\frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_{\omega=0} = \frac{\mu k}{f_0} (U - \bar{U})^2 \sin(k\xi) + \frac{\mu^2 k}{2 f_0} (U - \bar{U})^2 \sin(2k\xi) + v_y \quad [79]$$

und [63] aus, so daß wir als Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\mu k}{f_0} (U - \bar{U})^2 \sin(k\xi) + \frac{\mu^2 k}{2 f_0} (U - \bar{U})^2 \sin(2k\xi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 f_0 (\sqrt{\beta} - 1)^{2n+1}}{(2n+1)k} \left\{ \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{k\xi}{2}\right)}{1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2\left(\frac{k\xi}{2}\right)} \right\}^{2n+1} \quad [80]$$

erhalten. Aus [77] folgt für

$$\xi = \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) t + x_0 \quad [81]$$

und somit, anstatt [80] für

$$y = \frac{\mu k}{f_0} (U - \bar{U})^2 \int_0^t \sin \left\{ k \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) t + kx_0 \right\} dt + \frac{\mu^2 k}{f_0} (U - \bar{U})^2 \int_0^t \sin \left\{ 2k \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) t + 2kx_0 \right\} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 f_0 (\sqrt{\beta} - 1)^{2n+1}}{(2n+1)k} \int_0^t \frac{\left[\operatorname{tg} \left\{ \frac{k}{2} \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) t + \frac{kx_0}{2} \right\} \right]^{2n+1}}{\left[1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left\{ \frac{k}{2} \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) t + \frac{kx_0}{2} \right\} \right]^{2n+1}} dt + y_0 \quad [82]$$

und nach Durchführung der Integrationen, wenn wir für

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= \operatorname{tg}(\alpha t + \gamma^*) & \text{b) } dz &= \alpha (1 + z^2) dt \\ \text{c) } dt &= \frac{2 dz}{k \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) (1 + z^2)} & \text{mit d) } \alpha &= \frac{k(U - \bar{U}) \sqrt{1 - \mu^2}}{2} \\ \text{e) } \gamma^* &= \frac{kx_0}{2} \end{aligned} \quad [83]$$

setzen, für n = 0, 1 wie im Falle [74]

$$\begin{aligned} y_g^{0,1} &= -\frac{2 f_0}{3 \alpha k} \ln \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\alpha t + \gamma^*)}{1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\alpha t + \gamma^*)} \left[\frac{1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\gamma^*}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\gamma^*}{2} \right)} \right] \right] - \\ &\quad - \frac{2 f_0 (\sqrt{\beta} - 1)^2}{3 \alpha k} \left[\frac{\operatorname{tg}^2(\gamma^*/2) + \frac{1}{2} \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^4(\gamma^*/2) - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\alpha t + \gamma^*) - \frac{1}{2} \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}(\alpha t + \gamma^*)}{\left[1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\alpha t + \gamma^*) \right]^2 \left[1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2(\gamma^*/2) \right]^2} \right] + \\ &\quad + \frac{2 f_0 \sqrt{\beta} (\sqrt{\beta} - 1)}{3 \alpha k} \left[\frac{\operatorname{tg}^2(\gamma^*/2) - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\alpha t + \gamma^*)}{\left[1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(\alpha t + \gamma^*) \right] \left[1 + \sqrt{\beta} \operatorname{tg}^2(\gamma^*/2) \right]} \right] - \\ &\quad - \frac{\mu (U - \bar{U})}{f_0 \sqrt{1 - \mu^2}} \left[\cos(\alpha t + \gamma^*) - \cos(\gamma^*) \right] - \\ &\quad - \frac{\mu^2 (U - \bar{U})}{4 f_0 \sqrt{1 - \mu^2}} \left[\cos 2(\alpha t + \gamma^*) - \cos(2\gamma^*) \right] + y_0 \end{aligned} \quad [84]$$

2.4.3. Das Druckfeld

In die y-Komponente der Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \omega \frac{\partial v_y}{\partial p} + f v_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad [85]$$

setzen wir das System [55] mit

$$\text{a) } G(\xi) = \frac{\mu}{k} \sin(k\xi) \quad \text{und} \quad \text{b) } \zeta(\mu) = \frac{f_0 \sqrt{1 - \mu^2}}{1 + \mu \cos(k\xi)} - f_0 \quad [86]$$

als relativer Vorticity ein und bestimmen die geostrophische Zonalkomponente (V_{xg}) zu

$$v_{xg} = \bar{U} + \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) \equiv - \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad [87]$$

Es ist also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = - f_0 \bar{U} - f_0 \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) \quad [88]$$

und somit

$$\Phi(\xi, y) = - f_0 \left\{ \bar{U} + \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) \right\} y + \Phi(\xi) \quad [89]$$

Wegen

$$\text{a) } \xi = x - \bar{U} t \quad \text{b) } \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \bar{U} \quad \text{c) } \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \quad \text{d) } \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad [90]$$

und

$$\begin{aligned} \text{a) } v_x &= U(p) + (U - \bar{U}) \mu \cos(k\xi) \\ \text{b) } \frac{\partial v_x}{\partial \xi} &= - \mu k (U - \bar{U}) \sin(k\xi) \end{aligned} \quad [91]$$

wird

$$\frac{\partial v_x}{\partial p} = U'(p) + U''(p) \mu \cos(k\xi) \quad [92]$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \bar{U} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \\ \text{b) } \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \\ \text{c) } \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial v_x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \\ \text{d) } \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \end{aligned} \quad [93]$$

so daß nunmehr die x-Komponente der Bewegungsgleichungen in

$$- \bar{U} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \omega \left\{ U'(p) + U''(p) \mu \cos(k\xi) \right\} - f_0 v_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad [94]$$

übergeht. Mit [91] erhalten wir für

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \mu k (U - \bar{U})^2 \sin(k\xi) + \frac{\mu^2}{2} k (U - \bar{U})^2 \sin(2k\xi) - \omega U' \{1 + \cos(k\xi)\} + f_0 v_y \quad [95]$$

Für v_y gilt [63] in Summation mit $z = \text{tg}\left(\frac{k\xi}{2}\right)$, demnach für $d\xi = \frac{2 dz}{k(1+z^2)}$ und mit der Substitution $z^2 = u$, folgt nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) - \Phi(0) &= -\mu(U - \bar{U})^2 \cos(k\xi) - \frac{\mu^2}{4} (U - \bar{U})^2 \cos(2k\xi) - \\ &= \omega U'(p) \xi - \omega \frac{\mu}{k} U'(p) \sin(k\xi) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 f_0^2 (\sqrt{\beta} - 1)^{2n+1}}{(2n+1) k^2} \int_0^u \frac{u^n du}{[1+u]^{2n+1} [1+\sqrt{\beta}u]^{2n+1}} \end{aligned} \quad [97]$$

Für $a = 0, 1$; $p = 0.3 p_0$ und $\omega = 0$ resultiert mit [89] und [97] für das Geopotentialfeld in der für uns auswertbaren Form

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, p, t) &= -f_0 \left[\bar{U} + \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) \right] y - \\ &= \mu (U - \bar{U})^2 \cos \left\{ k (x - \bar{U} t) \right\} - \\ &= \frac{\mu^2}{4} (U - \bar{U})^2 \cos \left\{ 2 k (x - \bar{U} t) \right\} - \\ &= \frac{2 f_0^2}{3 k^2} \ln \left[\frac{1 + \text{tg}^2 \left\{ \frac{k}{2} (x - \bar{U} t) \right\}}{1 + \sqrt{\beta} \text{tg}^2 \left\{ \frac{k}{2} (x - \bar{U} t) \right\}} \right] - \\ &= \frac{f_0^2 (\sqrt{\beta} - 1)^2}{3 k^2 \sqrt{\beta}} \frac{1}{\left\{ 1 + \sqrt{\beta} \text{tg}^2 \left\{ \frac{k}{2} (x - \bar{U} t) \right\} \right\}^2} + \\ &+ \frac{2 f_0^2 (\sqrt{\beta} - 1)}{3 k^2} \frac{1}{\left\{ 1 + \sqrt{\beta} \text{tg}^2 \left\{ \frac{k}{2} (x - \bar{U} t) \right\} \right\}} + \Phi(0) \end{aligned} \quad [98]$$

Es braucht jedoch lediglich das Feld zur Zeit $t = 0$ ausgewertet zu werden, da es mit konstanter Translationsgeschwindigkeit ($\bar{U} \equiv c$) von Ost nach West wandert. Für $t = 0$ folgt in der Nullschicht in 300 mb.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, 0.3p_0, 0) &= -f_0 \left[\bar{U} + \sqrt{1 - \mu^2} (U - \bar{U}) \right] y - \mu (U - \bar{U})^2 \cos(kx) - \\ &= \frac{\mu^2}{4} (U - \bar{U})^2 \cos(2kx) - \frac{2 f_0^2}{3 k^2} \ln \left[\frac{1 + \text{tg}^2 \left(\frac{kx}{2} \right)}{1 + \sqrt{\beta} \text{tg}^2 \left(\frac{kx}{2} \right)} \right] + \\ &+ \frac{2 f_0^2 (\sqrt{\beta} - 1)}{3 k^2} \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\beta} \text{tg}^2 \left(\frac{kx}{2} \right) \right]} - \frac{f_0^2 (\sqrt{\beta} - 1)^2}{3 k^2 \sqrt{\beta}} \frac{1}{\left[1 + \sqrt{\beta} \text{tg}^2 \left(\frac{kx}{2} \right) \right]} + \Phi(0) \end{aligned} \quad [99]$$

Die numerische Auswertung der Gleichungen [99], [74] und [60] führen wir für die Faust'sche Nullschicht durch. Dort hat die Vertikalbewegung eine Umkehrstelle ($\omega = 0$). Wir müssen also unsere von p abhängige zonale Grundströmung analytisch so vorgeben, daß sie die genannte Forderung erfüllt. Dies ist für

$$U(p) = U_0 \sin \left\{ \varepsilon^* \pi \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right) \right\} \quad [100]$$

gewährleistet, womit wir für die mittlere zonale Grundströmung

$$\bar{U} = \frac{U_0}{\varepsilon^* \pi} \left[1 - \cos(\varepsilon^* \pi) \right] \quad [101]$$

erhalten. Gleichung [54] nimmt dann mit [100] und [101] nach erfolgter Integration folgende Form an

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d^2 G}{d\xi^2} \frac{U_0 p_0}{\varepsilon^* \pi} \left[\cos \left\{ \varepsilon^* \pi \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right) \right\} - \cos(\varepsilon^* \pi) \right] - \\ &= \frac{d^2 G}{d\xi^2} \frac{U_0}{\varepsilon^* \pi} \left[1 - \cos(\varepsilon^* \pi) \right] p. \end{aligned} \quad [102]$$

welche uns mit $p = 0.3 p_0$ und $\omega = 0$ eine Bestimmungsgleichung für den vertikalen Verschiebungskoeffizienten ε^* liefert. Sie lautet

$$\cos(0.7 \pi \varepsilon^*) - 0.7 \cos(\varepsilon^* \pi) - 0.3 = 0 \quad [103]$$

Bei Annahme der Nullschicht in 300 mb ergibt sich dieser Koeffizient zu

$$\varepsilon^* = 0.875 \quad [104]$$

Nun können wir alle Grundgleichungen numerisch auswerten und graphisch darstellen.

2.4.4. Numerische Auswertung

Die p -Abhängigkeit der zonalen Grundströmung gemäß [100] haben wir in Abb. 6 graphisch dargestellt. Daraus geht hervor, daß im Bereich

$$p_0 > p > 0.85 p_0 \quad [105]$$

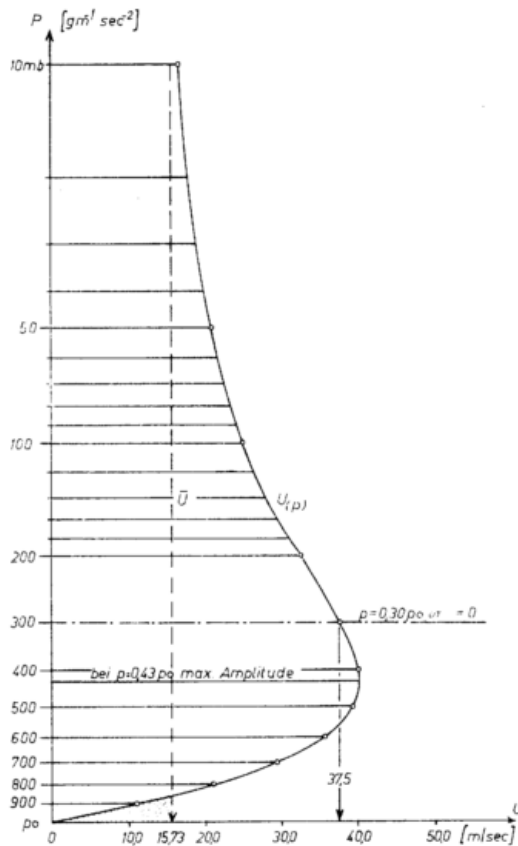


Abb. 6
Die p -Abhängigkeit der zonalen Grundströmung (Spezielle Annahme)

$U(p) < \bar{U}$ ist und im Bereich

$$0.85 p_0 > p > 0.01 p_0 \quad [106]$$

U (p) größer als \bar{U} ist. Hieraus folgt für die horizontale Verteilung der Vergenzen in der Nullschicht wegen der Beziehung

$$\text{div}_2 v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = - (U - \bar{U}) \mu k \sin(k\xi) \quad [107]$$

für $x = 0, 1, 2 \dots 10^6$ [m], also jeweils im Scheitel der Höhenhochkeile (Höhentröge),

$$\text{div}_2 v \equiv 0 \quad [108]$$

Die Maxima (Minima) liegen auf der Linie, die alle Punkte mit maximaler Krümmungsänderung verbindet. Das sind jeweils die Orte, in denen ein Übergang von antizyklonaler zu zyklonaler Krümmung und umgekehrt stattfindet, also Konvergenz (Divergenz) beim Übergang von antizyklonaler (zyklonaler) zur zyklonalen (antizyklonalen) Krümmung der Isopotentiallinien. Unserem Geopotentialfeld fehlt lediglich die Achsenneigung der Höhe mit der Höhe, was aber für seine Permanenz notwendig ist. Auf die Einbeziehung der Bodenreibungsschicht, der Turbulenz und Diffusion wird außerdem verzichtet.

Mit der eindeutigen Bestimmung der Funktion U (p) läßt sich nun auch das Geopotentialfeld nach der Gleichung [98] bzw. [99] berechnen. Die Feldverteilung ist außer U (p) noch vom Koeffizienten μ der Wirbelstärke abhängig. Abb. 7a wurde für $\mu = 0.6$, Abb. 7b für $\mu = 0.86$ berechnet. Die Vorticity nimmt dann die asymmetrischen Werte

$$\mu = 0.6 \begin{cases} \zeta_z = f_0 \\ \zeta_A = -0.5 f_0 \end{cases}, \quad \mu = 0.86 \begin{cases} \zeta_z = 2.645 f_0 \\ \zeta_A = -0.7 f_0 \end{cases} \quad [109]$$

an. Wir werden dadurch eine stärkere Drängung der Isopotentialen, also auch stärkere Divergenzen und Konvergenzen im Bereich der Krümmungsänderungen erreichen (Abb. 7a, Abb. 7b). In guter Übereinstimmung

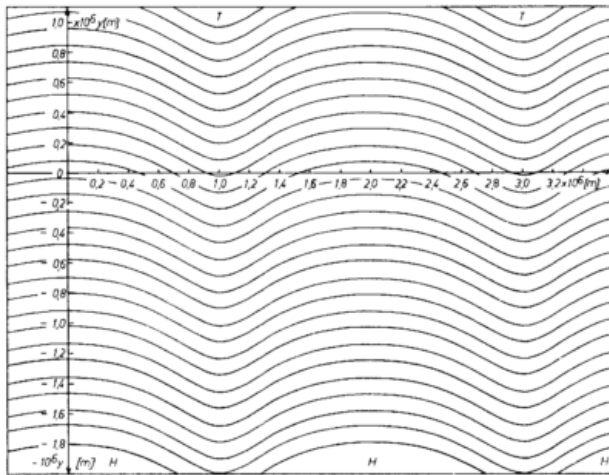


Abb. 7a
Ein nichtgeostrophisches Stromfeld für $\mu = 0.6$
(Analytisches Modell III)

mit der Erfahrung erkennen wir aus der graphischen Darstellung, daß die Hochdruckrücken eine räumlich größere Ausdehnung besitzen als die eingebetteten zyklonalen Ausläufer. Völlige Symmetrie herrscht zur y-Achse. Das Feld weist in keiner p-Fläche geschlossene Isopotentialen auf. Es wird eine weitere Aufgabe sein müssen, ein Feld mit einer entsprechenden Achsenneigung der Druckgebilde analytisch zu behandeln.

Für $\mu = 0.86$ haben wir die Trajektorien mit den Anfangskoordinaten

$$\begin{aligned} x_0 = 0.4 \times 10^6 \text{ [m]} &, & y_0 = 0 \text{ [m]} \\ x_0 = 0.6 \times 10^6 \text{ [m]} &, & y_0 = 0 \text{ [m]} \\ x_0 = 0.8 \times 10^6 \text{ [m]} &, & y_0 = 0 \text{ [m]} \\ x_0 = 1.0 \times 10^6 \text{ [m]} &, & y_0 = 0 \text{ [m]} \end{aligned}$$

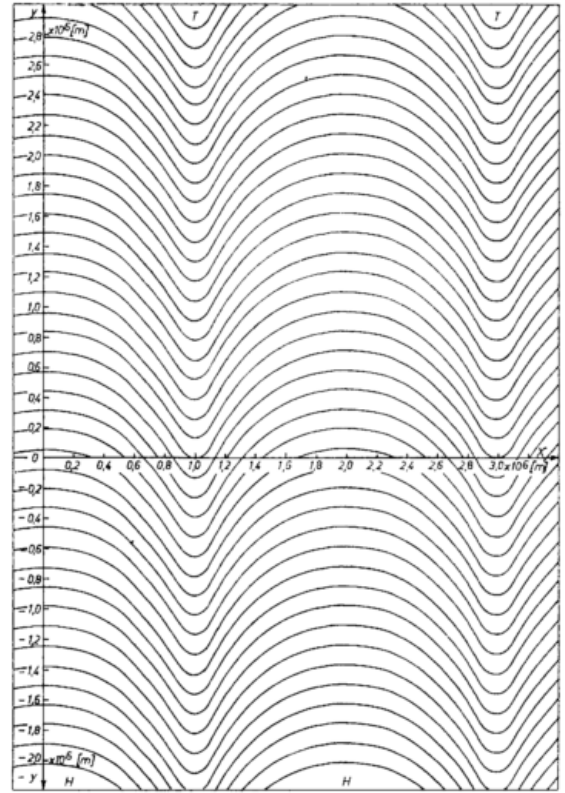


Abb. 7b
Ein nichtgeostrophisches Stromfeld für $\mu = 0.86$
(Analytisches Modell III)

berechnet. Das Ergebnis ist aus den Abbildungen 8, 9, 10 zu ersehen. Während im geostrophischen Fall völlige Divergenzfreiheit herrscht, wird ein Flächenelement

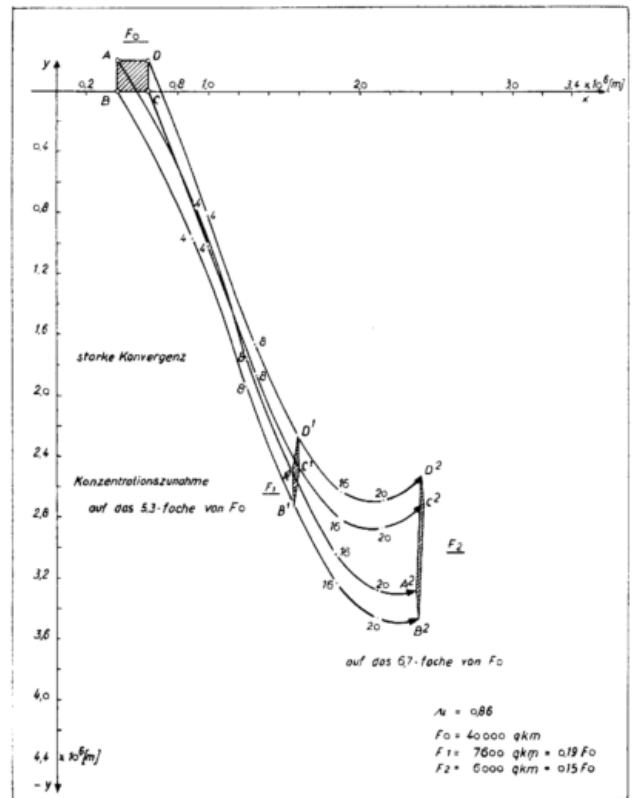


Abb. 8
Nichtgeostrophische Trajektorien zum analytischen Modell III
für eine Wirbelstärke $\mu = 0.86$

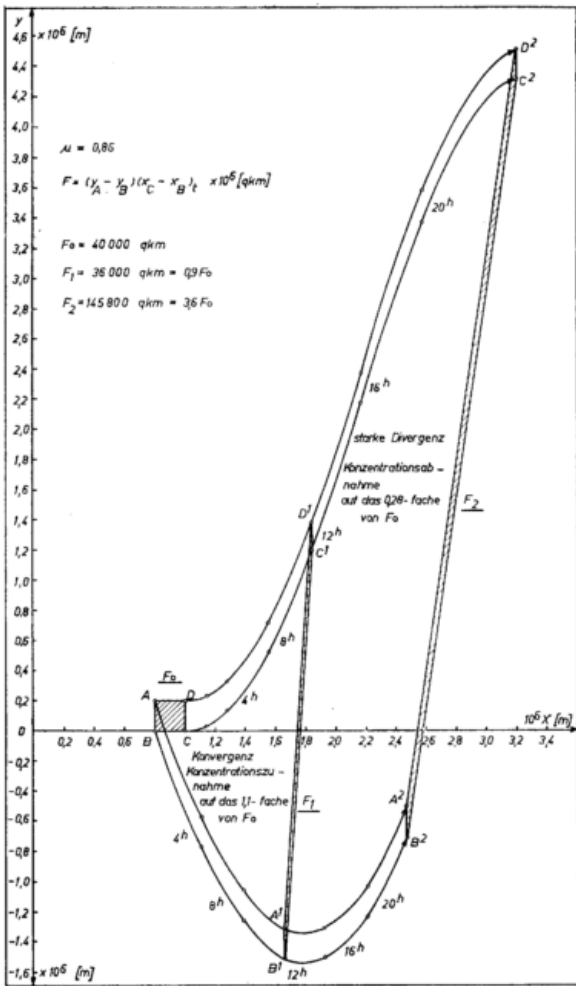


Abb. 9
Nichtgeostrophische Trajektorien
zum analytischen Modell III für
eine Wirbelstärke $\mu = 0.86$

ABCD im Bereich der horizontalen Konvergenzen nach 12 (24) Stunden auf das 0.19 (0.15)-fache von F_0 reduziert. Damit dürfte in der Volumeneinheit eine Konzentration radioaktiver Spurenstoffe auf das 5.3 (6.7)-fache der Anfangskonzentration eintreten. Im Bereich der horizontalen Divergenzen (Abb. 9, 10) erfolgt in unserem Modell eine Zunahme der Flächeneinheit auf das 3.6-fache von F_0 und somit für die Volumeneinheit eine analoge Abnahme der Konzentration auf das 0.28-fache der Anfangskonzentration. Das ursprüngliche Feld, in dessen Bereich Aerosol-Partikel angereichert werden, wird nach 24 Stunden in seiner Ausdehnung in der y-Richtung auf das 27-fache expandiert, während seine Breite in der x-Richtung nur um das 4- bis 5-fache abnimmt. Diese Tatsache dürfte für den Ausfall radioaktiver Elemente von besonderer Bedeutung sein.

2.4.5. Ein Vergleich zwischen der geostrophisch approximierten und der nichtgeostrophischen Trajektorie

Unser analytisches Modell erlaubt einen exakten Vergleich der geostrophisch approximierten Trajektorien mit den Luftbahnen, die aus einer nichtgeostrophischen Stromfeldverteilung resultieren. Wir haben die Gleichungen [60], [74] und [84] für $\mu = 0.6$ und $\mu = 0.86$ ausgewertet und die Trajektorien mit den Anfangskordinaten $x_0 = 0, y_0 = 0$ berechnet. Das Ergebnis 10 wurde in Abb. 11 graphisch dargestellt.

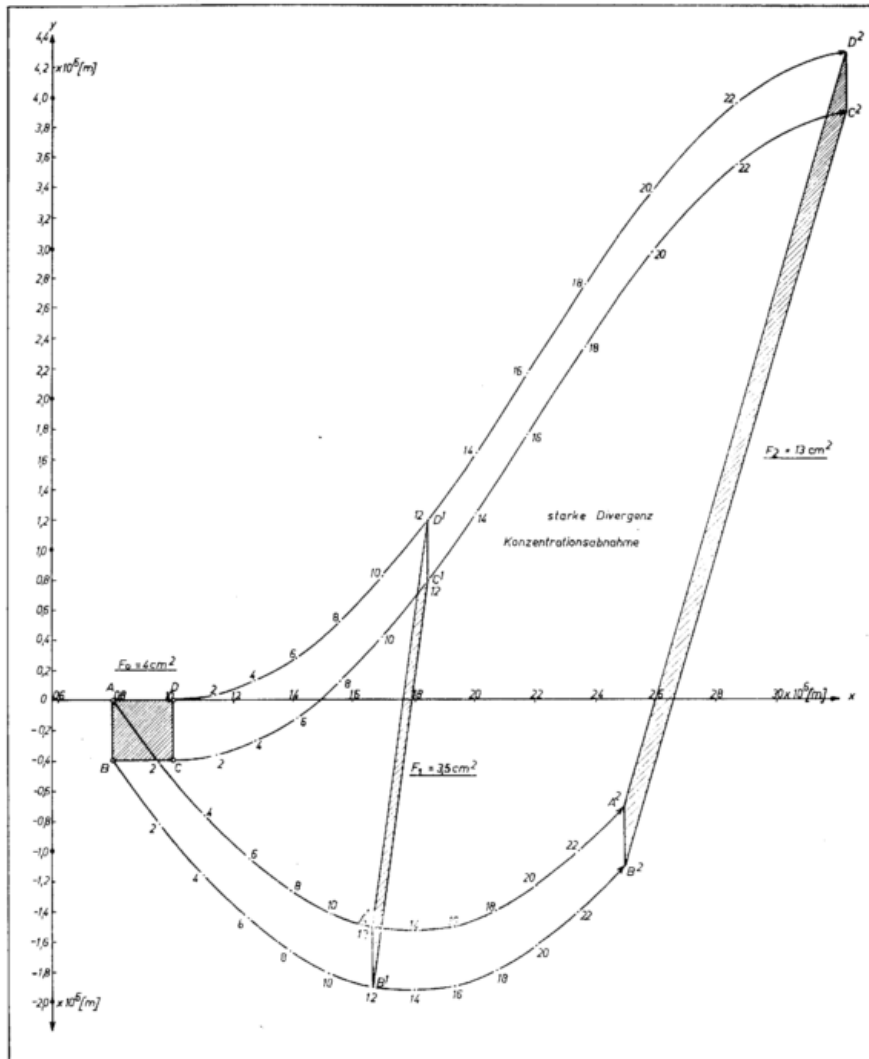


Abb. 10
Nichtgeostrophische Trajektorien
zum analytischen Modell III für
eine Wirbelstärke $\mu = 0.86$

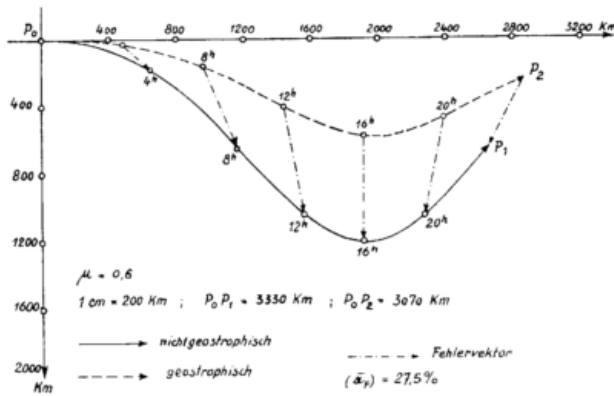


Abb. 11

Ein Vergleich zwischen der geostrophisch approximierten und der nichtgeostrophischen Bahnlinie in der Nullschicht für $\mu = 0,6$

Auch diese Berechnung hat nur für die Faust'sche Nullschicht Gültigkeit. In ihr werden übergeostrophische Winde gefordert. Von den horizontalen Winkelabweichungen abgesehen, ist uns die über eine Wellenlänge gemittelte Geschwindigkeitsdifferenz durch die Beziehung

$$\Delta v_x = \left\{ 1 - \sqrt{1 - \mu^2} \right\} (U - \bar{U}) \quad [111]$$

gegeben, und wir stellen fest, daß die Partikel (vgl. Tab. 3) im nichtgeostrophischen Fall eine größere Strecke zurücklegen als im geostrophisch approximierten Fall (Tab. 3). Die Differenz ihrer mittleren Geschwin-

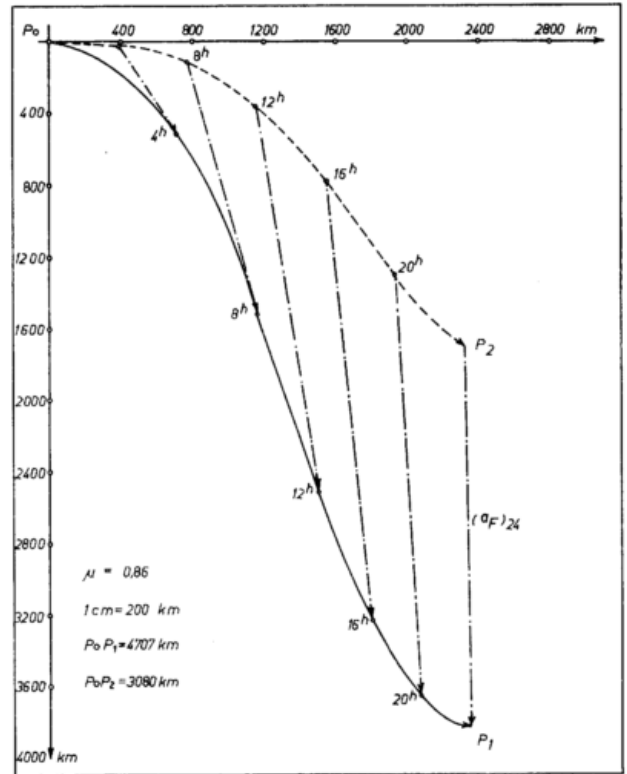


Abb. 12

Ein Vergleich zwischen der geostrophisch approximierten und der nichtgeostrophischen Bahnlinie in der Nullschicht für $\mu = 0,86$

Tab. 3

Abweichungen zwischen der geostrophisch approximierten und der nichtgeostrophischen Bahnlinie im Nullschichtniveau (Analytisches Modell III).

	Luftbahn	Zurückgelegter Weg	Mittl. Geschwindigkeit	Geschwindigkeitsdifferenz*)	
Abb. 11 $\mu = 0,6$	P_0P_1	3330 Km	138,8 km/h	10,9 km/h	nichtgeostr.
	P_0P_2	3070 Km	127,9 km/h	(15,7 km/h)**)	geostr.
Abb. 12 $\mu = 0,86$	P_0P_1	4707 Km	196,0 km/h	67,8 km/h	nichtgeostr.
	P_0P_2	3080 Km	128,2 km/h	(39,2 km/h)**)	geostr.

*) nicht über die Wellenlänge gemittelt.
**) über die Wellenlänge gemittelt.

digkeiten ist stets positiv, und somit ist der wahre Wind in der Nullschicht übergeostrophisch. Als Begründung hierfür ist die starke Zunahme der zonalen Grundströmung mit der Höhe und ihr Überwiegen gegenüber der mittleren Translationsgeschwindigkeit der Druckgebilde anzusehen. Für $\mu = 0,6$ erhalten wir eine mittlere Transportgeschwindigkeit von 130 Km/h. Das ist ein Wert, der durchaus in unseren Breiten in dieser Höhe vorkommt. Die horizontale Abweichung (Fehlervektor σ_F) beträgt im Mittel 27,5% des tatsächlich zurückgelegten Weges der Partikel auf der Trajektorie P_0P_1 , wobei für die ersten 24 Stunden stets eine Abweichung zum höheren Druck hin überwiegt. Allgemein kann gesagt werden, daß die Abweichungen von einer geostrophisch approximierten Trajektorie stets von der Vorticityverteilung und der Differenz zwischen der zonalen Grundströmung und der mittleren Translationsgeschwindigkeit der Druckgebilde abhängen. Hierin erkennen wir eine weitere wichtige Tatsache zur Korrektur der geostrophisch approximierten Trajektorie.

3. Ergebnisse der Vorhersage von Trajektorien im 500-mb-Niveau und Beispiele der Verfrachtung atmosphärischer Verunreinigungen

3.1. Zur Konstruktionsmethode

In einer früheren Arbeit (10) wurde über graphische Verfahren zur Konstruktion von Trajektorien berichtet. Das dort angegebene Verfahren wurde durch Berücksichtigung einer räumlich veränderlichen Translation und von Entwicklungsvorgängen bei der Druckänderung weiter ausgebaut und soll hier geprüft werden. Zur graphischen Konstruktion der Luftbahnen benutzen wir die absoluten Topographien einer Druckfläche. Die Windvektoren werden mit Hilfe eines Gradientwindmaßstabes, der verkleinert als Abb. 13 beigefügt ist, bestimmt. Das nichtstationäre Druckfeld denken wir uns in einen Translationsanteil und einen Entwicklungsanteil (11) zerlegt. Den Entwicklungsanteil lassen wir im ersten Abschnitt der Konstruktion unbe-

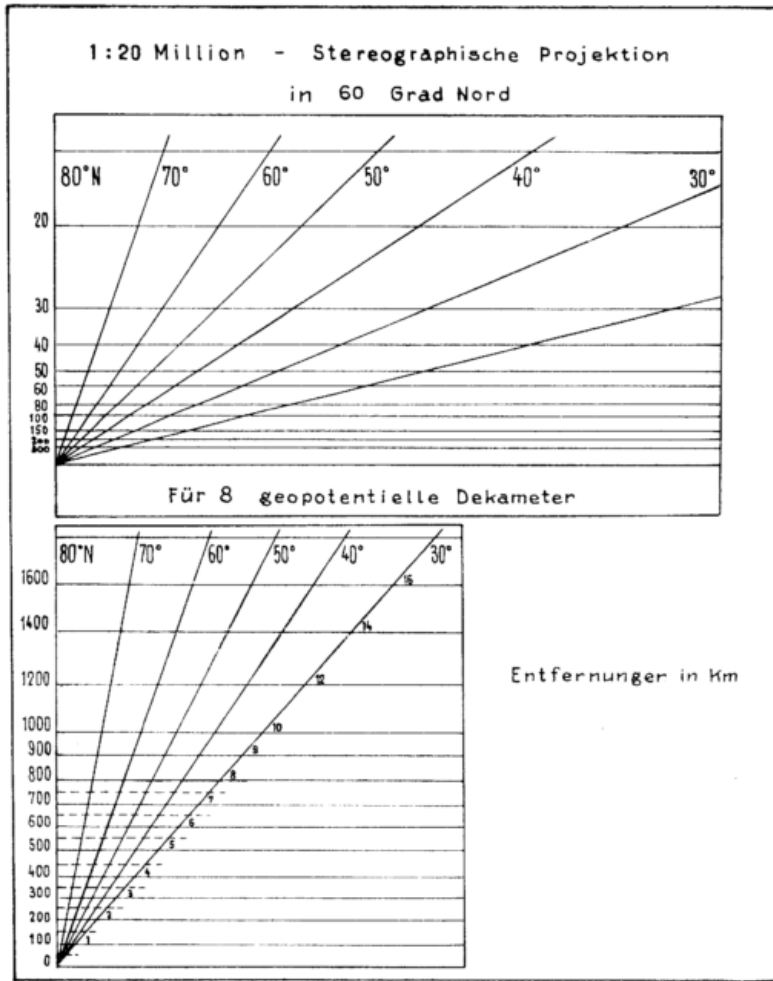


Abb. 13
Ein Diagramm zur Bestimmung geostrophisch approximierter Geschwindigkeiten aus dem Geopotentialfeld als Funktion der geographischen Breite (verkleinert dargestellt)

rücksichtigt und konstruieren die Bahnlinien lediglich unter Beachtung der Translation der Druckfelder. Dabei handelt es sich um ein geostrophisch approximiertes Verfahren auf einer p -Fläche, wobei alle anderen Einflüsse, die durch Vertikalbewegung, Turbulenz und Diffusion hervorgerufen werden, unberücksichtigt bleiben. Anschließend wird ein Konstruktionsverfahren gegeben, das auch den Entwicklungsanteil berücksichtigt.

Erster Konstruktionsabschnitt unter Berücksichtigung der Translation der Druckgebilde

a) Bestimmung des Verlagerungsvektors c

Für einen beliebig gewählten Zeitabschnitt von n -Stunden müssen wir den Verlagerungsvektor c_n der Druckgebilde aus der Druckverteilung zum Stichtermin Φ_0 und der Druckverteilung nach n -Stunden Φ_n bestimmen. Verwenden wir eine Vorhersagekarte, dann ermitteln wir einen vorhergesagten Translationsvektor $c_{v,n}$. Wir konstruieren in diesem Fall auch eine vorhergesagte Trajektorie. Die Konstruktionsmethode gilt zunächst nur für einen Zeitraum bis zu 24 Stunden.

Bei der Vielfalt der Zugrichtungen und Zuggeschwindigkeiten der Druckgebilde sei als Beispiel in Abb. 14 eine Druckverteilung vorgegeben, bei der wir den 24-stündigen Verlagerungsvektor durch die Zugrichtung der Zyklone T (Kerndruck 322 dkm) in Richtung T' (Kerndruck 306 dkm) feststellen. Dieser Vektor läßt sich

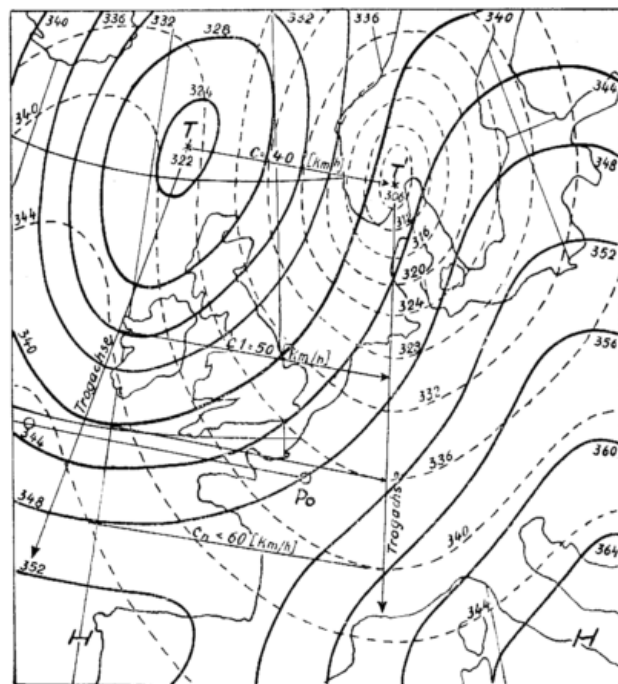


Abb. 14
Die Geopotentialfelder Φ_0 und Φ_n einer beliebigen Hauptisobarenfläche

oft auch durch die Verlagerung der Kammlinien (Trogachse, Achse der Hochkeile) bestimmen.

Die zur Zyklone gehörige Trogachse schwenkt mit der Verlagerung des Tiefs nach Süd norwegen im Süden auf den Alpenraum zu. Mithin ist seine Verlagerungsgeschwindigkeit im Süden größer als im Norden. Der Verlagerungsvektor c soll in unserem Beispiel für alle Ausgangspunkte P_0 der zu konstruierenden Trajektorien im Bereich der Zyklone zwischen 55 Grad bis 65 Grad Nord gelten. Für alle Punkte P_0 im Bereich südlich von 55 Grad N ermitteln wir einen entsprechend größeren Translationsvektor c_1 .

b) Konstruktion der Trajektorien im mitgeführten Koordinatensystem (Driftsystem)

Nun konstruieren wir die Stromlinien im mitgeführten Koordinatensystem (Abb. 15).

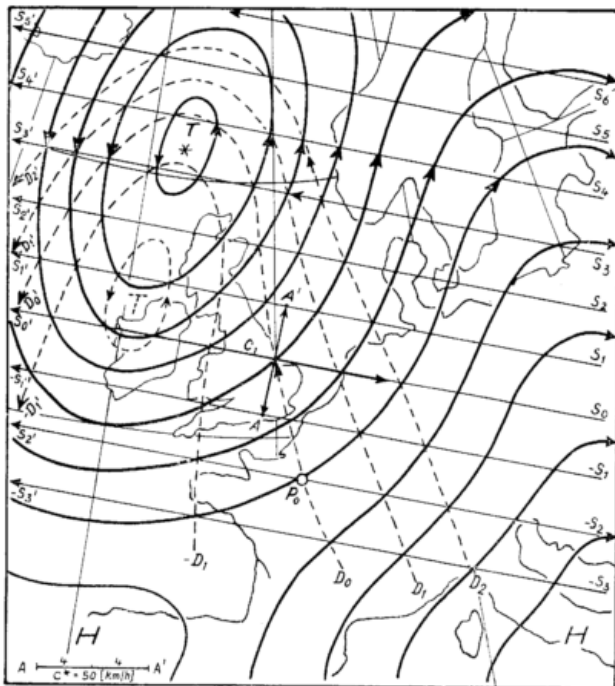


Abb. 15

Die Trajektorien im Driftsystem durch Überlagerung eines geostrophischen approximierten Geschwindigkeitsfeldes mit dem Anfangsdruckfeld Φ_0 .

Dem Ausgangsdruckfeld Φ_0 überlagern wir eine Schaar paralleler Linien, die in entgegengesetzter Richtung zum ermittelten Translationsvektor c_1 verlaufen. Der Abstand dieser Linien ist gleich der geostrophischen Strömungsgeschwindigkeit, die uns durch diesen Verlagerungsvektor gegeben wurde. In 55 Grad N verlagerte sich der Trog mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h. Aus dem Gradientwindmaßstab Abb. 13 entnehmen wir in dieser Breite $\varphi_0 = 55^\circ$ bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h die Entfernung AA' für 8 dkm. Die ermittelte Entfernung AA' halbieren wir und ziehen eine zu c_1 parallele Linienschär $S_i S_i'$, deren Abstand 4 dkm entspricht. Dann führen wir die graphische Addition der beiden Strömungsfelder Φ_0 und $S_i S_i'$ durch, wodurch wir die Trajektorien im mitgeführten Koordinatensystem $D_i D_i'$ erhalten.

Da der benutzte Verlagerungsvektor c_1 der wahren Translation in dieser Breite am genauesten entspricht, machen wir einen Fehler, wenn die überlagerte Linienschär sowohl in 45° N wie in 60° N den gleichen Abstand hat. Die Verlagerung ist in unserem Beispiel in 60° N kleiner (= 40 km/h) als in 45° N (= 60 km/h). Eine Korrektur wird dadurch erreicht, daß wir die überlagerte

Linienschär dem Geschwindigkeitsgefälle von Süden nach Norden anpassen, d. h. den Abstand der Linien AA' für verschiedene Breiten entnehmen und ausgleichen.

c) Zeitmarken auf der Trajektorie im Driftsystem

P_0 ist in unserem Beispiel Ausgangspunkt der Trajektorie auf der Bahnlinie $D_0 D_0'$ im erdfesten System. Von P_0 haben wir auf der Trajektorie $D_i D_i'$ im Driftsystem Zeitmarken zu machen (Abb. 16). Ein Luftquan-

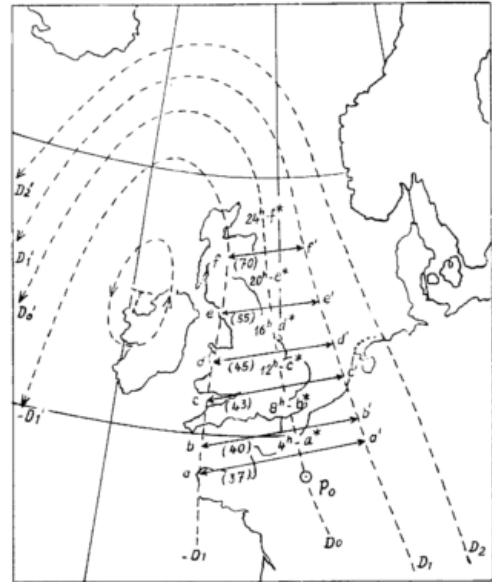


Abb. 16

Die Translation im Driftsystem bei reiner Translation mit den Zeitmarken a^* , b^* , ...

tum wird mit der geostrophisch approximierten Geschwindigkeit des Strömungsfeldes, also proportional einer Geopotentialdifferenz von 8 dkm, verlagert. Wir greifen diesen Abstand (aa') in der Nähe von P_0 ab, gehen in unser Diagramm (Abb. 13) ein und ermitteln die Geschwindigkeit, mit der sich das Luftteilchen von P_0 aus bewegt. Das Massenteilchen ist in 4 Stunden in a^* angelangt. Nun greifen wir in der Nähe des Punktes a^* die Strecke bb' ab, gehen wieder in unseren Gradientwindmaßstab ein und ermitteln jeweils unter Berücksichtigung der geographischen Breite φ die Geschwindigkeit des Teilchens von a^* . Nach 8 Stunden ist das Teilchen in b^* angelangt. Diesen Prozeß wiederholen wir solange, bis wir den Ort des Teilchens ermittelt haben, der nach 24 Stunden Endpunkt auf der Trajektorie im mitgeführten System ist. Für kleinere Zeitabschnitte als 24 Stunden empfiehlt es sich, eine entsprechend kleinere — vielleicht 3- oder 4-stündige — Intervalleinteilung zu nehmen. Die Konstruktion der Trajektorie wird dann um so genauer.

d) Die Bahnlinie im erdfesten System

Als letzten Konstruktionsschritt haben wir nun den Übergang von der Trajektorie im Driftsystem zur Trajektorie im erdfesten System durchzuführen (Abb. 17). Wir verlagern die Bahnlinie $P_0 f^*$ und die Strecke ct punktweise parallel zum Translationsvektor c_1 , d. h. wir ziehen durch a^* , b^* , c^* , ... Parallelen zum Verlagerungsvektor und verlagern das nach 4 Stunden von P_0 angekommene Teilchen um 4×50 gleich 200 km in Richtung c_1 , entsprechend das in b^* angekommene Teilchen um $2 \times (4 \times 50)$ gleich 400 km in derselben Richtung. Dadurch erhalten wir alle Zwischenpunkte einer Trajektorie im erdfesten System im 4-stündigen

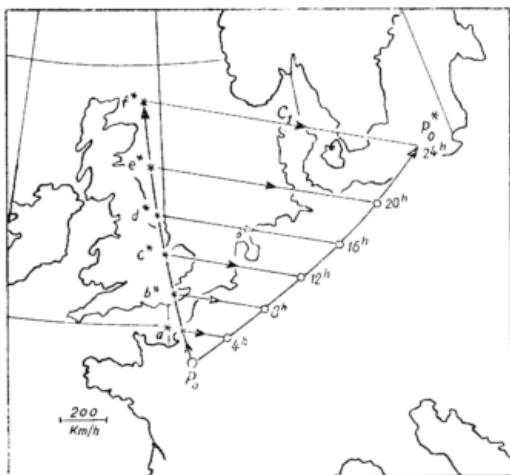


Abb. 17

Die Trajektorien im Driftsystem und erdfesten System

(bzw. n-stündigen) Intervall. $P_0P_0^*$ ist in unserem Beispiel die geostrophisch approximierte Trajektorie unter Berücksichtigung einer reinen Translation der Druckgebilde.

Zweiter Konstruktionsabschnitt unter Berücksichtigung von Entwicklungsdruckänderungen

Die konstruierte geostrophisch approximierte Trajektorie ist zu jedem Zeitpunkt Tangente an eine Isohypse des Ausgangsdruckfeldes. Die lokalzeitlichen Änderungen des Druckfeldes sind lediglich auf eine reine Translation zurückzuführen. Da aber die meisten Druckfelder auch eine Entwicklung zeigen, d. h. die sich verlagernden Druckgebilde individuellen Änderungen unterworfen sind, so folgen auch Änderungen der Bahnlinien eines Massenteilchens. Für die in Abb. 14 vorgegebenen Druckverteilungen Φ_0 und Φ_n wollen wir nun eine Korrektur der bereits konstruierten Trajektorie $P_0P_0^*$ vornehmen. Wir sehen, daß sich die atlantische Zyklone auf ihrem Weg nach Südnorwegen um 16 dkm vertieft hat. Ein solcher Prozeß führt zu Abweichungen von der nur unter Berücksichtigung der Verlagerung konstruierten Trajektorie. Eine einfache Korrektur können wir auf zwei Arten erreichen:

1. Durch lineare Interpolation mitteln wir die vorgegebenen Druckfelder Φ_0 und Φ_n und erhalten Zwischendruckfelder in n-stündigem Abstand. Mit diesen konstruieren wir die geostrophisch approximierten Trajektorien für entsprechend kleinere Zeitintervalle, wodurch auch die zeitlichen Änderungen mit erfaßt werden.

Eine solche n-fache Interpolation der Druckfelder mit der Konstruktion von n aneinandergereihten Teiltrajektorien gestaltet den gesamten Konstruktionsprozeß sehr zeitraubend und ist daher in den meisten Fällen nicht anwendbar. In den Fällen markanter Druckänderungen wird jedoch die Konstruktion 12-stündiger Trajektorien nach dieser Methode ratsam sein. Wir wollen von einer solchen Interpolation absehen und eine zweite Möglichkeit wählen.

2. Die in a) — d) geschilderte Konstruktionsmethode wird auf das nach n-Stunden vorgegebene Druckfeld Φ_n , das alle Druckänderungen enthält, angewandt. Wir kehren unseren Konstruktionsprozeß um und konstruieren eine neue Bahnlinie $P_0f_2^*$ durch den Anfangspunkt P_0 .

Die bereits konstruierte Trajektorie $P_0P_0^*$ ist während der ersten Stunden von P_0 ausgehend Tangente an die Isopotentiale, während die Trajektorie $P_0f_2^*$ in dem Druckfeld Φ_n innerhalb der letzten Stunden tangential

zu den Isohypsen verläuft. Eine mittlere, linear interpolierte Trajektorie aus beiden Kurvenzügen berücksichtigt demnach die mittleren Feldänderungen $\Delta\Phi$. Die gewonnene Trajektorie ist die Trajektorie I. Näherung (N_1Tr).

e) Die Trajektorie im Driftsystem

Zur Konstruktion der Trajektorie im Driftsystem benutzen wir nun das Druckfeld Φ_n (Abb. 18). Die über-

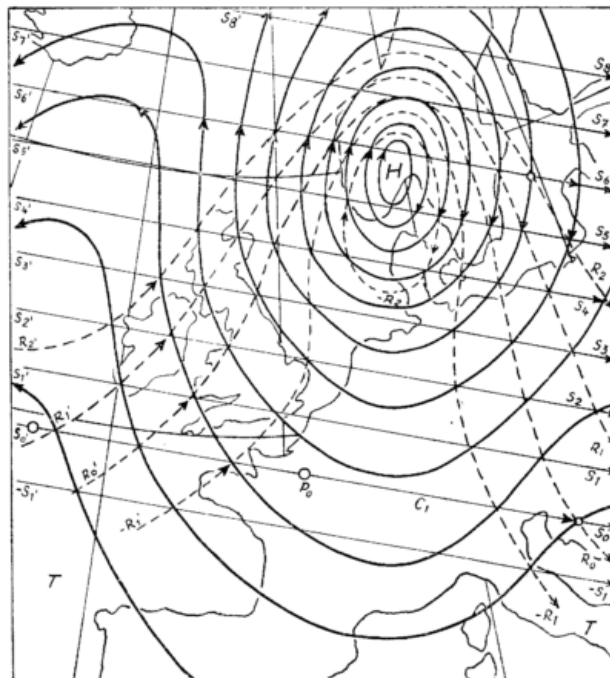


Abb. 18

Die Trajektorien im Driftsystem bei Berücksichtigung von Entwicklungsdruckänderungen

lagerte Schar paralleler Linien $S_i'S_i$, die aus der Verlagerungsgeschwindigkeit der Drucksysteme resultiert, bleibt erhalten, da es gleichgültig ist, ob wir das System in n-Stunden um die Strecke Δs vorwärts oder rückwärts verlagern. Die beiden Strömungsfelder Φ_n und $S_i'S_i$ haben bei einer Bewegung nach rückwärts

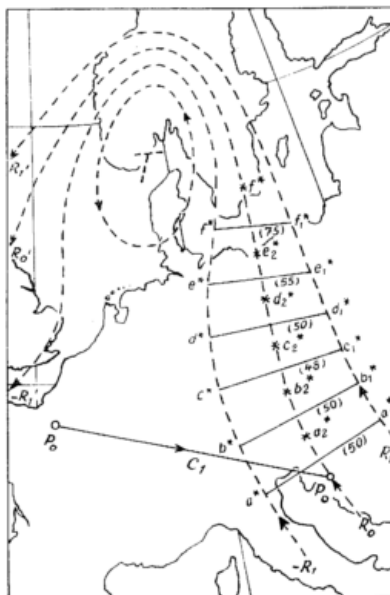


Abb. 19

Zeitmarken auf den Driftsystemtrajektorien

eine andere Orientierung als im 1. Konstruktionsabschnitt. Einer Zyklone (Antizyklone) ordnen wir jetzt den Umlaufsinn einer Antizyklone (Zyklone) zu, und die überlagerte Schar paralleler Linien stimmt nun mit der ursprünglich ermittelten Translationsrichtung c_1 des Teildruckfeldes überein. Die graphische Addition beider Drucksysteme ergibt die Trajektorien im Driftsystem mit der Orientierung R_jR_i .

- f) Bestimmung der zum Anfangspunkt P_0 der Trajektorie gehörigen Bahnlinie im Driftsystem und die Ermittlung der Zeitmarken

In P_0 tragen wir den Translationsvektor c_1 mit dem Endpunkt P'_0 an. P'_0 (Abb. 19) ist nun Ausgangspunkt für unsere Zeitmarken $a^*_2, b^*_2, c^*_2, \dots$. In unserem Beispiel liegt P'_0 zufällig auf einer Trajektorie im Driftsystem. Ist dies nicht der Fall, so muß man durch Interpolation eine solche Stromlinie einzeichnen. Die Zeitmarken a^*_2, b^*_2, \dots sind in entgegengesetzter Richtung auf der Stromlinie R'_0R_0 — also in Richtung $R_0R'_0$ — zu machen. Das Massenteilchen bewegt sich mit der geostrophisch approximierten Geschwindigkeit in dieser Richtung von P'_0 aus. Wir greifen oberhalb P'_0 den Abstand a^*_1 zweier Geopotentiallinien ab, gehen in unseren Gradientwindmaßstab ein und bestimmen die Geschwindigkeit, mit der sich das Teilchen von P'_0 aus bewegt. In 4 Stunden kommt es in a^*_2 an. Auf diese Weise ermitteln wir den Endpunkt f^*_2 einer Trajektorie im erdfesten System durch P_0 .

- g) Die Trajektorie im erdfesten System

Den Übergang von der Trajektorie im Driftsystem mit den Zeitmarken $a^*_2, b^*_2, c^*_2, \dots$ zur Bahnlinie im erdfesten System vollziehen wir gemäß Abschnitt d.

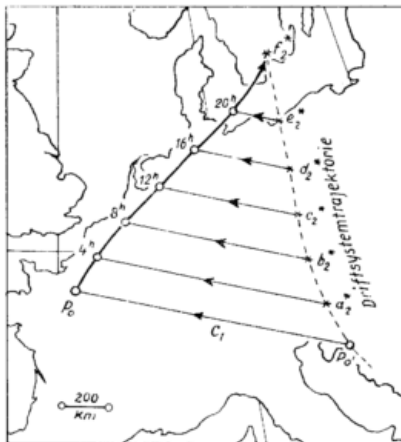


Abb. 20
Die Trajektorie $P_0f^*_2$ bei Entwicklungsdruckänderungen

Aus Abb. 20 ersehen wir, daß f^*_2 der Endpunkt der geostrophisch approximierten Trajektorie im erdfesten System ist. Durch die Zeitmarken a^*_2, b^*_2, \dots ziehen wir wieder parallele Linien zum Translationsvektor c_1 . Die Massenteilchen werden aber nun in Zugrichtung der Zyklone T'T (Abb. 14) verlagert. Auf diesen Linien tragen wir die Entfernungen $c \times t$ ab und erhalten die Zwischenpunkte für die Zeitintervalle nach 4h, 8h, 12h, . . . der Trajektorie $P_0f^*_2$ des erdfesten Systems.

- h) Ermittlung der Trajektorie I. Näherung auf einer Hauptisobarenfläche

Wir tragen nun die beiden konstruierten Trajektorien $P_0P^*_0$ und $P_0f^*_2$ auf (Abb. 21). Durch Mittelbildung dieser beiden Bahnlinien, die mit dem Ausgangsdruckfeld

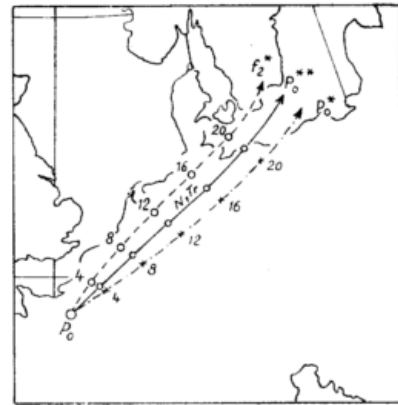


Abb. 21
Die Trajektorie erster Näherung (N_1Tr) $P_0P_0^{**}$

Φ_0 und mit dem Enddruckfeld Φ_n konstruiert wurden, erhalten wir die geostrophisch approximierten Trajektorie I. Näherung (N_1Tr) $P_0P_0^{**}$ auf einer Isobarenfläche. Diese Bahnlinie berücksichtigt sowohl den Translationsanteil wie auch den Entwicklungsanteil der Druckfelder in erster Näherung.

3.1.1. Fehlerabschätzung der graphischen Konstruktionsmethode

Bevor wir ein graphisches Konstruktionsverfahren in der Praxis anwenden, müssen wir die Größenordnung der Fehler kennen, die der Methode anhaften. Wir führen zunächst eine Fehlerabschätzung durch, indem wir die Ergebnisse eines analytischen Modells unter gleichen Voraussetzungen mit dem graphischen Konstruktionsergebnis vergleichen. Unser graphisches Konstruktionsverfahren hat dann einen Sinn, wenn wir eine recht gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen eines numerisch ausgewerteten analytischen Modells erreichen. In der meteorologischen Praxis erscheinen — wegen der Vielzahl der zu berücksichtigenden Einflüsse — die Ergebnisse bereits dann brauchbar, wenn die Fehler im Bereich zwischen 10% und 20% liegen oder der Korrelationskoeffizient 0.75 überschreitet. Dabei sehen wir von den Fehlern ab, die wir aus analytischen Gründen und wegen mangelnder Beobachtungsgrundlagen machen müssen, wenn wir anstatt „nicht-geostrophisch“ nur „geostrophisch“ rechnen. Andererseits hat ein geostrophisches Konstruktionsverfahren den Vorzug, daß es in möglichst kurzer Zeit durchgeführt werden kann und für die Verfrachtung atmosphärischer Beimengungen besonders in der 500-mb-Fläche zu ausreichenden Ergebnissen führt.

Analytisch sei das Geopotentialfeld durch die bereits bekannte Beziehung

$$\Phi(x, y, t) = -f_0 U y + f_0 A_0 e^{\lambda t} \cos k(x - ct) \quad [112]$$

gegeben. Wir vergleichen das numerische Ergebnis für die Ortskoordinaten der Trajektorie durch den Anfangspunkt (x_0, y_0)

$$x(t) = Ut + x_0$$

$$y(t) = rk A_0 \left[e^{\lambda t} \cos \left[\eta + k(Ut + kx_0) - \cos(\eta + kx_0) \right] + y_0 \right] \quad [113]$$

mit den Ortskoordinaten der Bahnlinie, die wir mit Hilfe unserer graphischen Methode ermittelt haben. Tab. 4 enthält die berechneten Koordinatenwerte x_0, y_0 , sowie die mit Hilfe des graphischen Verfahrens ermittelten Koordinaten x_k, y_k für die Zeitintervalle von 4 zu 4 Stunden. Zur Ermittlung des Fehlervektors $|\Delta F|$, den wir als geostrophischen Differenzvektor (Abb. 22) definieren, bilden wir die Koordinatendifferenzen, qua-

vollkommen übereinstimmte, waren die Trajektorien I. Näherung identisch mit den Vorhersagetrajektorien. In diesem Fall bliebe es bei einem mittleren geostrophischen Fehler von 5%, der in erster Linie auf die mangelnde Zeichengenauigkeit geostrophisch approximierter Luftbahnen zurückzuführen ist. Es ist jedoch kaum zu erwarten, daß die eingetretene mit der vorhergesagten Druckverteilung völlig übereinstimmt. Im Mittel liegt der Korrelationskoeffizient zwischen der eingetretenen und der vorhergesagten Geopotentialverteilung in 500 mb bei $r = 0.76$. Für die höheren Druckflächen (300 und 200 mb) ist die Korrelation geringer. Sie liegt nach den bisherigen Ermittlungen bei $r = 0.65$. Demnach haben wir in diesen Höhen auch größere Abweichungen der Vorhersagetrajektorie zu erwarten.

Vergleichen wir beide geostrophisch ermittelten Luftbahnen \bar{N}_1Tr und $\bar{V}Tr$ miteinander und definieren als Fehlervektor \bar{a}_F den Differenzvektor zwischen \bar{N}_1Tr und $\bar{V}Tr$, so erhalten wir Aufschluß über die Güte der vorhergesagten Geopotentialverteilung im Bereich der konstruierten Bahnlinien, die zur Konstruktion benutzt wurde. Der so ermittelte mittlere Fehlervektor erlaubt zwar keine Schlüsse auf die Qualität des Konstruktionsverfahrens an sich, sondern nur auf die Fehlerquellen eines solchen empirischen Verfahrens. Jedoch benötigen

wir für eine aktuelle Vorhersage Erfahrungswerte für die mittlere Streuung dieser Fehlervektoren, auf die wir im nächsten Abschnitt näher eingehen werden.

3.1.3. Vorläufige Ergebnisse einer Statistik der Trajektorien I. Näherung und der Vorhersagetrajektorien

Die Erfahrung hat gezeigt, daß sich die Konstruktion von Luftbahnen in den mittleren Breiten zwischen 45° und 70° Nord ohne Schwierigkeiten durchführen läßt. Wir haben in diesen Breiten geringere Fehler als im Bereich südlich 45° und nördlich 70° zu erwarten. Diese Tatsache läßt sich damit begründen, daß in den Gebieten der quasistationären Druckgebilde alle detaillierten Diagnosen und Prognosen wegen der Weitmächtigkeit des Stationsnetzes auf Schwierigkeiten stoßen. Die Translationsgeschwindigkeit der Druckzentren oder markanter Kammlinien ist oft so gering, daß man bei sehr schwachem Gradienten und unregelmäßigem Pendeln der Druckgebilde nahezu stationäre Verhältnisse vorfindet.

Die Verlagerung der Massenteilchen ist vor allem in den Subtropen ($\varphi < 35^\circ$) gering und unregelmäßig, da das geostrophische Gleichgewicht dort auch

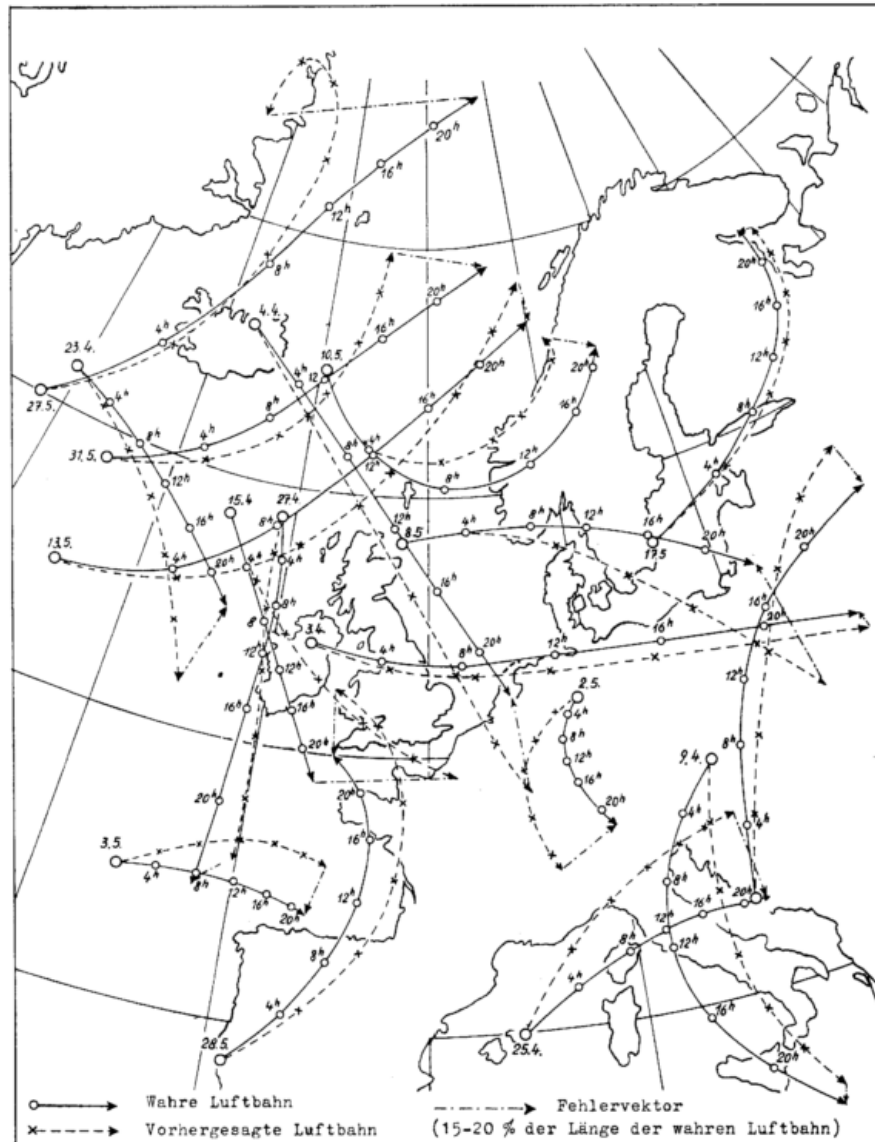


Abb. 23
Einige Beispiele der konstruierten 24-stündigen Luftbahnen im europäischen Raum (April/Mai 1956)

im Mittel nicht mehr als erfüllt angesehen werden kann. In den mittleren Breiten stößt die Konstruktion der Luftbahnen lediglich in unmittelbarer Nähe der Druckzentren auf Schwierigkeiten. Sie wird in diesem Gebiet um so fehlerhafter, je geringer die Verlagerungsgeschwindigkeit ist. Der Weg der Luftteilchen wird außerdem durch stärkere ageostrophische — und Vertikalbewegungen modifiziert. Unsere statistischen Untersuchungen beschränken sich auf die 500-mb-Fläche. Es wurden insgesamt 162 Trajektorien I. Näherung und Vorhersagetrajektorien für den Zeitraum von April bis Mit 1956 konstruiert, wovon 62 mit einem Anfangspunkt (x_0, y_0) im mitteleuropäischen Bereich liegen. Die Ausgangspunkte liegen in einiger Entfernung der Druckzentren und vorwiegend in der glatten Strömung des Höhendruckfeldes. Abb. 23 zeigt einige Beispiele der beiden Bahnlinien (N_1Tr ausgezogen, VTr gestrichelt).

Während die wahre mittlere Partikelgeschwindigkeit (aus N_1Tr berechnet) 67 km/h beträgt, liegt die ermittelte geostrophisch approximierte Teilchengeschwindigkeit mit Hilfe der Vorhersagekarte bei 65 km/h. Die Translationsgeschwindigkeit der Druckgebilde weist hingegen eine Differenz von 6 km/h gleich 19% gegenüber der tatsächlich ermittelten Verlagerungsgeschwindigkeit auf. Sie betrug in Wirklichkeit im Mittel 32 km/h gegenüber einer Vorhersage von 26 km/h. Dabei müssen wir auf eine Diskussion der zeitlichen Änderung des Druckgradienten, d. h. auf die Berücksichtigung einer Entwicklung der Druckgebilde verzichten. Weiterhin wird das Ergebnis durch eine fehlerhafte Vorhersagekarte der Zugrichtung der Druckgebilde beeinflusst. Weitere Einzelheiten über die Streuung der Fehlervektoren entnehmen wir der nachfolgenden Tab. 5.

Tab. 5
Statistik konstruierter Trajektorien im mitteleuropäischen Bereich (62 Fälle)

	4h	8h	12h	16h	20h	24h	Stunden
$\overline{N_1Tr}$	300	590	870	1140	1400	1610	km
\overline{VTr}	290	570	835	1090	1330	1550	km
\overline{aF}	90	150	210	255	310	370	km
$\frac{\overline{aF}}{\overline{N_1Tr}}$ in % von	30 %	26 %	24 %	22 %	22 %	23 %	%

Im Mittel erreicht die Trajektorie erster Näherung nach 24 Stunden eine Gesamtlänge von 1610 km, während die vorhergesagte Bahnlinie nur 1550 km lang ist. Den geostrophischen Fehlervektor ermitteln wir, indem wir den Differenzvektor für jeden einzelnen Fall ausmessen. Nach 24 Stunden sind die beiden Endpunkte der Trajektorien 370 km voneinander entfernt, das sind 23% der Gesamtlänge (1610 km) der Trajektorie erster Näherung. Als Mittelwert über alle 24 Stunden erhalten wir 24.5% der Länge der Trajektorie erster Näherung, das heißt, daß wir mit einem horizontalen Streuvektor mit einer Länge von 24.5% der Trajektorie um ihren Endpunkt rechnen müssen. Dabei setzen wir voraus, daß die geostrophischen Fehlervektoren eine gleichmäßige Verteilung nach rechts und links von der wahren Luftbahn aufweisen. Ob dies der Fall ist, werden wir aus den weiteren Untersuchungen erkennen. Den Sachverhalt der Streuung haben wir in Abb. 24 nach den Ergebnissen der Tabelle 5 graphisch dargestellt.

zur Zeit nicht zu beseitigenden Fehler durch die geostrophische Approximation — folgende Mängel auf:

- a) Fehler der Vorhersage des Translationsvektors
- b) Fehler der Vorhersage des Druckgradienten

Unsere Gesamtstatistik bezieht sich auf insgesamt 162 Konstruktionen. Wir haben nunmehr auch solche Fälle zugelassen, deren Anfangspunkte in der Nähe der Druckzentren und am Nordrand des Azorenhochs liegen. Die wahre mittlere Verlagerungsgeschwindigkeit der Druckzentren lag um 1.2% über der vorhergesagten, während die mittlere Vorhersagetrajektorie nur um 0.65% länger ist als die Trajektorie erster Näherung, d. h. daß die Transportgeschwindigkeit der Partikel geringfügig größer als die wahre Geschwindigkeit vorhergesagt wurde. Um etwaige systematische Abweichungen nach rechts und links von der Trajektorie erster Näherung festzustellen, haben wir alle Fehlervektoren getrennt ausgezählt und ausgemessen. Über dieses Ergebnis gibt uns die folgende Tabelle 6, die wir gleichzeitig graphisch dargestellt haben, Auskunft (Abb. 25).

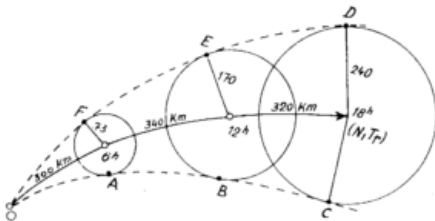


Abb. 24

Mittlere Streuung der geostrophischen Fehlervektoren um die Trajektorie erster Näherung nach Tabelle 5 für 62 Fälle

Die Fläche OCDO stellt demnach den Bereich dar, in dem wir die verfrachteten Partikel zu erwarten haben. Eine Vorhersagetrajektorie weist demnach — abgesehen von dem

Die Werte der oberen drei Zeilen entsprechen den Werten der Tabelle 5 und enthalten die ersten 62 Fälle. Das Mittel aller Fälle hat sich im Absolutbetrag des mittleren Fehlervektors (\overline{aF}) um 3.3% verschlechtert. Die Streuung um die mittlere Trajektorie erster Näherung ($\overline{N_1Tr}$) beträgt nun 27.8% des jeweils zurückgelegten Weges der Partikel. Daß es sich hierbei um eine fast gleichmäßige Streuung nach beiden Seiten der Trajektorie erster Näherung handelt, geht aus Werten der Zeilen 4 bis 8 hervor (vgl. auch Abb. 25). Wir haben alle Fälle mit einer Abweichung der Vorhersagetrajektorie und somit des Fehlervektors nach rechts, links und in Richtung der Luftbahn erster Näherung gesondert ausgezählt und ausgemessen. Es darf wohl angenommen werden, daß die Vektorsumme der mittleren geo-

Tab. 6

Gesamtstatistik konstruierter Trajektorien — einschließlich der 62 mitteleuropäischen Fälle —

162 Fälle		4h	8h	12h	16h	20h	24h	
$\overline{N_1Tr}$	km	295	558	810	1055	1292	1529	
\overline{VTr}	km	284	558	820	1069	1307	1542	
\overline{aF}	km	91	152	213	286	353	430	
\overline{VTr}_R	km	287	560	824	1069	1344	1572	
\overline{VTr}_L	km	284	568	829	1057	1287	1519	
$\overline{VTr}_{\rightarrow}$	km	273	452	594	894	1146	1630	
\overline{aF}_R	km	98	162	221	274	342	423	
\overline{aF}_L	km	86	153	216	298	372	446	
$\overline{aF}_{\rightarrow}$	km	87	88	75	115	83	103	
\overline{aF} in % von $\overline{N_1Tr}$		30.8	27.2	26.3	27.1	27.3	28.1	Mittel: 27.8 %

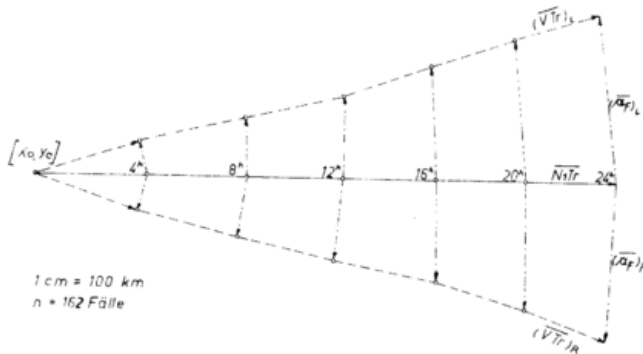


Abb. 25

Die Streuung der mittleren Vorhersagetrajektorien nach rechts (R) und links (L) von der mittleren Trajektorie erster Näherung

strophischen Fehlervektoren identisch verschwindet, d. h. daß eine völlig symmetrische Zufallsverteilung der Vorhersagetrajektorie um die wahre Luftbahn (N_1Tr) vorhanden ist. In diesem Fall dürfen wir eine gleichmäßige mittlere Streuung von 27.8% um die vorhergesagte Trajektorie annehmen. Wir können also bei einer Vorhersage des Partikeltransportes die vorhergesagte Trajektorie und die Streuung — die wir wegen des Einflusses der Turbulenz auf 30% der Weglänge vergrößern wollen — benutzen, um den horizontalen Flächenabschnitt zu bestimmen, in den die Teilchen hineinverfrachtet werden. Es resultiert eine ähnliche graphische Darstellung, wie sie in Abb. 24 wiedergegeben ist. In

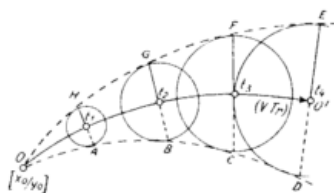


Abb. 26

Mittlere Streuung der geostrophischen Fehlervektoren um die Vorhersagetrajektorie als Funktion des zurückgelegten Weges der Partikel

mittleren Breiten (um 50° N) kann demnach folgende vorläufige Faustregel aufgestellt werden:

„Die Partikel einer Atomwolke in 0 (Abb. 26) werden auf einer Hauptisobarenfläche in die Fläche ODEO um die vorhergesagte Trajektorie 00' hineinverfrachtet. Den Streuegel erhalten wir, indem wir auf der Vorhersagetrajektorie nach t_1, t_2, \dots, t_n Stunden einen Kreis um den jeweiligen Endpunkt der Trajektorie mit einem Radius von 30% des zurückgelegten Weges der Partikel von 0 in Richtung 0' aus schlagen. Die Einhüllenden begrenzen das Verfrachtungsgebiet nach beiden Seiten von (VTr) aus.“

Die hier mitgeteilten Ergebnisse vermitteln nur einen rohen Überblick, denn die Zahl der untersuchten Fälle reicht nicht aus, um daraus vollgültige Schlussfolgerungen zu formulieren. Es wird notwendig sein, weitere Konstruktionen zur Erprobung und Verbesserung der Konstruktionsmethode durchzuführen und dabei die Ausgangspunkte nach systematischen Gesichtspunkten auszuwählen. Das Schwergewicht sollte jedoch auf eine Verminderung der Verfahrensfehler sowie eine Erweiterung der Grundvoraussetzungen durch Einbeziehung ageostrophischer Komponenten und der Vertikalbewegung gelegt werden.

3.1.4. Die Zugbahnen der Rauchpartikel anlässlich der kanadischen Waldbrände im September 1950

Wir verfügen leider über keinerlei Versuchsreihen mit sichtbaren Schwebstoffen, um die Luftbahnen in der Atmosphäre zu markieren und dann exakt zu vermessen, wodurch nicht nur der horizontale Transport, sondern gleichzeitig die vertikalen Versetzungen ermittelt werden könnten. Die Versuche, die mit „constant pressure level balloons“ (12) unternommen wurden, gelten wiederum nur für die Nullschicht mit $\omega = 0$. Sie charakterisieren keineswegs den genauen Wanderweg eines Aerosols oder Luftteilchens, da sie die vertikale Windkomponente und die Fallgeschwindigkeit der Partikel vernachlässigen. Daher ist über einen etwaigen Partikelausfall (fall out) keine exakte Aussage zu machen.

Bedauerlicherweise müssen wir uns daher mit früheren Beobachtungen begnügen und greifen an dieser Stelle noch einmal auf die Verfrachtung der Waldbrandpartikel vom September 1950 und die Verfrachtung des Saharasandes vom März 1947 zurück. Ein weiteres lohnendes Beispiel zur Untersuchung der Verfrachtung atmosphärischer Verunreinigungen stellen auch die jüngsten Eruptionen auf einer Insel der Azoren dar. Dabei wurden in den letzten Septembertagen 1957 mehr als 130×10^6 Tonnen Lava ausgestoßen, und eine vollkommen neue Insel entstand. Die Gas- und Dampf Wolke erreichte eine Höhe von mindestens 7 km (über 20 000 Fuß). Dieses Beispiel verdient allein wegen besondere Beachtung, da sich das Naturereignis im Gebiet einer quasistationären Hochdruckzelle abspielte. Aus Zeitmangel können wir an dieser Stelle nicht näher auf dieses Ereignis eingehen, werden es aber in einer späteren Arbeit noch einmal aufgreifen.

Um dem Leser dieser Arbeit ein Nachschlagen in älteren Arbeiten zu ersparen, seien die Hauptereignisse der kanadischen Waldbrände hier noch einmal erwähnt (24—30).

Das Hauptgebiet der Brände lag um 120° W im Bereich von Britisch Kolumbia und Alberta. Die stärkste Rauchentwicklung ereignete sich am 23. September 1950.

H. Wexler und M. Rodewald unternahmen den Versuch, die Zugbahnen der Rauchpartikel zu rekonstruieren. Dabei kommt Wexler zu dem Schluß, daß die Partikel weder auf der 700-mb- noch auf der 500-mb-Fläche in das der Küste vorgelagerte westatlantische Gebiet hin verfrachtet wurden. Er ist der Auffassung, daß sie in der Isentropenfläche $\theta = 312^\circ$ K transportiert wurden. Zeichnet man sich diesen Wanderweg in eine Karte, die die Höhendruckverhältnisse enthält, dann fällt auf, daß die Partikel durch den nicht allzu rasch wandernden Höhenhochkeil hindurch verfrachtet wurden.

Hingegen benutzt Rodewald zur Erläuterung das Stromband der absoluten Topographie der 500-mb-Fläche auch über dem atlantischen Teil. Er erläutert damit die beobachteten optischen Phänomene im Gebiet des Kanals und an der Nordwestspitze Spaniens.

Wir beschränken unsere Untersuchung einstweilen auf den Transport in der 500-mb-Fläche und nennen als Ausgangspunkt der Weiterverfrachtung (Abb. 27) verschiedene Orte im Raum New York — Washington (schwarze Punkte) zum 24. 9. um 15 Uhr an. Es kann ohne Diskussion hingenommen werden, daß alle Partikel ebenso in höher- und tiefergelegenen Schichten verfrachtet wurden bzw. aus höher gelegenen Schichten in

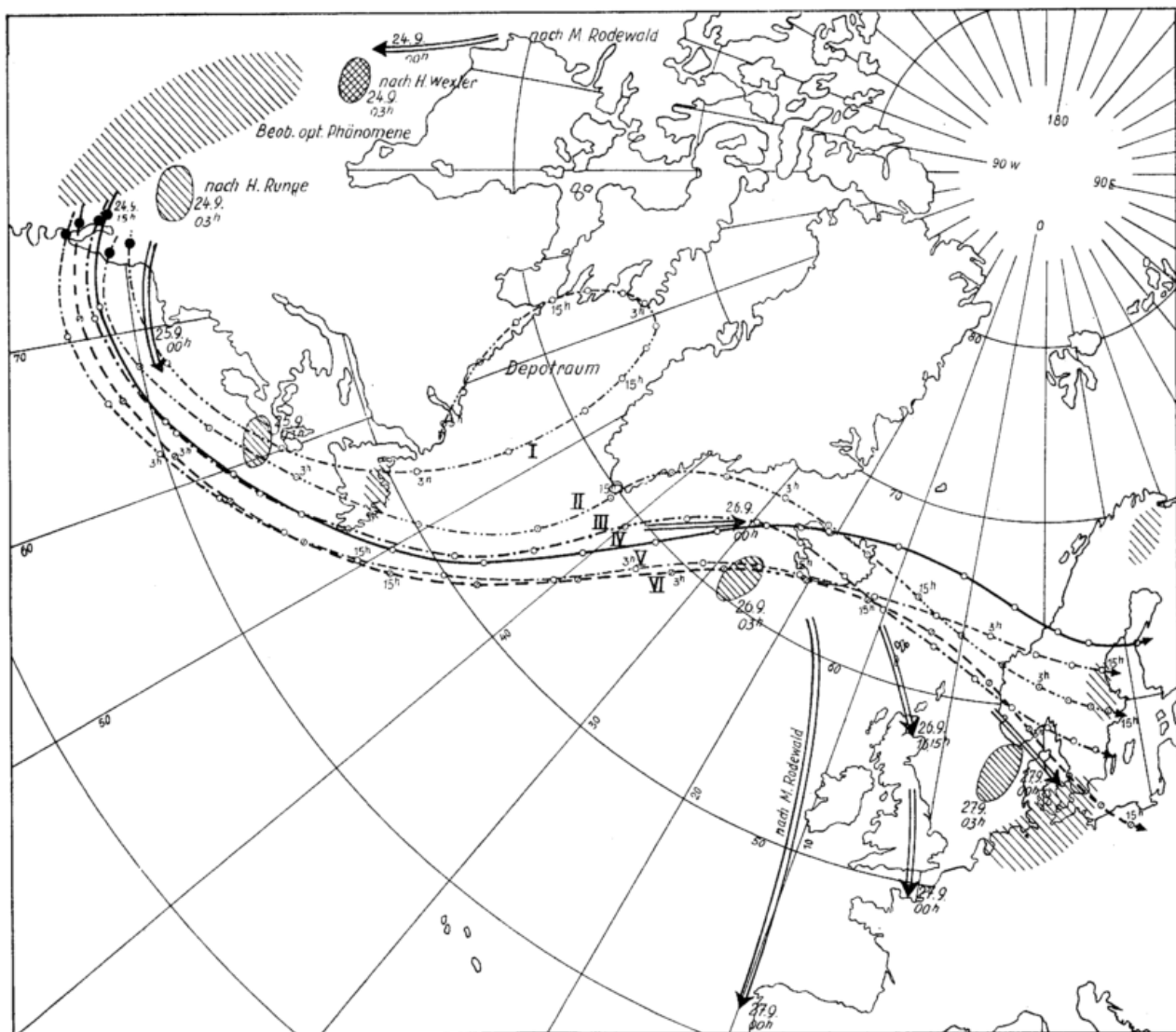


Abb. 27
Der Transport der Rauchschwaden anlässlich der kanadischen Waldbrände im 500-mb-Niveau

tiefere gelangten. Leider sind die Angaben der Piloten über die Obergrenzen der Rauchschicht recht spärlich. Die Untergrenzen lagen nach C. I. D. Smith (33) am 24. 9. in 3.7—4.3 km, am 25. 9. in 3.4—4.3 km, am 26. 9. in 2.7—3.4 km und am 27./28. 9. in 1.8—2.7 km Höhe. Am Oberen See durchflog ein Pilot in 5.2 km noch den dichten Rauch. Aus diesen Daten geht eindeutig hervor, daß die Untergrenze von Tag zu Tag absank. Die wenigsten und wahrscheinlich nur leichtesten Partikel verharrten längere Zeit in der 500-mb-Fläche. Für diese haben die geostrophisch konstruierten Trajektorien I bis VI Gültigkeit. In großen Zügen stimmen sie mit dem Stromband der absoluten Topographie der 500-mb-Fläche überein und können in der Hauptsache damit die opti-

schen Erscheinungen im mitteleuropäischen Raum erklären. Die Erscheinung der blauen Sonne über der Bretagne und über Portugal läßt sich jedoch mit diesen nicht erklären. Die Partikel legen in durchschnittlich 72 Stunden einen Weg von 7370 km zurück (Tab. 7). Im Mittel ergeben sich folgende mittlere Geschwindigkeiten auf den einzelnen Zugbahnen:

Die mittlere Strecke von 7190 km wird bei einer mittleren Geschwindigkeit von $\bar{v} = 103 \text{ km/h}$ in 69.8 Stunden zurückgelegt. R o d e w a l d gibt diese im Mittel für die Strecke vom Ursprungsgebiet bis Europa (11 040 km) mit 115 km/h an.

Tab. 7
Mittlere Geschwindigkeiten der Rauchpartikel aus dem Raum Washington bis Europa

Luftbahn	zurückgel. Weg	Zeit	mittl. Transportgeschwindigkeit
I	5 900 km	60 Std.	98 km/h
II	7 150 km	72 Std.	99 km/h
III	7 550 km	72 Std.	105 km/h
IV	7 550 km	72 Std.	105 km/h
V	7 450 km	72 Std.	103 km/h
VI	7 550 km	72 Std.	105 km/h

Daraus schließen wir, daß die Zuggeschwindigkeit mit Hilfe der absoluten Topographien recht gut erfaßt werden kann. Jedoch wird die Ortsbestimmung (geogr. Länge, Breite und Höhe über NN) aus begreiflichen Gründen recht mangelhaft sein. Dies geht aus diesem Beispiel ganz eindeutig hervor, denn alle Partikel, die der 500-mb-Fläche aus dem Raum um New York — Washington folgen, gelangen in den mitteleuropäischen Raum. Die Partikel, die die optischen Erscheinungen in Frankreich und Spanien verursachten, müßten aus anderen Schichten der Atmosphäre stammen. So berichtete ein Pilot im Raum über Glasgow (Schottland), daß er am 26. 9. in 43 000 Fuß (~ 13 km) Höhe eine dünne Schicht von Staub und Sand durchflog hätte, die zur Blaufärbung der Sonne führte. Diese änderte sich ständig, da die vorbeitreibende Staubschicht verschieden starke Intensität aufwies. Die optischen Erscheinungen

über Schottland, Frankreich und Spanien lassen sich demnach eher mit dem Transport der Partikel in der 300-mb- oder 200-mb-Fläche erklären. Es erscheint aber auch keinesfalls ausgeschlossen, daß eine ageostrophische Komponente zum hohen Druck hin verantwortlich gemacht werden muß.

3.1.5. Die Verfrachtung des Saharasandes

Wir haben bereits an anderer Stelle (10) auf diese Transporterscheinung in der Atmosphäre hingewiesen, ohne die dazugehörigen Luftbahnen mitzuteilen. Dies soll nun nachgeholt werden, um einen Vergleich mit den Trajektorien, die Brandtner (34) konstruierte, durchzuführen. Andererseits bietet ein solches Naturereignis Gelegenheit, Studien zur Sedimentation atmosphärischer Verunreinigungen durchzuführen. Als vor-

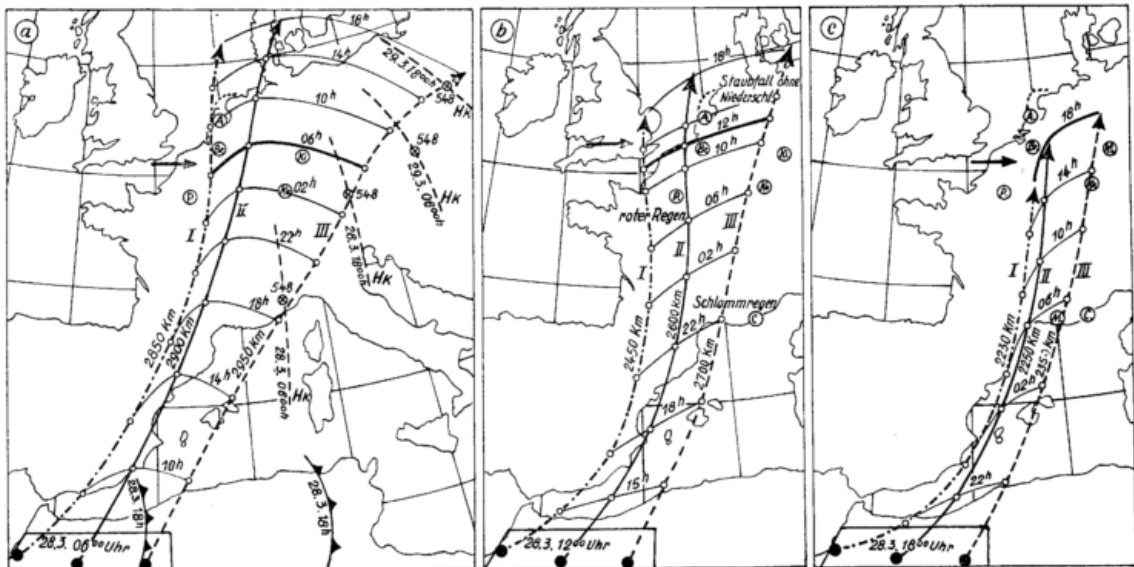


Abb. 28
Die Verfrachtung des Saharasandes nach Mitteleuropa vom 28. 3. 47 — 29. 3. 47 im 500-mb-Niveau

teilhaft erweist sich dabei der relativ kurze Transportweg, eine genaue Größenbestimmung des äolischen Sediments, wodurch gleichzeitig Ort und Zeit der Ablagerung beobachtet werden kann. Abb. 28 vermittelt uns anschaulich den Weg, den die Partikel in der 500-mb-Fläche zurückgelegt haben. Den nach Brandtner scharf lokalisierten Ursprungsraum der aufgewirbelten Staubmassen lassen wir gelten und haben lediglich die

Anfangszeiten der Trajektorien für drei bestimmte Ausgangspunkte variiert, da zwei Kaltfronten als auslösende Ursache das Lößgebiet am Nordwestrand der Sahara im Atlasgebirge in der Zeit vom 28. 3., 06 Uhr, zum 28. 3. 47, 18 Uhr, passiert haben. Alle Trajektorien weisen nahezu die gleiche Richtung nach Belgien — Holland und Dänemark hin auf. Nur die letzte Trajektorie der Abb. 28a schert über Mallorca, Norditalien

Tab. 8
Transportgeschwindigkeiten des Saharasandes

Abb. 28	Länge der Trajektorien	Transportgeschwindigkeit	Mittl. Transportgeschwindigkeit
a) in 36 ^h	2 850 km	79 km/h	81 km/h
	2 900 km	81 km/h	
	2 950 km	82 km/h	
b) in 30 ^h	2 450 km	82 km/h	86 km/h
	2 600 km	87 km/h	
	2 700 km	90 km/h	
c) in 24 ^h	2 230 km	93 km/h	95 km/h
	2 250 km	94 km/h	
	2 350 km	98 km/h	
Mittel	2 587 km	—	87 km/h

nach Polen hin aus. Aus der Tabelle 8 entnehmen wir die sich aus der Konstruktion ergebenden Transportgeschwindigkeiten der Staub- oder Sandteile.

Die Partikel legen in 30 Stunden eine mittlere Entfernung von 2587 km zurück, was einer Transportgeschwindigkeit im 500-mb-Niveau (18 000 Fuß) von 87 km/h entspricht. Brandtner erhält demgegenüber vom Ursprungsgebiet bis zum Rhein-Main-Gebiet (1700 km!) eine mittlere Geschwindigkeit von 113 km/h. Nach Norden tritt zwar eine Verlangsamung der Transportgeschwindigkeit ein, die Brandtner nicht zu Unrecht mit einem Delta (Geschwindigkeitskonvergenz) in der Höhenströmung nördlich der Alpen in Verbindung bringt. Jedoch dürfte die von ihm ermittelte horizontale Verfrachtungsgeschwindigkeit der Partikel zu hoch liegen.

Die Beobachtungen ergaben den Ausfall der Masse der Sand- bzw. Staubteilchen in der Zeit um den 29. 3., 09 Uhr, im Raum zwischen Brüssel — Paris — Karlsruhe und Bad Kissingen. In Marseille wurde in den frühen Morgenstunden des 29. 3. ein roter Schlammregen beobachtet. Die Trajektorien der Abb. 28b bestätigen den Hauptausfall im Raum Brüssel — Bad Kissingen. Demnach wurden die Sandkörnchen bereits vor dem 28. 3., 12 Uhr, im Ursprungsgebiet aufgewirbelt und bereits nach Norden verfrachtet, gelangten jedoch noch nicht in die 500-mb-Fläche. Die 18-Uhr-Bodenkarte zeigt den Durchgang von zwei Kaltfronten in westöstlicher Richtung. In der Turbulenzzone der ersten Kaltfront werden die Teilchen hochgeschleudert, während die stärkere vertikale Verfrachtung bis in größere Höhen unmittelbar vor der zweiten Kaltfront vorwiegend

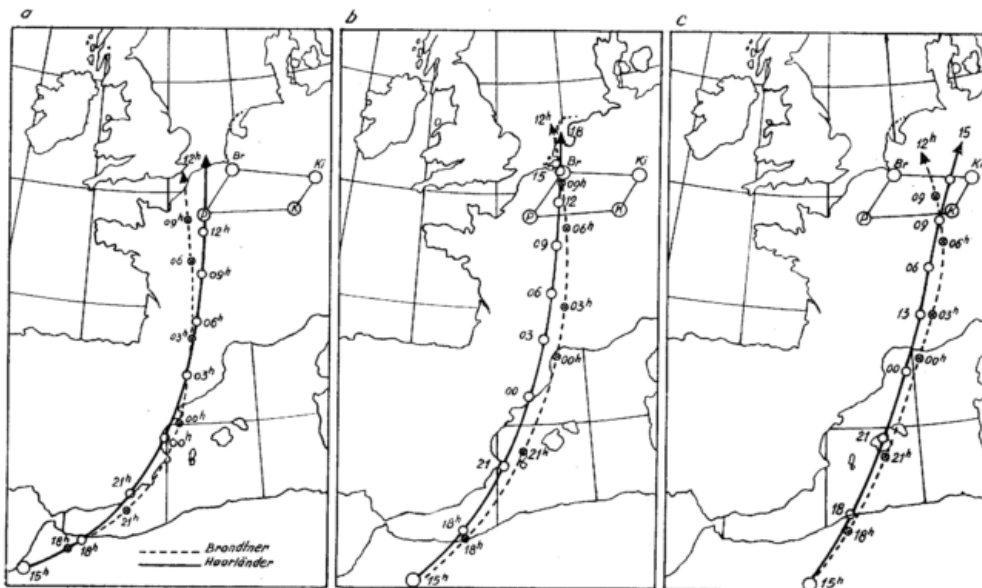


Abb. 29
Ein Vergleich der konstruierten Trajektorien mit den Bahnlängen von E. Brandtner

im Seegebiet vor der Ostküste Spaniens zwischen Almeria und Cartagena vor sich geht. Der Ausfall als Schlammregen im Löwengolf in den Morgenstunden des 29. 3. läßt sich mit den Trajektorien der Abb. 28c recht gut erklären.

Um einen brauchbaren Vergleich mit dem Ergebnis von Brandtner durchzuführen, haben wir die Trajektorien zum 15-Uhr-Termin konstruiert und in Abb. 29 graphisch dargestellt. Ein Blick genügt, um festzu-

stellen, daß die Abweichungen nicht allzugroß sind. Die gestrichelten Kurven stellen die Trajektorien von Brandtner dar. Wie wir bereits festgestellt haben, überschätzt Brandtner die Zuggeschwindigkeit der Staubpartikel im 5-km-Niveau und kann mit seinen Trajektorien die Sedimentation im Gebiet um Marseille nicht mehr erklären. Die Werte einer Fehlerabschätzung gehen aus der folgenden Tabelle (Tab. 9) hervor.

Tab. 9

Fehlervektoren zwischen den Brandtner'schen und den geostrophisch approximierten Trajektorien

Stunde	a)	b)	c)	
	aF ₁	aF ₂	aF ₃	
18h	75	50	80	
21h	90	110	90	
00h	110	210	80	
03h	180	180	40	
06h	280	330	130	
09h	280	300	130	
12h	330	380	190	
Mittel	192	223	106	174

Im Durchschnitt legen die Teilchen nach Brandtner pro Stunde einen Weg von 116 km zurück. Hingegen ermitteln wir den mittleren Transportweg zu 100 km. Der mittlere absolute Fehlervektor beträgt 174 km, das sind 8,3% des insgesamt zurückgelegten Weges in einer Zeit von 21 Stunden. Da Brandtner keinen Hinweis über seine Konstruktionsmethode gibt, ist es nicht möglich, weitere Untersuchungen über die — wenn auch nur geringen — festgestellten Abweichungen durchzuführen.

Bei all diesen Betrachtungen darf nicht vergessen werden, daß es nicht nur auf den horizontalen Transportweg solcher Partikel ankommt, sondern die Frage des vertikalen Transportes ebenso wichtig ist. Zur Frage der Sedimentation müssen die folgenden Betrachtungen entweder getrennt oder ineinander verknüpft angestellt werden:

1. Ablagerung (fall out) nach dem Gesetz von Stokes unter dem Einfluß der Gravitation
2. Ablagerung infolge abwärts gerichteter Vertikalbewegung
3. Ausfall mit dem Niederschlag

Es wäre sehr zweckmäßig, genauere Untersuchungen der vertikalen und horizontalen Verfrachtung an Hand solcher Sandstaubverfrachtungen durchzuführen.

Schlußbemerkungen

Aus den vorliegenden Ausführungen über den Transport atmosphärischer Beimengungen erkennen wir auf der einen Seite die analytischen Schwierigkeiten, atmosphärische Vorgänge modellmäßig darzustellen. Auf der anderen Seite ziehen wir daraus praktische Nutzenwendungen, ein Konstruktionsverfahren anzugeben, das ohne wesentliche Vernachlässigungen den Weg der Partikel wiedergibt. Unser Konstruktionsverfahren beschränkt sich auf den Transport in den Hauptisobarenflächen. Es läßt das Problem der Sedimentation unberücksichtigt. Sie spielt bei der Verfrachtung ionisierter Spurenelemente eine wesentliche Rolle.

Wir können bei der Ausbreitung des atmosphärischen Aerosols mit W. F. Libby (16) zwischen dem

- a) lokalen
- b) troposphärischen und
- c) weltweiten stratosphärischen Depot

unterscheiden. Der troposphärische Ausfall enthält alle noch horizontal begrenzten Transportvorgänge, während das weltweite stratosphärische Depot mit starker seitlicher Durchmischung durch den sehr langsamen Ausfall radioaktiver Suspensionen charakterisiert wird.

Eine konsequente Behandlung des Transportproblems radioaktiver Aerosole setzt die Kenntnis der Anfangsbedingungen und der zeitlichen Änderung aller Einflußfaktoren voraus. Der lokale Ausfall ist von Parametern abhängig, die quantitativ bestimmt werden können.

Dazu gehören:

- a) Die Höhe der Atomwolke als Funktion der Stärke der Explosion und der Stabilität der Atmosphäre
- b) Die Fallgeschwindigkeit der Partikel in Abhängigkeit von der Höhe und Partikelgröße
- c) Die Horizontalkomponenten des Windvektors in allen Schichten (Windstruktur)

Da wir keine hinreichend genaue Kenntnis der raumzeitlichen Verteilung der Vertikalbewegung, Turbulenz und Diffusion besitzen, lassen wir diese Einflußfaktoren vorerst unberücksichtigt.

Atombombenversuche haben ergeben, daß die Stärke und Höhe der Explosion (in der Lithosphäre, Hydrosphäre oder Atmosphäre) in erster Näherung die Partikelgröße und -verteilung der Radioaktivität innerhalb der Wolke bestimmen. Die horizontale Verfrachtung D kann nach Kellog, Rapp und Greenfield (17) innerhalb einer Schicht von der Dicke Δh durch eine Summation mittels der Formel

bei Testexplosionen weg. Schließlich muß zur exakten Untersuchung dieses Problems die Einrichtung eines speziellen engmaschigen Windbeobachtungsnetzes gefordert werden.

Lange bevor Kellogg, Rapp und Greenfield die Ausfallverteilungen mit einer Elektronenrechenmaschine berechneten (Abb. 31, 32), wurde vom USA-Wetterdienst ein Diagramm zur Bestimmung der Ausfallgebiete radioaktiver Aerosole unter vereinfachten

Voraussetzungen entworfen. Da die Anwendung dieses Diagramms in der Praxis recht einfach ist, wollen wir in aller Kürze auf das Konstruktionsverfahren eingehen. Es kann zusätzlich die Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit (W_p) der Partikel vom Radius und der Höhe berücksichtigt werden, was sich vor allem für Teilchen mit einem Radius $> 150 \mu$ auswirkt. Diese haben in Bodennähe eine Grenzgeschwindigkeit von $250 \text{ [cm sec}^{-1}]$ und bei einem Start in 40 km Höhe eine solche von $700 \text{ [cm sec}^{-1}]$. In unserem Beispiel (Abb. 33)

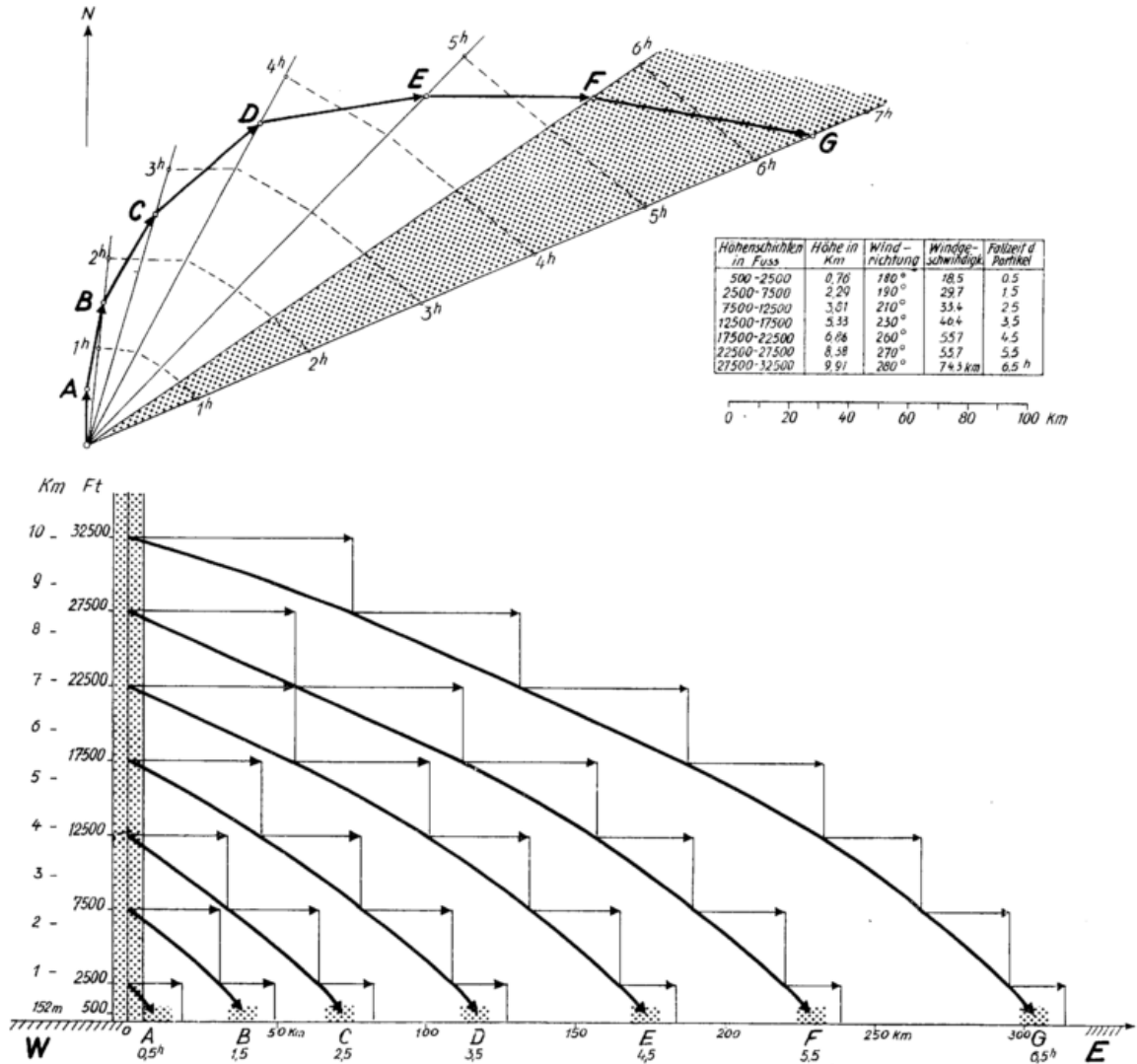


Abb. 33
Beispiel eines Ausfalldiagramms

haben wir einen Radius der Partikel von 50μ angenommen. Die Obergrenze der Aerosolwolke liegt bei rund 10 km Höhe. Die Geschwindigkeitsverteilung schwankt demnach zwischen $38 \text{ [cm sec}^{-1}]$ in Bodennähe und $47 \text{ [cm sec}^{-1}]$ an der Obergrenze. Sie liegt im Mittel bei $42,4 \text{ [cm sec}^{-1}]$. Da die Schwankungen nicht allzu groß sind, rechnen wir mit dieser mittleren Sinkgeschwindigkeit. Die horizontale Verfrachtung ist uns durch die mittleren Windvektoren charakteristischer Schichten bis zur angenommenen Obergrenze des Aerosols gegeben. Diese ergeben den Kurvenzug O, A, B, C... G. Die Verbindungslinien OA, OB, OC... OG begrenzen die Ausfallgebiete zu verschiedenen Zeiten. Bei einer Fallgeschwindigkeit der Partikel von $42,4 \text{ [cm sec}^{-1}]$ berechnen wir die Ausfallzeiten, die in unserer Darstellung als gestrichelte Linien eingetragen sind. Sie werden

durch lineare Interpolation entlang der Linien OA, OB, OC... gewonnen. Der Hauptteil des radioaktiven Aerosols wird wegen der sehr starken Aufwinde im Wolkenpilz emporgetragen, so daß diese erst nach mehreren Stunden in dem Streifen zwischen OF und OG ausfallen. Die untere Abbildung zeigt den Fallweg der Partikel aus verschiedenen Höhen bei reiner Zonalströmung und vorgegebener Fallgeschwindigkeit als Funktion des Partikeldurchmessers.

Dieses Ausfalldiagramm kann nur als rohes Schema zur Bestimmung der Ausfallgebiete innerhalb der ersten Stunden nach der Explosion benutzt werden. Um die lokalzeitliche Änderung des Windfeldes besser zu erfassen, läßt der USA-Wetterdienst seit August 1956 für die mit RAWIN-Sonden ausgerüsteten aerologischen

Stationen den über die Höhe integrierten Wind für mehrere Schichten bis zu 24 km Höhe bestimmen, wodurch die großräumigen Schwankungen des Windfeldes in sechsständigem Abstand erfaßt werden.

Auch die im Deutschen Wetterdienst entwickelte Konstruktionsmethode von Luftbahnen (10) stellt nur

eine Näherungslösung dar, wobei insbesondere die Größenverteilung der radioaktiven Partikel und damit ihre mittlere höhenabhängige Fallgeschwindigkeit sowie alle Turbulenz- und Diffusionseinflüsse unberücksichtigt bleiben. Unter dieser Vernachlässigung stellt Abb. 34 den Transportweg schwebender Teilchen in

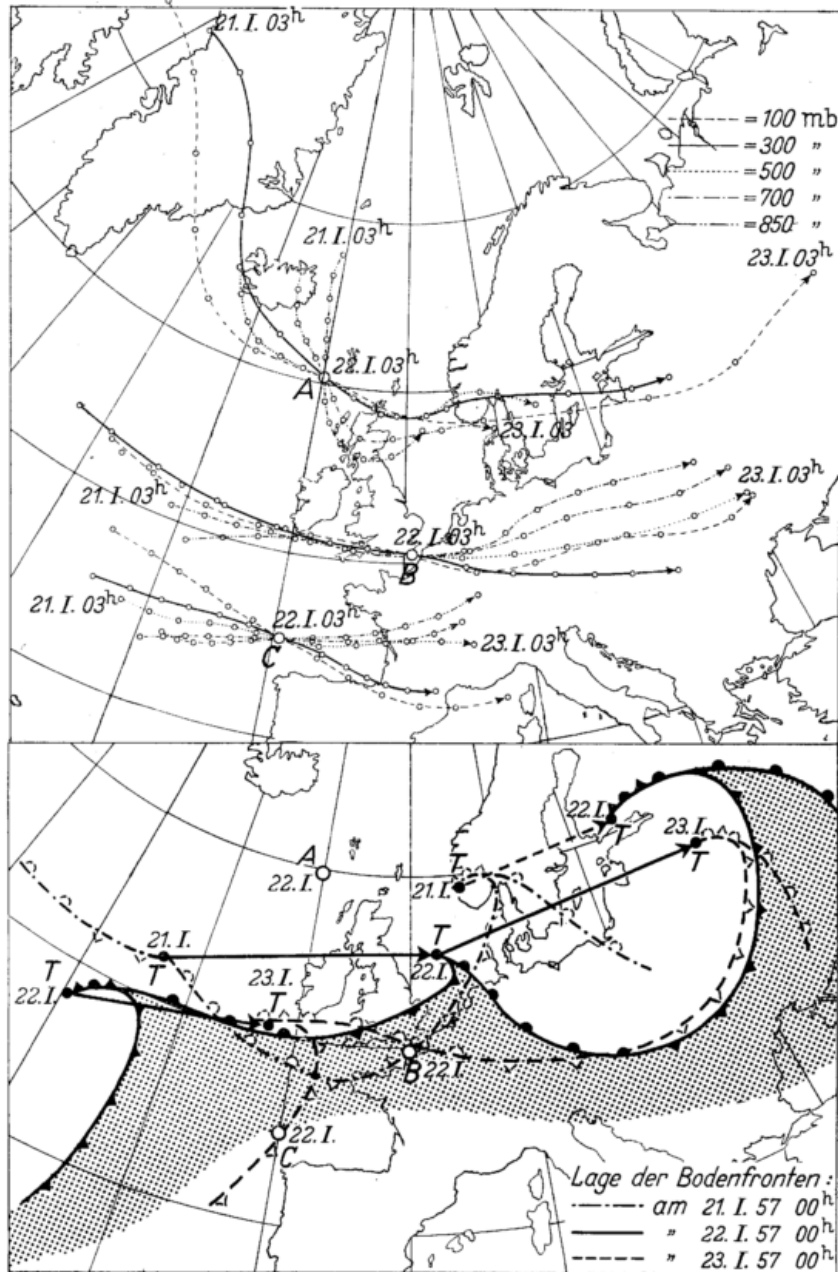


Abb. 34
Transportweg schwebender Teilchen in verschiedenen Druckniveaus

verschiedenen Druckniveaus durch die Orte A, B, C für insgesamt 48 Stunden dar. Machen wir die zusätzliche Annahme einer mittleren Sinkgeschwindigkeit der Partikel aus 100 mb (~ 15 km) von 25.2 [cm sec^{-1}] für Teilchen $< 40 \mu$, so würden nach der Extrapolationsmethode mit vertikal integriertem Wind die Teilchen nach einer Detonation in A nach 18 Stunden im Ruhrgebiet ausfallen. Nach der Trajektorienmethode werden sie aber wegen der zeitlichen Änderung des Strömungsfeldes mit variabler Geschwindigkeit und Richtung nach Südkandinavien abgetrieben.

Die Arbeit wurde vorwiegend mit Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Schutzkommission/Bonn) unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Flohn durchgeführt, dem ich für viele Hinweise meinen Dank schulde. Es sei aber noch einmal besonders darauf hingewiesen, daß die Grundlagen zur Formulierung der hier mitgeteilten Konstruktionsmethode auf mehrere Arbeiten von Herrn Dr. G. Hollmann zurückgeht, dem ich gleichzeitig für die vielen Anregungen und die Durchsicht des analytischen Teils der vorliegenden Arbeit zu ganz besonderem Dank verpflichtet bin.

Literatur

- (1) Shaw, W. N. and Lempfert, R. G. K.: The Life History of Surface Air Currents London 1906
- (2) Lotz, K.: Über Trajektorien der Luft und deren Divergenz. Ann. Hydrogr. **68**, 227 (1940)
- (3) Meyer, K.: Luftmassenbewegung und Luftmassen-umwandlung einer rasch ziehenden Zyklone. Arch. Dt. Seewarte **62**, Nr. 6 (1943)
- (4) Ertel, H.: Eine Methode zur approximativen Vor-ausberechnung von Luftmassenverlagerungen. S.-B. Dt. Akad. Wiss. Berlin Nr. 3 (1948)
- (5) Ertel, H.: Ein neues Verfahren zur Konstruktion von Trajektorien in Strömungsfeldern. Z. angew. Mech. **28**, Nr. 9 (1948)
- (6) Ertel, H.: Zur graphischen Konstruktion von Trajektorien in Strömungsfeldern. Z. angew. Mech. **28**, Nr. 10 (1948)
- (7) Hollmann, G.: Fronten und Entwicklungsphasen in einer wandernden Zyklone im mitgeführten Koordinatensystem. Z. Meteor. **4**, 39 (1950)
- (8) Petterssen, S.: Weather Analysis and Forecasting. New York 1940, S. 221
- (9) George, J. J.: Fog: Its causes and forecasting with special referents to eastern and southern United States. Bull. Amer. Meteor. Soc. **21**, 135—148, 261—269, 285—291 (1940)
- (10) Haarländer, H.: Eine kinematische Methode zur Vorhersage wahrer Luftbahnen mit Beispielen. Ber. Dt. Wetterd. Nr. 31 (1957)
- (11) Hollmann, G.: Über die Instabilität planetarischer Wellen und ihre Bedeutung für die Entstehung stationärer Druckgebilde. Z. Meteor. **5**, 97 (1951)
- (12) Neiburger, M. and Angell, J. K.: Meteorological applications of constantpressure balloon trajectories. J. Meteor. **13**, 166—194 (1956)
- (13) Ertel, H.: Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie. Berlin 1938, S. 22
- (14) Hinkelmann, K.: Kinematik der Strömungslehre (noch unveröffentlicht)
- (15) Lamb, H.: Hydrodynamics. New York 1952
- (16) Libby, W. F.: Current Research Findings in Radioactive Fallout. Vortrag: Amer. Ass. adv. Sc. New York, 12. 10. 56
- (17) Kellogg, W. W. and Rapp, R. R. and Greenfield, S. M.: Close-in Fallout. J. Meteor. **14**, 1—8 (1957)
- (18) Goldstein, M. S.: Modern developments in fluid dynamics (Vol. 2). Oxford, 491—503
- (19) Herbst, W.: Das radioaktive atomtechnische Aerosol, Aerosol-Forsch. u. -Therapie **3**, 5—6, 11 (1954)
- (20) Faust, H.: Übergradientische Winde in der Nullschicht und das Problem der Strahlströme. Arch. Meteor. Geophys. Biokl. A **8**, 45—71 (1955)
- (21) Faust, H.: Die Strahlströme als Erscheinungen der Nullschicht. Meteor. Rdsch. **7**, 161—166 (1954)
- (22) Faust, H.: Die Nullschicht, der Sitz des troposphärischen Windmaximums. Meteor. Rdsch. **6**, 6—15 (1953)
- (23) Welander, P.: Studies of the General Development of Motion in a two-dimensional ideal Fluid. Tellus **7**, 141 (1955)
- (24) Wexler, H.: The Great Smoke Pall 24.—30. Sept. 50. Weatherwise **3**, 129 (1950)
- (25) Rodewald, M.: Die blaue Sonne vom 27. 9. 1950. Naturwiss. Rdsch. **5**, 8 (1952)
- (26) Runge, H.: Blaue Sonne - Blauer Mond. Z. Meteor. **5**, 60 (1951)
- (27) Brunner-Hagger, W.: Endphase des Phänomens der blauen Sonne. Verh. Schweiz. Naturwiss. Ges. Luzern **131**, 119 (1951)
- (28) Schuepp, W.: Beitrag zum Phänomen der blauen Sonne. Experientia **6**, 12 (1950)
- (29) Gelbke, W.: Bemerkungen zum Phänomen der blauen Sonne. Z. Meteor. **5**, 84 (1951)
- (30) Jenne, W.: Weitere Beiträge zur Beobachtung und Erklärung des Phänomens „Blaue Sonne“. Z. Meteor. **5**, 84 (1951)
- (31) Dietze, G.: Die anormale Trübung der Atmosphäre im Sept./Okt. 1950. Z. Meteor. **5**, 86 (1951)
- (32) Rodewald, M.: Hamburger Wetterkarte **3**, Nr. 227, 228 (1950)
- (33) Smith, jr. Cl. D.: The widespread smoke layer from Canadian forest fires during late Sept. 1950. Monthly Weather Rev. **78**, 180 (1950)
- (34) Brandtner, E.: Der Staubfall in Westeuropa am 29. III. 1947. Meteor. Rdsch. **1**, 222 (1948)
- (35) Hollmann, G. u. Reuter, H.: Über die Genauigkeit verschiedener Approximationen der horizontalen Windkomponenten. Tellus **5**, 403—412 (1953)
- (36) Meyer z. Capellen, W.: Integraltafeln. Berlin 1950, 120
- (37) Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen. Leipzig 1948
- (38) Faust, H.: Der Nullschichteffekt als Funktion der Schärfe des Maximums in der vertikalen Windverteilung. Meteor. Rdsch. **8**, 48 (1955)
- (39) Hollmann, G.: Über- und untergradientische barokline Zonalströmung als Lösung der Hydrodynamischen Gleichungen. Meteor. Rdsch. **8**, 105 (1955)
- (40) Gröber, W. u. Hofreiter, N.: Integraltafeln I. Teil. Berlin 1949, 117
- (41) National Academy of Sciences: The Biological Effects of Atomic Radiation. Nat. Acad. Sci.-Nat. Res. Counc. Washington 1956