

Berichte
des
Deutschen Wetterdienstes

Nr. 65
(Band 9)

DK 551.515.71

Beitrag zu einer Theorie stationärer
Antizyklonen

von

Hans Haarländer

(mit 22 Abbildungen und 4 Tabellen im Text)

Offenbach a. M. 1960
Selbstverlag des Deutschen Wetterdienstes

Inhalt

	Seite
Zusammenfassung	3
Abstract	3
1. Einleitung	3
1.1. Problemstellung	3
1.2. Terminologie	4
2. Durchführung der Theorie	6
2.1. Die Differentialgleichung des Druckfeldes	6
2.2. Ein partikuläres Integral der Differentialgleichung	6
2.3. Das Temperatur- und Dichtefeld	8
2.4. Das Divergenzfeld	9
2.5. Das Feld der Vertikalbewegung	10
2.6. Die Wärmequellen	11
3. Numerische Beispiele des analytischen Modells	12
3.1. Die Temperaturphase als Funktion des Koeffizienten m und ihre Bedeutung für die Amplitude des Höhendruckfeldes, sowie die Achsenneigung des Druckmaximums	12
3.2. Der Koeffizient des planetarischen Temperaturgefälles und die Berechnung der Hauptisobarenflächen	13
3.3. Berechnung der Temperaturverteilung auf den Hauptisoba- renflächen	14
3.4. Berechnung der Divergenz und Vertikalbewegung auf den Hauptisobarenflächen. — Der Massenhaushalt	19
3.5. Die räumliche Verteilung der Wärmequellen und -senken in einer stationären Antizyklone	25
3.6. Der Wind und die Windscherung	25
4. Zusammenfassende Betrachtung des analytischen Modells	27
5. Schlußwort	29
Literatur	29

(D 188)

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Met. H. Haarländer, Offenbach a. M., Gabelsbergerstraße 3

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird in Anlehnung an die Hollmann'sche Theorie der Dynamik stationärer Druckfelder (1) ein erweiterter Lösungsansatz einer Integro-Differentialgleichung für warme und kalte stationäre Antizyklonen angegeben. Dieser Lösungsansatz enthält neben einer asymmetrischen Temperaturverteilung auf den Hauptisobarenflächen auch die Umkehr der Vertikalzirkulation beim Übergang von der Troposphäre zur Stratosphäre. In der Stratosphäre herrscht Isothermie, so wie es aus den Erfahrungstatsachen folgt. Das analytische Modell weist außerdem eine im Raum geneigte Achse des Druckmaximums auf. Die Extremschicht, d. h. die Schicht maximalen horizontalen Massenflusses liegt in unmittelbarer Nähe der Faust'schen Nullschicht. Der Lösungsansatz der Differentialgleichung enthält einen Parameter ξ , mit dessen Hilfe der Massenhaushalt unserer stationären Antizyklone (bzw. Zyklone) reguliert wird. Dieser Parameter hat zur Folge, daß die Nullstelle der Vertikalzirkulation im Niveau der Tropopause liegt. Die Verteilung der Feldgrößen T , $\text{div. } v$, qv_z , v_z und $\frac{dQ}{dt}$ auf den Hauptisobarenflächen wird analytisch abgeleitet. Die Endgleichungen wurden numerisch ausgewertet und graphisch dargestellt. Dabei läßt sich die Verteilung der Wärmequellen und -senken auf eine thermisch gebundene Zirkulation zurückführen. Unser Lösungsansatz hat auch für kalte und warme stationäre Zyklogen Gültigkeit.

Abstract

In connexion with Hollmann's theory on the dynamics of stationary pressure fields (1) the present paper gives an extended assumption for solution of an integral differential equation for warm and cold stationary anticyclones. Besides an asymmetric temperature distribution at the standard isobaric levels is included in the assumption for solution the inversion of vertical circulation at the transition from the troposphere to the stratosphere. The stratosphere turns out to be isothermal according to empirical data. The analytic model shows furthermore a spatially tilted axis of the maximum pressure. The extreme layer, i. e. the layer of maximum horizontal mass flow is in direct proximity to Faust's zero layer (Nullschicht). The assumption for solution of the differential equation includes the parameter ξ , by means of which the air mass balance of our stationary anticyclone (or cyclone) is controlled. It follows from this parameter that the zero position of vertical circulation coincides with the tropopause. The distribution of the variables T , $\text{div. } v$, qv_z , v_z and $\frac{dQ}{dt}$ at the significant levels is deduced analytically. The final equations are evaluated numerically and represented graphically. The distribution of heat sources and sinks can be attributed to a thermally driven circulation. Our assumption for solution is also valid for cold and warm stationary cyclones.

1. Einleitung

1.1. Problemstellung

Betrachten wir die Entwicklung der dynamischen und synoptischen Meteorologie der letzten zwei Jahrzehnte, so stellen wir fest, daß die Untersuchungen synoptisch-statistischer Art sehr stark zugenommen haben. Dies hängt unmittelbar mit der raschen Entwicklung der Aerologie zusammen, mit deren Hilfe wir in die Lage versetzt wurden, das Wettergeschehen dreidimensional zu analysieren. Das Vorhandensein der absoluten und relativen Topographien höher gelegener

Schichten zwang zur Revision der bisherigen synoptischen und auch theoretischen Vorstellung über den Aufbau und die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre.

Die Untersuchungen der wandernden Druckgebilde, besonders der Zyklogen, standen lange Jahre im Mittelpunkt der wissenschaftlichen Forschung, bis man erkannte, daß das blockierende quasistationäre Hoch die Bahn und Intensität der wandernden Zyklone und somit das Wettergeschehen in unseren Breiten ebenso stark beeinflußt.

N. Ekholm (2) und W. Peppler (3) erkannten schon recht früh die Bedeutung stationärer Druck-

gebilde für die Bewegung der barischen Tendenzfelder, während dynamische Erklärungsversuche (4) (5) (6) (7) über das Zustandekommen solcher Druckgebilde Aufschluß zu geben versuchen. Erst Rossby (8), Ertel (9) (10) und einige amerikanische Autoren (11) lieferten wesentliche Beiträge zur theoretischen Betrachtung über atmosphärische Druckfelder. Ertel und Rossby gaben eine Stationaritätsbedingung für Druckgebilde bei reibungsfreier Bewegung in einer barotropen Atmosphäre. Da derartige Felder divergenzfrei sind, besteht auch keine Vertikalbewegung. Es ist also notwendig, die Barotropie aufzugeben und die Berechnungen für ein baroklines Massenfild bei Verwendung des quasigeostrophischen Windes durchzuführen.

Hollmann (1) benutzte ein kartesisches Koordinatensystem mit p (Luftdruck) als dritte Variable. Dies führt unter Berücksichtigung des Guldberg-Mohn'schen Reibungsansatzes, sowie der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters auf eine Integro-Differentialgleichung für das Geopotentialfeld. Als Lösung (Gl. [89]) gibt der Autor ein partikuläres Integral mit zellulärem Bodendruckfeld und einem in der Höhe zusätzlich meridional überlagerten Gefälle an (Stationaritätsbedingung). Er berücksichtigt weiterhin ein am Boden nach Westen verschobenes Temperaturmaximum.

In Analogie zur physikalischen Arbeitsmethodik lesen wir in der Einleitung des III. Bandes der gesammelten Werke von H. Hertz: „Das Verfahren, dessen

wir uns zur Ableitung des Zukünftigen aus dem Vergangenen und damit zur Erlangung der erstrebten Voraussicht stets bedienen ist dieses. Wir machen uns innere Schaubilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien, von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.“

Da der Hollmannsche Lösungsansatz zur modellmäßigen Betrachtung in Übereinstimmung mit den Erfahrungstatsachen nicht ausreicht, wurde von mir ein weiterer Lösungsansatz (Gl. [8] bzw. [78]), der auch ein gegenläufiges meridionales, sowie zonales Temperaturgefälle berücksichtigt, angesetzt. Er enthält weiterhin einen Parameter ξ , so daß wir ohne Schwierigkeiten in der Lage sind, unser Modell den wahren Verhältnissen besser anzupassen; da von dieser Maßzahl die Höhe der Extremschicht, sowie die Nullstelle der Vertikalzirkulation und andere Größen des Wärme- und Massenhaushaltes abhängig sind. Im Gegensatz zur Hollmannschen Untersuchung werden wir das Hauptgewicht auf eine numerische Auswertung der im Kapitel 2 durchgeführten Theorie legen. Es soll damit eine engere Verbindung zur Synoptik hergestellt werden. Wir werden also Modelle berechnen, sie graphisch darstellen und diskutieren, wobei wir auf eine Reihe von Problemen stoßen, die noch einer späteren Klärung bedürfen.

1.2. Terminologie

Symbol	Bedeutung der Symbole	Größenordnung	Dimension
x, y, z	Raumkoordinaten	—	m
p	Luftdruck (p_0 — Luftdruck am Boden, der mit 1000 mb angenommen wird)	10^8	$g\ m^{-1}sec^{-2}$
v_x, v_y	Geschwindigkeitskomponenten	$0 - \pm 30.0$	$m\ sec^{-1}$
$v_z(x, y, p, m, \xi)$	Vertikalbewegung	$0 - \pm 0.01$ (Abb. 13, 14)	$m\ sec^{-1}$
ρ	Luftdichte	10^3	$g\ m^{-3}$
ρv_z	vertikaler Massentransport	$0 - \pm 10.0$	$g\ m^{-2}sec^{-1}$
$\frac{d v_x}{d x} + \frac{d v_y}{d y} = \text{div } v$	Divergenz der reibungsfreien Bewegung	10^6 (Abb. 10, 11)	sec^{-1}
$H = g z$	Geopotential (der Isobarenflächen mit g als Schwerebeschleunigung und z als Höhe)	$0 - \infty$	$10^2 m^2 sec^{-2}$
$\frac{d^2}{d x^2} + \frac{d^2}{d y^2} = \Delta$	zweidimensionaler Laplaceoperator		m^{-2}
$f_i, f_0 = 2 \omega \sin \varphi_0$	Coriolisparameter (mit ω als Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und φ_0 als mittlere geographische Breite)	10^{-4}	sec^{-1}
$\frac{\partial f}{\partial y} = \beta = \frac{2 \omega \cos \varphi_0}{r}$	Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters (mit r als Erdradius)	15.7×10^{-12}	$m^{-1}sec^{-1}$

Symbol	Bedeutung der Symbole	Größenordnung	Dimension
$\alpha = \frac{\pi}{a}$ } $\gamma = \frac{\pi}{b}$ }	mit a (bzw. b) als Linearausdehnung der Druckgebilde in der x- (bzw. y-) Richtung. Für quadratisch-zelluläre Druckgebilde setzen wir $a = b = 3000$ km	1.048×10^{-6}	m ⁻¹
$L = (\rho v_z) p_h$	Vertikaler Massentransport im Kern der Antizyklone in der Reibungshöhe p_h	4.0	g m ⁻² sec ⁻¹
$\bar{H}(p)$	Mittlere Höhe der Hauptisobarenflächen	0 — ∞ (Tab. 4)	10 ³ m ² sec ⁻²
m	Koeffizient der Temperaturstörung	10 ⁻⁵	m ³ g ⁻¹
ξ	Ein dimensionaler Parameter (Maßzahl)	0.70 — 1.0	—
$k(m, \xi)$	Koeffizient des meridionalen Temperaturgefälles	10 ⁻¹²	m ² g ⁻¹
$\xi(p) = \frac{p_0 - p}{p_0}$	Lineare Druckfunktion	0 — 1.0	—
$\alpha \sigma(m, \xi)$	Phase der Temperaturwelle	0 — 90° (Tab. 2, 3 Abb. 1)	—
C	Amplitude der stationären Bodendruckzelle (1000 mb-Fläche)	10	10 ³ m ² sec ⁻²
$A(p, m, \xi)$	Amplitude des Höhendruckfeldes in der x,p-Fläche	10 — 50 (Abb. 2)	10 ³ m ² sec ⁻²
$\psi(p, m, \xi)$	Phase der Druckwelle	0 — 90° (Abb. 3)	—
T_0	Mittlere Bodentemperatur	282,0	grad K
$\bar{\gamma}$	Vertikaler Temperaturgradient	0.6×10^{-3}	grad m ⁻¹
R	Gaskonstante für trockene Luft	2.87×10^3	m ² sec ⁻² grad ⁻¹
$\bar{T}(p)$	Mitteltemperatur der Hauptisobarenflächen	282.0 — 216.9 (Tab. 4)	grad K
$\frac{R \bar{\gamma}}{g}$	Polytropenexponent	17.6×10^{-2}	—
$T(x, y, p, m, \xi)$	Das räumliche Temperaturfeld	(Abb. 6 — 8)	grad
c_p	Spezifische Wärme bei konstantem Druck	0.24	cal g ⁻¹ grad ⁻¹
$\Gamma = \frac{A g}{c_p}$	Trockenadiabatischer Temperaturgradient (mit $A = 2,3887 \times 10^{-4}$ [cal m ⁻² g ⁻¹ sec ⁻²] dem Wärmeäquivalent der Arbeit)	0.98×10^{-2}	grad m ⁻¹
$\frac{dQ}{dt}(x, y, p, m, \xi)$	Ergiebigkeit der Wärmequellen	0 — $\pm 30.0 \times 10^{-6}$ (Abb. 15, 16)	cal g ⁻¹ sec ⁻¹

2. Durchführung der Theorie

2.1. Die Differentialgleichung des Druckfeldes mit Bodenreibung

Als Ausgangspunkt unseres erstrebten Schaubildes greifen wir auf die bereits von G. Hollmann (1) abgeleitete Integro-Differentialgleichung zurück. Wir werden sie der Vollständigkeit wegen noch einmal in aller Kürze entwickeln.

Mit den unabhängigen Variablen x, y und p (x -Achse $\rightarrow E$, y -Achse $\rightarrow N$, p = Luftdruck) erhält man nach Integration der Kontinuitätsgleichung bei Stationarität (1)

$$g \frac{\partial \rho v_z}{\partial p} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad [1]$$

über den reibungsfreien Teil der Atmosphäre

$$-(\rho v_z)_{p_h} = \frac{1}{g} \int_{p_h}^0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dp \quad [2]$$

mit $(\rho v_z)_{p_h}$ dem vertikalen Massenfluß an der Obergrenze der Reibungsschicht.

Bei Verwendung der z -Koordinate folgt mit dem Gulberg-Mohn'schen Reibungsansatz ¹⁾ für

$$\begin{aligned} \rho v_x &= - \frac{f}{f^2 + \lambda^2} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\lambda}{f^2 + \lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho v_y &= \frac{f}{f^2 + \lambda^2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\lambda}{f^2 + \lambda^2} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad [3]$$

wodurch wir mit der Kontinuitätsgleichung (xyz -Raum) nach erfolgter Integration im stationären Fall $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$ für

$$(\rho v_z)_z = - \Delta H_0 \int_{p_0}^{p_h} \frac{1}{g} \left(\frac{\lambda}{f^2 + \lambda^2} \right) dp^2 \quad [4]$$

oder

$$(\rho v_z)_{p_h} = z \Delta H_0 (1) \quad [5]$$

mit $z = \frac{1}{g} \int_{p_0}^{p_h} \frac{\lambda}{f^2 + \lambda^2} dp$ als Vertikalbewegung in der Reibungshöhe, erhalten. Dabei wurde in erster Näherung für $\frac{\Delta p}{\rho} = \Delta H = \Delta H_0$ gesetzt, was besagt, daß $\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$ innerhalb der Reibungsschicht von der Höhe unabhängig sein soll.

Mit dem Wind erster Näherung folgt aus [2] mit [5]

$$z \Delta H_0 = \int_{p_h}^0 \left\{ \frac{\beta}{f_0^2 g} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{f_0^2 g} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Delta H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Delta H}{\partial x} \right) \right\} dp \quad [6]$$

und wegen allzu geringer Erstreckung der Reibungsschicht ($p_0 - p_h \ll p_0$)

$$z \Delta H_0 = \int_{p_0}^0 \left\{ \frac{\beta}{f_0^2 g} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{f_0^2 g} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Delta H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Delta H}{\partial x} \right) \right\} dp \quad [7]$$

$$A(p, m, \xi) = \sqrt{m^2 p_0^2 \sin^2 \left\{ \xi \pi \zeta(p) \right\} + 2 m p_0 \sin \left\{ \xi \pi \zeta(p) \right\} \cos(\sigma \alpha) C + C^2} \quad [10]$$

und der Phase der Druckwelle

$$\psi(p, m, \xi) = \arctg \left\{ \frac{m p_0 \sin \left\{ \xi \pi \zeta(p) \right\}}{m p_0 \sin \left\{ \xi \pi \zeta(p) \right\} \cos(\sigma \alpha) + C} \right\} \quad \text{mit } \zeta(p) = \frac{p_0 - p}{p_0} \quad [11]$$

¹⁾ Obwohl der empirische Nachweis der Zulässigkeit fehlt — dieser Ansatz hat nur noch historische Bedeutung (H. Erte! : Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie. 1936, S. 90) — möchten wir ihn als Arbeitshypothese gewertet wissen, die an der Erfahrung geprüft werden soll.

²⁾ Innerhalb der Reibungsschicht wird die Höhenabhängigkeit von ΔH vernachlässigt ($\Delta H_0 = \Delta H$); vgl. (1), S. 22 Gl. [84]; [85].

mit $\kappa \Delta H_0 = -L \cos(ax) \cos(\gamma y)$ dem vertikalen Massenfluß in der Reibungshöhe p_h , wenn wir am Boden ein zelluläres Druckfeld annehmen (vgl. (1)).

2.2. Ein partikuläres Integral der Differentialgleichung

Für die vorgelegte Differentialgleichung [7] existieren verschiedene Lösungsansätze, wobei es uns nun darauf ankommen soll, eine Lösung zu finden, die die wahren Verhältnisse der Atmosphäre in möglichst vollkommener Übereinstimmung in analytischer Form angibt. Sie soll

- a) die Umkehr des zonalen und meridionalen Temperaturgradienten beim Übergang von der Troposphäre zur Stratosphäre,
- b) eine für warme (kalte) Hochdruckgebiete verschobene Temperaturphase¹⁾,
- c) die Neigung des Druckmaximums als Funktion des Luftdruckes,
- d) die von Palmén (12) auf empirischem Wege gefundene Gegenläufigkeit der Vertikalbewegung enthalten.

Letztes folgt, wie schon Hollmann gezeigt hat, aus einem in die Rechnung mit einbezogenen gegenläufigen meridionalen Temperaturgefälle, während die Achsenneigung des Druckmaximums auf die Temperatursymmetrie der Druckgebilde als Folgeerscheinung einer allgemeinen Luftversetzung in den verschiedenen Quadranten einer Antizyklone (13) zurückgeführt werden kann.

Um diesen Forderungen gerecht zu werden, setzen wir als Lösung der Gl. [7]

$$\begin{aligned} H(x, y, p, m, \xi) &= \bar{H}(p) - f(m, \xi) p_0 \sin \left[\xi \pi \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right) \right] y + \\ &+ m p_0 \sin \left[\xi \pi \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right) \right] \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) + \\ &+ C \cos(\alpha x) \cos(\gamma y) \end{aligned} \quad [8]$$

an. Das Geopotential ist nunmehr eine Funktion der Raumkoordinaten (x, y, p), der Amplitude der Temperaturstörung (m) und eines dimensionslosen Parameters (ξ). Die physikalische Bedeutung dieses Parameters werden wir im Abschnitt 3 dieser Arbeit näher darlegen. Es sei hier nur darauf hingewiesen, daß die Einführung dieser Größe das in analytischer Form gegebene Modell hinsichtlich seines Massenhaushaltes beweglicher gestaltet. Die Lösung enthält außerdem die Gegenläufigkeit des zonalen sowie des meridionalen Temperaturgradienten und weist eine im Raum geneigte Achse der Druckgebilde auf.

In kürzerer Form schreiben wir für [8]

$$H(x, y, p, m, \xi) = \bar{H}(p) - f(m, \xi) p_0 \sin \left\{ \xi \pi \zeta(p) \right\} y + A(p, m, \xi) \cos(\alpha x + \psi) \cos(\gamma y) \quad [9]$$

mit der Amplitude des Höhendruckfeldes in der x, p -Ebene

Mit der Bestimmung des Koeffizienten der meridionalen Temperaturverteilung $k(m, \xi)$ und der Temperaturphase $\alpha \sigma(m, \xi)$ weisen wir nach, daß der Ansatz [8] eine Lösung der abgeleiteten Integro-Differential-

¹⁾ : Gl. [8] gilt ebenso zur Untersuchung stationärer Zyklonen.

gleichung ist. Wir setzen also [8] in [7] ein und erhalten nach erfolgter Integration die beiden Bestimmungs-
gleichungen:

$$\alpha \beta \frac{m p_0^2 \cos(\alpha \sigma(m, \xi))}{\xi f_0^2 g \pi} \left\{ 1 - \cos(\xi \pi) \right\} + \frac{\alpha \beta C p_0}{f_0^2 g} - \alpha \frac{(\alpha^2 + \gamma^2) m p_0^3}{2 f_0^3 g} \left\{ 1 - \frac{\sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi)}{\pi \xi} \right\} \ell(m, \xi) \cos(\alpha \sigma) - \frac{\alpha (\alpha^2 + \gamma^2) C \ell(m, \xi) p_0^2}{\xi f_0^3 g \pi} \left\{ 1 - \cos(\xi \pi) \right\} = 0 \quad [12]$$

und

$$\frac{\alpha \beta m p_0^2 \sin \alpha \sigma(m, \xi)}{\xi f_0^2 g \pi} \left\{ 1 - \cos(\xi \pi) \right\} - \frac{\alpha (\alpha^2 + \gamma^2) m p_0^3}{2 f_0^3 g} \left\{ 1 - \frac{\sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi)}{\pi \xi} \right\} \ell(m, \xi) \sin \alpha \sigma + L = 0 \quad [13]$$

mit den beiden Lösungen

$$\ell(m, \xi) = \frac{[\alpha \beta m p_0^2 \{1 - \cos(\xi \pi)\} \sin(\alpha \sigma(m, \xi)) + L \xi f_0^2 g \pi] 2 f_0}{[\alpha (\alpha^2 + \gamma^2) m p_0^3 \{ \pi \xi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi) \}] \sin(\alpha \sigma(m, \xi))} \quad [14]$$

und

$$\alpha \sigma(m, \xi) = \arcsin \left\{ \frac{2 C \{1 - \cos(\xi \pi)\}}{m p_0 \sqrt{[\pi \xi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi)]^2 + \frac{\alpha^2 \beta^2 C^2 p_0^2}{f_0^4 g^2 L^2} \left[\{ \xi \pi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi) \} - \frac{2 \{1 - \cos(\xi \pi)\}^2}{\pi \xi} \right]^2}} \right\} + \arcsin \left\{ \frac{f_0^2 g L \{ \pi \xi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi) \}}{\alpha \beta C p_0 \left[\pi \xi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi) - \frac{2 \{1 - \cos(\xi \pi)\}^2}{\pi \xi} \right]} \right\} \quad [15]$$

Aus Gl. [15] geht hervor, daß $\alpha \sigma(m, \xi)$ und damit auch $\psi(p, m, \xi)$ nach Gl. [11] für alle Werte von

$$m(\xi) = - \frac{A(\xi)}{\sin \arctg B(\xi)} \quad [16]$$

mit

$$A(\xi) = \frac{2 C \{1 - \cos(\xi \pi)\}}{p_0 [\pi \xi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi)] \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 \beta^2 C^2 p_0^2}{f_0^4 g^2 L^2} \left[1 - \frac{2 \{1 - \cos(\xi \pi)\}^2}{\pi \xi [\pi \xi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi)]} \right]^2}} \quad [17]$$

und

$$B(\xi) = \frac{f_0^2 g L}{\alpha \beta C p_0 \left[1 - \frac{2 \{1 - \cos(\xi \pi)\}^2}{\pi \xi [\pi \xi - \sin(\xi \pi) \cos(\xi \pi)]} \right]} \quad [18]$$

verschwindet. Der Koeffizient $k(m, \xi)$ wächst dann über alle Grenzen. Daraus folgt, daß stationäre Antizyklonen mit senkrechter Achse aus unserem Lösungsansatz [8] nicht ableitbar sind. Sie sind offenbar nur dann stationär, wenn die Temperaturphase $\alpha \sigma(m, \xi)$ und der vertikale Massentransport infolge Reibung (q_{v2}) p_h im Kern der Hochdruckgebiete identisch verschwinden. Dies ist aus Gl. [8] für $\alpha \sigma(m, \xi) = 0$ ableitbar.

Mit der Einführung des Koeffizienten m gelingt uns eine getrennte Betrachtung stationärer Antizyklonen. Setzen wir $m > 0$, so liegen die Hauptisobarenflächen weit auseinander. Das betrachtete Hochdruckgebiet ist warm. Für $m < 0$ folgt das Gegenteil. Wir sprechen dann von kalten Hochdruckgebieten. In der Hauptsache wollen wir uns in dieser Arbeit mit der Struktur warmer Antizyklonen befassen. Es sei jedoch vermerkt, daß der Aufbau kalter Hochdruckgebiete komplizierter ist, obwohl die Interpretation solcher auf keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten stößt. Ich verzichte auf eine ausführliche Besprechung, da sie den Umfang der vorliegenden Arbeit wesentlich erweitern würde und halte es für angebracht, kalte stationäre Antizyklonen einer weiteren getrennten modellmäßigen Betrachtung zu unterziehen.

Für $\alpha \sigma \neq 0$ — also Hochdruckgebiete mit verschobener Temperaturphase — existiert entsprechend auch eine Achsenneigung $\psi(m, p, \xi)$. Sie ist im wesentlichen eine Funktion der Temperaturstörung m . Am Boden ($p = p_0$) erhalten wir unabhängig von m aus Gl. [11] $\psi(p_0, m, \xi) = 0$. Setzen wir vorübergehend, nur zur

Diskussion der Gleichung [8], $\xi = 1,0$; $mp_0 = \mu C$ und $p = p_0/2$ — betrachten also die Lage des Druckmaximums im 500-mb-Niveau — so geht Gl. [11] über in

$$\psi\left(\frac{p_0}{2}, \mu\right) = \arcsin \left\{ \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha \sigma + \frac{1}{\mu \sin \alpha \sigma}} \right\} \quad [19]$$

Die Achsenneigung ist nun nur noch vom Vorzeichen des Koeffizienten μ abhängig. Um mit der Erfahrung in Übereinstimmung zu bleiben, soll das Temperaturmaximum höchstens um eine viertel Wellenlänge vom Bodendruckmaximum entfernt liegen. Für $\alpha \sigma(m, \xi)$ kommen also nur Werte im Bereich $0 < \alpha \sigma < \pi/2$ in Frage. Wie später noch gezeigt werden soll, wird $\alpha \sigma(m, \xi)$ für kalte Antizyklonen sehr kleine Werte annehmen, so daß der Faktor $\frac{1}{\mu \sin \alpha \sigma}$ bis 850 mb negativ und absolut betrachtet größer ist als $\operatorname{ctg} \alpha \sigma$. Damit wird $\psi(p, m, \xi)$ kleiner null d. h., daß die Achse kalter Antizyklonen bis etwa 2 km Höhe nach Osten geneigt ist. Die Amplitude nimmt gleichzeitig bis zu dieser Höhe stark ab. Das kalte Bodenhoch löst sich auf. In größeren Höhen finden wir jedoch wieder ein Druckmaximum westlich der Bodenantizyklone mit einem zugehörigen Kältezentrum auf seiner Vorderseite. Bezüglich der Temperaturphase wäre noch zu vermerken, daß nach Gl. [15] keine brauchbare Lösung im Bereich

$$- \frac{A(\xi)}{\sin \arctg B(\xi)} < m < 1,0$$

existiert (Abb. 1).

Aus der soeben durchgeführten Betrachtung folgt, daß warme (kalte) stationäre Antizyklogen eine im Raume nach Westen (Osten) gekrümmte Achse aufweisen, wobei sich das Druckmaximum der kalten Antizyklone rasch auflöst und über 2 km Höhe nicht mehr auffindbar ist. Das zugehörige Temperaturmaximum liegt bei warmen (kalten) Hochdruckgebieten immer westlich (ostwärts) des Druckmaximums.

Aus Gl. [8] ist ersichtlich, daß $\bar{H}(p)$ das Geopotential an den Stellen

$$\begin{aligned} x = 0, \quad \xi p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p)) y + \\ + \{ m p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha \sigma + C \} \cos(\gamma y) = 0 \quad [20] \\ y = 0, \quad x = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{m p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha \sigma + C}{m p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p)) \sin \alpha \sigma} \right\} \end{aligned}$$

oder für $p = p_0$ an den Orten

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y = \pm \frac{\pi}{2\gamma} = \pm 3/2 \quad (\gamma = \pi/3) \\ y = 0, \quad x = \pm \frac{\pi}{2\alpha} = \pm 3/2 \quad (\alpha = \pi/3) \end{aligned} \quad [21]$$

bedeutet. An diesen Stellen nehmen wir einen höhenunabhängigen vertikalen Temperaturgradienten γ an. Wir sind damit in der Lage, nach der polytropen Höhenformel

$$\bar{T}(p) = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} \quad [22]$$

mit $\bar{T}(p) = T_0 - \bar{\gamma}z$ und $\frac{\partial T}{\partial z} = -\bar{\gamma}$ das mittlere Geopotential nach der Formel

$$\bar{H}_1(p) = \frac{g T_0}{\gamma} \left\{ 1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} \right\} \quad [23]$$

$$a) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\alpha m p \pi \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \sin \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y)$$

$$b) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\ell(m, \xi) \pi p \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) - \frac{\alpha m p \pi \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \sin(\gamma y)$$

$$\begin{aligned} c) \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{T_0 R \bar{\gamma}}{p g} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} - \frac{\ell(m, \xi) \pi \xi y}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) - \frac{\ell(m, \xi) \pi^2 \xi^2 p y}{R p_0} \sin(\xi \pi \zeta(p)) + \\ + \frac{m \pi \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) + \frac{m \pi^2 \xi^2 p}{R p_0} \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \end{aligned}$$

Wir integrieren [28a] nach x und differenzieren nach y , wodurch wir

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\alpha m p \pi \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \sin(\gamma y) + \frac{\partial s}{\partial y}(p, \xi, y) \quad [29]$$

mit der willkürlichen Funktion $\frac{\partial s}{\partial y}$ und mit [28b] für

$$\frac{\partial s}{\partial y}(p, \xi, y) = -\frac{\ell(m, \xi) \pi p \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \quad [30]$$

erhalten.

Aus [28a], [28b], [29] und [30] gewinnen wir die noch unvollständige Lösung für das Temperaturfeld in der Form

$$\begin{aligned} T^*(x, y, p, m, \xi) = \frac{m \pi p \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) - \\ - \frac{\ell(m, \xi) \pi p \xi}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) y. \end{aligned} \quad [31]$$

Diese differenzieren wir nach p , wodurch wir als vollständige Lösung der exakten Differentialgleichung mit [28c] nach Integration über p für das Temperaturfeld

zu berechnen. Es bereitet nunmehr keine Schwierigkeiten, die absoluten Topographien für jede Hauptisobarenfläche exakt zu berechnen, was im Teil 3 der vorliegenden Arbeit für meteorologisch sinnvolle Werte der Parameter m und ξ geschehen ist, wobei die Gl. [22] und [23] im Bereich $p_0 > p > 0,225 p_0$ für eine warme Antizyklone und im Bereich $p_0 > p > 0,275 p_0$ für eine kalte Antizyklone Gültigkeit besitzen. Um den Verhältnissen in der Stratosphäre gerecht zu werden, berechnen wir dort das Geopotential nach der Gleichung

$$\bar{H}_2(p) = \frac{g T_0}{\gamma} \left[1 - \left\{ 1 - \frac{\bar{\gamma} R}{g} \ln \left(\frac{p'}{p} \right) \right\} \left(\frac{p'}{p_0} \right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} \right] \quad [24]$$

mit $p' = 0,225 p_0$ (bzw. $p' = 0,275 p_0$) und $p < 0,225 (0,275) p_0$.

2.3. Das Temperatur- und Dichtefeld

Das Temperaturfeld berechnen wir aus der exakten Differentialgleichung

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial p} dp, \quad [25]$$

da die Faktoren $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial p}$ durch unseren Lösungsansatz [8] wegen der Gasgleichung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R T}{p} \quad [26]$$

und der statischen Grundgleichung in der Form

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial H}{\partial p} \quad [27]$$

gegeben sind. Wir finden für

$$\begin{aligned} T(x, y, p, m, \xi) = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} - \frac{\ell(m, \xi) \pi \xi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) y + \\ + \frac{m \pi \xi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \end{aligned} \quad [32]$$

berechnen. Gl. [32] besagt, daß für $m > 0$ ($m < 0$) die Westseite der Antizyklone im troposphärischen Raum wärmer (kälter) ist als ihre Ostseite. Für $m \geq 0$ folgt stets eine Temperaturabnahme in der Schicht

$$p_0 > p > p_0 \left(1 - \frac{1}{2\xi} \right) \text{ (Troposphäre)} \quad [33]$$

nach Norden. Die horizontalen Temperaturgradienten zeigen dagegen in der Schicht

$$p_0 \left(1 - \frac{1}{2\xi} \right) > p > 0 \text{ (Stratosphäre)} \quad [34]$$

eine Umkehr, so daß eine warme (kalte) Antizyklone mit einem Kältegebiet (Wärmegebiet) in der Stratosphäre gekoppelt ist.

Am Boden reduziert sich [32] auf

$$T(x, y, p_0, m, \xi) = T_0 - \frac{f(m, \xi) \pi \xi p_0}{R} y + \frac{m \pi \xi p_0}{R} \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \quad [35]$$

mit

$$\frac{f(m, \xi) \pi p_0 \xi}{R} y, \text{ dem planetarischen Anteil,}$$

und

$$\frac{m \pi p_0 \xi}{R} \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \text{ einem Störungsanteil der Temperaturverteilung,}$$

während wir im Kern der Antizyklone für die vertikale Temperaturverteilung

$$T(o, o, p, m, \xi) = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} + \frac{m \pi \xi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos(\alpha \sigma(m, \xi)) \quad [36]$$

erhalten.

Es läßt sich weiterhin zeigen, daß der vertikale Temperaturgradient nicht überall gleich ist. Aus der statischen Grundgleichung in der Form

$$\frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{g p}{R T} \frac{\partial T}{\partial p} \quad [37]$$

ergibt sich mit [28c] und [32]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, p, m, \xi) = & - \frac{T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} \bar{\gamma} - \frac{f(m, \xi) \pi \xi g p y}{R^2} \cos(\xi \pi \zeta(p)) - \frac{f(m, \xi) \pi^2 \xi^2 p^2 g}{R^2 p_0} \sin(\xi \pi \zeta(p)) y +}{T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} - \frac{f(m, \xi) \pi \xi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) y +} \\ & + \frac{m \pi \xi g p}{R^2} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) + \frac{m \pi^2 \xi^2 g p^2}{R^2 p_0} \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \\ & \frac{m \xi \pi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \end{aligned} \quad [38]$$

Im Zentrum erhalten wir aus [38]

$$\frac{\partial T}{\partial z}(o, o, p, m, \xi) = - \frac{T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} \bar{\gamma} + \frac{m \pi \xi g p}{R^2} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha \sigma + \frac{m \pi^2 \xi^2 g p^2}{R^2 p_0} \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha \sigma}{T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} + \frac{m \pi \xi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha \sigma} \quad [39]$$

An dieser Stelle berechnen wir für ein ganz bestimmtes Wertepaar von m und ξ einen höhenunabhängigen vertikalen Temperaturgradienten $\bar{\gamma}$. Diese Forderung wird für alle Werte von $\alpha \sigma = \frac{\pi}{2}$, d. h.

$$m(\xi) = \frac{A(\xi)}{\sin \left[\frac{\pi}{2} - \arctg B(\xi) \right]} \quad [40]$$

mit [17] und [18] erfüllt. Es sei insbesondere an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß sich mit dem Lösungsansatz [8] in diesem Modell keine Temperaturumkehrschichten verifizieren lassen. Um der Konstanz der Temperatur in der Stratosphäre gerecht zu werden, ist es erforderlich, $\bar{T}(p)$ für warme (kalte) Antizyklonen nach [19] für $p < 225$ mb ($p < 275$ mb) konstant zu halten.

Da es sich um eine barokline Atmosphäre handelt, sind wir gezwungen, das Dichtefeld zur Bestimmung der Vertikalbewegung für alle Punkte von x und y zu berechnen. Dazu benutzen wir entweder Gl. [26] oder Gl. [27]. Gl. [27] führt mit [8] unter Berücksichtigung von [23] (bzw. von [24] für eine isotherme Stratosphäre) auf

$$\frac{1}{\rho}(x, y, p, m, \xi) = \frac{R T_0}{p} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} - f(m, \xi) \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) y + \frac{m \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y)}{[41]}$$

bzw. auf

$$\frac{1}{\rho}(x, y, p, m, \xi) = \frac{R}{p} \bar{T}(0, 225 p_0) - f(m, \xi) \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) y + \frac{m \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y)}{[42]}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Delta H}{\partial x} = - 2 \alpha^3 A(p, m, \xi) [f(m, \xi) p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p)) + \alpha A(p, m, \xi) \cos(\alpha x + \psi(p, m, \xi)) \sin(\alpha y) \times \times \sin(\alpha x + \psi(p, m, \xi)) \cos(\alpha y)] \quad [47]$$

und für

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Delta H}{\partial y} = - 2 \alpha^4 A^2(p, m, \xi) \sin(\alpha x + \psi(p, m, \xi)) \cos(\alpha y) \cos(\alpha x + \psi(p, m, \xi)) \sin(\alpha y) \quad [48]$$

2.4. Das Divergenzfeld

Zur Diskussion des Massenhaushaltes bilden wir die Divergenz des quasigeostrophischen Windes. Zu diesem Zweck benutzen wir die ausführlichen Bewegungsgleichungen im x, y, p -Raum in folgender Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{(v_x^2 + v_y^2)}{2} - v_y \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial H}{\partial x} + f v_y \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{(v_x^2 + v_y^2)}{2} + v_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial H}{\partial y} - f v_x \end{aligned} \quad [43]$$

und setzen die Gleichungen des geostrophischen Windes

$$v_x = - \frac{1}{f_0} \frac{\partial H}{\partial y}, v_y = \frac{1}{f_0} \frac{\partial H}{\partial x} \quad [44]$$

in die linke Seite von [43] ein, wodurch sich als Wind erster Näherung

$$\begin{aligned} v_x &= - \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial y} \left(1 - \frac{\Delta H}{f_0^2} \right) - \frac{1}{2 f_0^3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)^2 \\ v_y &= \frac{1}{f} \frac{\partial H}{\partial x} \left(1 - \frac{\Delta H}{f_0^2} \right) + \frac{1}{2 f_0^3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)^2 \end{aligned} \quad [45]$$

ergibt. Mit [45] erhalten wir für die Divergenz auf den Isobarenflächen

$$\text{div } v = \frac{1}{f_0^3} \left[\left\{ \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \Delta H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \Delta H}{\partial y} \right\} - f_0 \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right]. \quad [46]$$

Dies führt mit [9] bei quadratisch-zellulären Druckgebilden für die einzelnen Glieder auf

sowie für

$$f_0 \beta \frac{\partial H}{\partial x} = -f_0 \alpha \beta A(p, m, \xi) \sin(\alpha x + \psi(p, m, \xi)) \cos(\alpha y) \quad [49]$$

Mit [47], [48] und [49] erhalten wir aus [46]

$$\operatorname{div} v = \frac{\alpha A(p, m, \xi)}{f_0^2} \sin(\alpha x + \psi(p, m, \xi)) \cos(\alpha y) \left[\beta - \frac{2 \alpha^2 f(m, \xi) p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p))}{f_0} \right] \quad [50]$$

Aus [50] folgt im Kern der Antizyklone

$$\operatorname{div} v = \frac{\alpha A(p, m, \xi)}{f_0^2} \sin(\psi(p, m, \xi)) \left[\beta - \frac{2 \alpha^2 f(m, \xi) p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p))}{f_0} \right] \quad [51]$$

für den Meridianschnitt im Zentrum

$$\operatorname{div} v = \frac{\alpha A(p, m, \xi)}{f_0^2} \sin \psi(p, m, \xi) \cos(\alpha y) \left[\beta - \frac{2 \alpha^2 f(m, \xi) p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p))}{f_0} \right] \quad [52]$$

und für den Zonalschnitt

$$\operatorname{div} v = \frac{\alpha A(p, m, \xi)}{f_0^2} \sin(\alpha x + \psi(p, m, \xi)) \left[\beta - \frac{2 \alpha^2 f(m, \xi) p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p))}{f_0} \right] \quad [53]$$

Die Gl. [50] bis [53] besagen, daß die Divergenz für

$$\beta f_0 = 2 \alpha^2 f(m, \xi) p_0 \sin(\xi \pi \zeta(p)) \quad [54]$$

ihr Vorzeichen wechselt. Da die zyklotrischen Funktionen vieldeutig sind, berechnen wir aus Gl. [54] zwei Nullstellen, nämlich:

$$p_1 = \left[1 - \frac{1}{\pi \xi} \arcsin \gamma^* \right] p_0 \text{ für } 0 < \arcsin \gamma^* < \pi/2 \quad [55a]$$

und

$$p_2 = \left[1 - \frac{1}{\pi \xi} \left\{ \pi - \arcsin \gamma^* \right\} \right] p_0 \text{ für } \pi/2 < \pi - \arcsin \gamma^* < \pi \quad [55b]$$

mit $\gamma^* = \frac{\beta f_0}{2 \alpha^2 f p_0}$. Unter p_1 verstehen wir die untere und unter p_2 die obere Nullstelle der Divergenz. Den Koeffizienten ξ erhalten wir aus Gl. [55b] zu

$$\xi = \frac{(\pi - \arcsin \gamma^*) p_0}{(p_0 - p_2) \pi} \quad [56]$$

so daß wir beide Gleichungen zusammenfassen können. Es resultiert daraus

$$p_1 = 2 p_0 - \frac{\pi (p_0 - p_2)}{\pi - \arcsin \gamma^*} - p_2 \quad [57]$$

Mit Gl. [56] haben wir eine gute Möglichkeit, den Parameter ξ näherungsweise zu bestimmen. Da der Koeffizient des planetarischen Temperaturgefälles nur sehr wenig schwankt, setzen wir ihn zur Bestimmung von ξ in γ^* konstant. (Siehe Tab. 3). Im Verlaufe der weiteren Rechnung werden wir immer erst p_2 vorgeben, um dann nach Gl. [57] die untere Nullstelle zu

berechnen. Nehmen wir einmal an, daß die Divergenz an der Grenze der Atmosphäre verschwindet, so erhalten wir aus Gl. [57] für die untere Nullstelle

$$p_1 = \left\{ 2 - \frac{\pi}{\pi - \arcsin \gamma^*} \right\} p_0 \quad [58]$$

mit dem Parameter

$$\xi (p_2 = 0) = \frac{\pi - \arcsin \gamma^*}{\pi} < 1,0. \quad [59]$$

Setzen wir nun für

$$p_2 = \left\{ 1 - \frac{\pi - \arcsin \gamma^*}{\pi} \right\} p_0 \quad [60]$$

so wird $\xi = 1,0$, und wir berechnen die untere Nullstelle zu

$$p_1 = \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \gamma^* \right\} p_0 \quad [61]$$

Ganz allgemein ziehen wir daraus den Schluß, daß auf der Ostseite der Antizyklone im Bereich $p_0 > p > p_1$ positive Divergenz mit Massenabfluß aus der Antizyklone infolge des Breiteneffektes und in der Schicht $p_1 > p > p_2$ negative Divergenz (Konvergenz) mit Massenzufluß wegen des Krümmungseffektes der Isopotentiale stattfindet.

2.5. Das Feld der Vertikalbewegung

Zur Berechnung der Vertikalbewegung benutzen wir Gl. [1] und erhalten mit [8] und [46] nach erfolgter Integration für den vertikalen Massentransport

$$\begin{aligned} \rho v_z = & - \frac{\alpha (\alpha^2 + \gamma^2) m p_0^2 f}{f_0^3 g} \sin \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \left[\frac{p}{2} - \frac{p_0}{2} + \frac{p_0}{2 \xi \pi} \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos(\xi \pi \zeta(p)) \right] - \\ & - \frac{\alpha (\alpha^2 + \gamma^2) C p_0 f}{f_0^3 g} \sin(\alpha x) \cos(\gamma y) \left[\frac{p_0}{\xi \pi} \cos(\xi \pi \zeta(p)) - \frac{p_0}{\pi \xi} \right] + \\ & + \frac{\alpha \beta m p_0}{f_0^2 g} \sin \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \left[\frac{p_0}{\xi \pi} (\cos(\xi \pi \zeta(p)) - p_0) \right] - \\ & - \frac{\alpha \beta C}{f_0^2 g} \sin(\alpha x) \cos(\gamma y) [p_0 - p] - \\ & - L \cos(\alpha x) \cos(\gamma y) \end{aligned} \quad [62]$$

Unter Berücksichtigung von [41] ergibt sich mit [62] für die Vertikalzirkulation bei quadratisch-zellulärem Bodendruckfeld

$$\begin{aligned} V_z = & - \left[A^*(p, m, \xi) \sin(\alpha x) + B^*(p, m, \xi) \right] \left\{ \frac{R T_0}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} - f \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) y + \right. \\ & \left. + m \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\alpha y) \right\} \cos(\alpha y) \end{aligned} \quad [63]$$

mit

$$\begin{aligned}
 A^*(p, m, \xi) = & \frac{2 \alpha^3 p m p_0^2 f \cos(\alpha \sigma)}{2 f_0^3 g} - \frac{2 \alpha^3 m p_0^3 f \cos(\alpha \sigma)}{2 f_0^3 g} + \\
 & + \frac{2 \alpha^3 m p_0^3 f \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos(\alpha \sigma)}{2 f_0^3 \pi \xi g} + \\
 & + \frac{2 \alpha^3 C f p_0^2 \cos(\xi \pi \zeta(p))}{f_0^3 g \pi \xi} - \frac{2 \alpha^3 C f p_0^2}{f_0^3 g \pi \xi} \quad [64] \\
 & - \frac{\alpha \beta m p_0^2 \cos(\alpha \sigma) \cos(\xi \pi \zeta(p))}{f_0^2 g \pi \xi} + \frac{\alpha \beta m p_0^3 \cos(\alpha \sigma)}{f_0^2 g \pi \xi} + \\
 & + \frac{\alpha \beta C p_0}{f_0^2 g} - \frac{\alpha \beta C p}{f_0^2 g}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 B^*(p, m, \xi) = & \frac{2 \alpha^3 p \sin(\alpha \sigma) m p_0^2 f}{2 f_0^3 g} - \frac{2 \alpha^3 m p_0^3 f \sin(\alpha \sigma)}{2 f_0^3 g} + \\
 & + \frac{2 \alpha^3 m p_0^3 f \sin(\alpha \sigma)}{2 f_0^3 g \pi \xi} \sin(\xi \pi \zeta(p)) \cos(\xi \pi \zeta(p)) - [65] \\
 & - \frac{\alpha \beta m p^2 \sin(\alpha \sigma) \cos(\xi \pi \zeta(p))}{f_0^2 g \pi \xi} + \frac{\alpha \beta m p_0^2 \sin(\alpha \sigma)}{f_0^2 g \pi \xi} + L.
 \end{aligned}$$

Vorzeichenbestimmung ist der erste Ausdruck in der eckigen Klammer mit den höhenabhängigen Koeffizienten $A^*(p, m, \xi)$ und $B^*(p, m, \xi)$. Wählen wir positive Werte für m, ξ und x und halten diese Parameter konstant, so folgt aus [63] für die untere Troposphäre bis zu einer bestimmten Höhe $p \mu(\xi)$

$$A^*(p, m, \xi) \sin(\alpha x) + B^*(p, m, \xi) \cos(\alpha x) > 0. \quad [66]$$

Für diese Werte herrscht im unteren Bereich der Antizyklone Absinken. Die Höhe $p \mu(\xi)$, in der die Vertikalzirkulation ihre Vorzeichen wechselt, werden wir im Teil 3 der Arbeit näher untersuchen. Wir erhalten sie, indem wir [56] in [63] einsetzen und diese so gewonnene Beziehung für $v_z = 0$ nach p auflösen. Für $p < p \mu(\xi)$ folgen entsprechend für die Summe der Koeffizienten Werte, die kleiner Null sind. In der Stratosphäre erfolgt ein Auspumpen.

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dt} = c_p \left[\frac{\alpha f \pi \xi C p}{R f_0} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \sin(\alpha x) \cos(\alpha y) - \frac{\alpha^2 m \pi \xi C p}{R f_0} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \sin(\alpha \sigma) \sin(\alpha y) \cos(\alpha y) - \right. \\
 \left. - \left\{ A^*(p, m, \xi) \sin(\alpha x) \cos(\alpha y) + B^*(p, m, \xi) \cos(\alpha x) \cos(\alpha y) \right\} \left[\frac{R T_0}{p} (\Gamma - \bar{\gamma}) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \left\{ f y - m \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\alpha y) \right\} \left\{ \left(\frac{g}{R} - \Gamma \right) \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + \frac{g p \pi^2 \xi^2}{R p_0} \sin(\xi \pi \zeta(p)) \right\} \right] \right] \quad [72]
 \end{aligned}$$

Aus Gl. [72] erhalten wir für den Meridianschnitt durch das Zentrum der Antizyklone

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dt} = -c_p \left[\frac{\alpha^2 m \pi \xi C p}{R f_0} \sin(\alpha \sigma) \cos(\xi \pi \zeta(p)) \sin(\alpha y) + B^*(p, m, \xi) \pi \xi \left\{ f y - \right. \right. \\
 \left. \left. - m \cos(\alpha \sigma) \cos(\alpha y) \right\} \sqrt{\left(\frac{g}{R} - \Gamma \right)^2 + \frac{g^2 p^2 \pi^2 \xi^2}{R^2 p_0^2}} \cos \left\{ \xi \pi \zeta(p) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \arctan \left(\frac{\pi \xi}{1 - \frac{R \Gamma}{p_0}} \right) \right\} + \frac{R T_0}{p} (\Gamma - \bar{\gamma}) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} \right] \quad [73]
 \end{aligned}$$

für einen Zonalschnitt

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dt} = c_p \left[\frac{\alpha f \pi \xi C p}{R f_0} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \sin(\alpha x) - \left\{ A^*(p, m, \xi) \sin(\alpha x) + \right. \right. \\
 \left. \left. + B^*(p, m, \xi) \cos(\alpha x) \right\} \left[\frac{R T_0}{p} (\Gamma - \bar{\gamma}) \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} - \right. \right. \\
 \left. \left. - m \pi \xi \cos \alpha (x + \sigma) \right\} \sqrt{\left(\frac{g}{R} - \Gamma \right)^2 + \frac{g^2 p^2 \pi^2 \xi^2}{R^2 p_0^2}} \cos \left\{ (\xi \pi \zeta(p)) - \arctan \left(\frac{\pi \xi}{1 - \frac{R \Gamma}{p_0}} \right) \right\} \right] \quad [74]
 \end{aligned}$$

Um die Verhältnisse in der Vertikalen zu veranschaulichen, berechnen wir aus [63] für den vertikalen Meridianschnitt

$$\begin{aligned}
 v_z = -B^* \cos(\alpha y) \left\{ \frac{R T_0}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} - f \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) y + \right. \\
 \left. + m \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos(\alpha \sigma) \cos(\alpha y) \right\} \quad [67]
 \end{aligned}$$

und im Kern der Antizyklone

$$v_z = -B^* \left\{ \frac{R T_0}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R \bar{\gamma}}{g}} + m \pi \xi \cos(\xi \pi \zeta(p)) \cos(\alpha \sigma) \right\} \quad [68]$$

woraus wir für $p = p_0$ gemäß Voraussetzung auf

$$e v_z = -L = (e v_z) p_h \quad [69]$$

kommen.

2.6 Die Wärmequellen

Um die Verteilung der Wärmequellen in einer Antizyklone zu berechnen, gehen wir vom 1. Hauptsatz

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{A dp}{e dt} \quad [70]$$

aus. Wir entwickeln den individuellen Operator im x, y, p, t -Koordinatensystem, was unter Vernachlässigung der Glieder mit

$$v_x \frac{\partial H}{\partial x} + v_y \frac{\partial H}{\partial y}$$

und unter Benutzung der statischen Grundgleichung, sowie der Gasgleichung im stationären Fall auf

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ}{dt} = -c_p \left\{ \frac{p}{R f_0} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial p} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right) + \right. \\
 \left. + \left(\frac{g}{R} - \Gamma \right) v_z - \frac{g p}{R} \frac{\partial^3 H}{d p^3} e v_z \right\} \quad [71]
 \end{aligned}$$

führt.

Gl. [71] führt mit [8], [23] und [63] für die räumliche Verteilung der Wärmequellen bei quadratisch-zellulären Druckfeldern auf

und für die vertikale Verteilung der Wärmequellen und -senken an der Stelle $x = y = 0$, also über dem Zentrum der Antizyklone

$$\frac{dQ}{dt} = -c_p \frac{RT_0}{p} B^*(p, m, \xi) (T - \bar{\gamma}) \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} + c_p m \pi \xi B^*(p, m, \xi) \times \quad [75]$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{g}{R} - T\right)^2 + \frac{g^2 p^3 \pi^2 \xi^2}{R^2 p_0^3}} \cos \left\{ \xi \pi \xi(p) - \arctg \left(\frac{\pi \xi}{1 - \frac{R T}{g}} \frac{p}{p_0} \right) \right\} \cos(\alpha \sigma).$$

Da bei der Berechnung der Gebiete mit Wärmeaufnahme bzw. -abgabe das Geopotential eine Funktion des Druckes ist, setzen wir für $p < 0,225 p_0$ (bzw. bei einer kalten stationären Antizyklone für $p < 0,275 p_0$) in den Gleichungen [69], [70] und [71] $\bar{\gamma} = 0$ und $T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} = \bar{T}(0,225 p_0)$ (bzw. $= \bar{T}(0,275 p_0)$) aus Tab. 4.

3. Numerische Beispiele des analytischen Modells

3.1. Die Temperaturphase als Funktion des Koeffizienten m und ihre Bedeutung für die Amplitude des Höhendruckfeldes, sowie die Achsenneigung des Druckmaximums

Es bereitet nunmehr keine Schwierigkeit, die im Teil 2 der vorliegenden Arbeit abgeleiteten Gleichungen für

- a) die absoluten Topographien als Lösung der vorgelegten Differentialgleichung,
- b) das Temperaturfeld,
- c) das Divergenzfeld,
- d) das Feld der Vertikalbewegung,
- e) die Verteilung der Wärmequellen und -senken

als Funktion der Raumkoordinaten x, y, p und der Parameter m und ξ numerisch auszuwerten. Dabei müssen wir dem Koeffizienten m besondere Beachtung schenken, da von ihm alle Größen, insbesondere aber das Temperaturfeld und damit die Verteilung der Wärmequellen abhängig sind.

Um uns einen rohen Überblick über den Temperaturgradienten

$$\frac{\partial T}{\partial n}(0, 0, p, m, \xi) = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2}$$

im Zentrum der Antizyklone zu verschaffen, wurden zunächst einmal die Temperaturphase $\alpha \sigma(m, \xi)$ und die Temperaturgradienten als Funktion von m bei konstantem Parameter $\xi = 0,8$ berechnet. Diese Abhängigkeit zeigt Tab. 1.

Tab. 1

$m \times 10^{-5}$	$\alpha \sigma(m, \xi)$	$\frac{\partial T}{\partial n} \left\{ \begin{matrix} p=p_0 \\ x=y=0 \end{matrix} \right\}$
2,0	93° 52' 02"	20,32
3,0	82° 28' 48"	28,54
4,0	77° 07' 42"	36,69
5,0	73° 59' 02"	39,06
$m^3 g^{-1}$		grad/10 ⁶ m

Mit steigenden Werten für m rückt das Temperaturmaximum zum Zentrum der Antizyklone, wobei gleichzeitig der Temperaturgradient stark zunimmt. Lassen wir ein Auswandern der Temperaturphase um mehr als ein viertel Wellenlänge nach Westen zu, so erhalten wir am Boden, also für $p = p_0$, einen Temperaturgradienten 20° C. Es besteht kein Zweifel, daß derartige große Temperaturunterschiede in der Natur nicht beobachtet werden. Hierzu muß besonders betont werden,

daß es sich um stationäre Antizyklonen handelt, die weder eine Druckschwankung, noch eine Verlagerungstendenz zeigen. Zur Aufrechterhaltung der für dieses Modell geforderten Stationarität, ist man gezwungen, mit solchen großen Temperaturgradienten vorlieb zu nehmen. Um diese Schwierigkeit zu überbrücken, wird man einen anderen Lösungsansatz der Differentialgleichung ansetzen müssen. Es ist also durch den Ansatz [9] das in der Atmosphäre zur Aufrechterhaltung des Massenhaushaltes notwendige Temperaturgefälle in erster Linie auf die Bodenschicht konzentriert. Tatsächlich liegen aber die Verhältnisse so, daß das Temperaturgefälle innerhalb der Troposphäre ziemlich gleichmäßig in seiner Stärke ist. Die stratosphärische Kompensation beginnt im allgemeinen in größeren Höhen. Um sich ein richtiges Bild von der Größe der Temperaturgradienten zu machen, erscheint es daher sinnvoll, den mittleren Temperaturgradienten

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} = -\frac{1}{p_0} \int_{p_0}^{p^*} \frac{\partial T}{\partial n} dp \quad [76]$$

mit p^* dem Druck in der Umkehrschicht zu berechnen. Mit unserem Lösungsansatz [8] folgt für [76] im Zentrum der Antizyklone

$$\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial n}\right)_{0,0} = \frac{\sqrt{\alpha^2 m^2 \sin^2(\alpha \sigma) + T^2}}{R} \left[p^* \sin \left\{ \xi \pi \left(\frac{p_0 - p^*}{p_0} \right) \right\} - \frac{p_0}{\pi \xi} \left\{ \cos \left\{ \xi \pi \left(\frac{p_0 - p^*}{p_0} \right) \right\} - 1 \right\} \right] \quad [77]$$

Setzen wir für $\alpha \sigma(m, \xi)$; m und $k(m, \xi)$ die Werte aus Tabelle 3 (2. Beispiel) mit $\xi = 0,84$ und $p = 0,4 p_0$, so erhalten wir in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung für den mittleren horizontalen Temperaturgradienten innerhalb der Troposphäre 9,4 [grad/10⁶m]. Aus Gl. [10] und [11] ist zu erkennen, daß sowohl die Amplitude des Höhendruckfeldes als auch die Achsenneigung des Druckmaximums von der Temperaturphase abhängen. Abb. 1 zeigt den Zusammenhang der

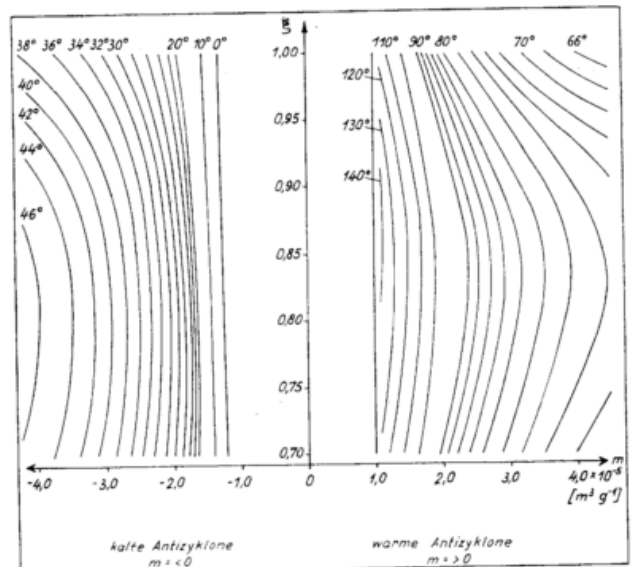


Abb. 1

Die Temperaturphase $\alpha \sigma$ als Funktion der Temperaturstörung m und des Parameters ξ .

Temperaturphase $\alpha\sigma$ von den Größen m und ξ . Dabei spielt ξ zunächst nur eine untergeordnete Rolle. Mit wachsendem m nimmt für alle Werte von ξ die Temperaturphase ab. Um den Einfluß auf die Amplitude der Druckfelder und die Achsenneigung zu zeigen, wurden verschiedene Wertetripel von ξ , m und $\alpha\sigma$ (m , ξ) nach Tab. 2 gewählt.

Das Temperaturmaximum soll nach Westen verschoben sein, aber immer noch im Bereich der Antizyklone liegen, so daß wir mit den Beobachtungen in möglichst guter Übereinstimmung bleiben. Dies ist für folgende Werte von m und ξ der Fall.

Tab. 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha\sigma$	1,0	0,84	0,70	1,0	0,84	0,70	1,0	0,84	0,70
m	3,16	7,4	5,4	2,1	3,4	2,86	1,6	2,25	1,986 $\times 10^{-5}$
$\alpha\sigma(m, \xi)$	70°			80°			90°		

Für diese in Tab. 2 angegebenen Werte wurden nach den Formeln [10] und [11] die Amplitude der Druckfelder und die Achsenneigung des Druckmaximums berechnet und in Abb. 2 und Abb. 3 graphisch dargestellt.

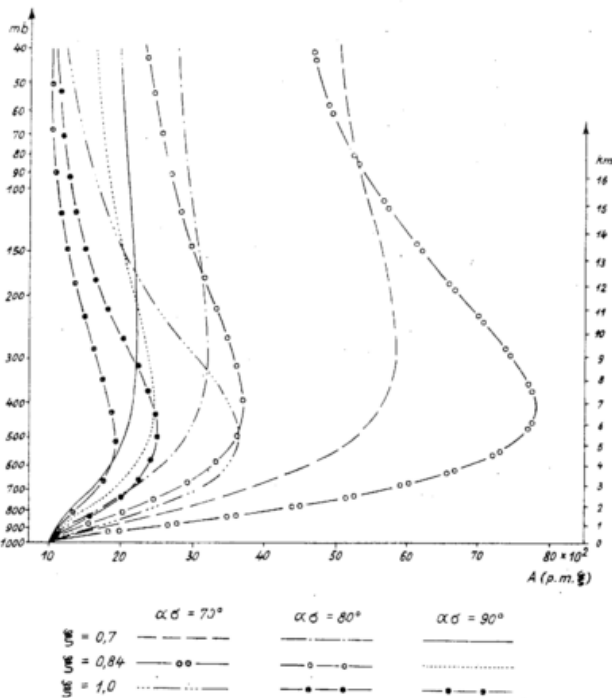


Abb. 2

Die Amplitude der Druckfelder $A(p, m, \xi)$ in $[m^2 \text{sec}^{-2}]$.

Wir erkennen daraus, daß jeweils der höchste Betrag der Amplitude für wachsende Werte von m zunimmt. Sie überschreitet für $m = 2,86 \times 10^{-5} [m^3 g^{-1}]$ den Betrag von 32,0 gdDm. Es ist durchaus möglich, daß im Einzelfall Werte bis zu 50,0 gdDm beobachtet werden. Da es sich in unserem Modell aber um den allgemeinen horizontalen und vertikalen Aufbau der Atmosphäre handelt (Grundzustände), wird der mittlere Wert der maximalen Amplitude (Extremsschicht) bei 29 gdDm liegen. Dies wird z. B. für Werte von $m = 2,7 \times 10^{-5} [m^3 g^{-1}]$ und $\xi = 0,84$ in 400 mb erreicht. Mit fallenden Werten des Parameters $\xi < 1,0$ rückt die Extremsschicht nach oben. Auf ihre Bedeutung werden wir bei der Behandlung des Massenhaushaltes der Antizyklonen in einem weiteren Kapitel dieser Arbeit näher eingehen.

Unter Achsenneigung verstehen wir das nach Westen und Süden verschobene Druckmaximum in der Höhe.

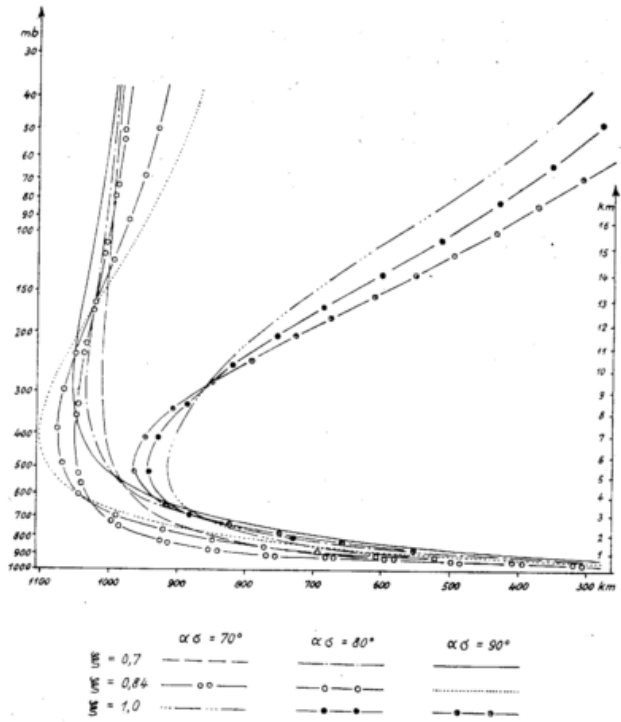


Abb. 3

Die Achsenneigung des Druckmaximums $\psi(p, m, \xi)$ in km.

Wir geben sie als Bruchteil einer halben Wellenlänge an. Diese beträgt vom Zentrum des Hochdruckgebietes bis zum Zentrum des Tiefdruckgebietes 180° und soll einer mittleren Entfernung der Druckgebilde von 3000 km entsprechen. Für wachsende Werte von m ($\xi = \text{const.}$) nimmt der horizontale Druckgradient zu, wobei sich gleichzeitig das Druckmaximum auf einer im Raum gekrümmten Kurve nach Westsüdwest verschiebt. Es bleibt im Bereich des Bodendruckmaximums und liegt immer ostwärts des Temperaturmaximums. Seine äußerste Lage wird für $\xi = 0,84$ und $m = 2,25 \times 10^{-5} [m^3 g^{-1}]$ in 400 mb erreicht, nimmt mit zunehmender Höhe ab, zeigt also die Tendenz, sich dem Druckmaximum am Boden zu nähern. Für $\xi = 1,0$ stellt sich an der Grenze der Atmosphäre die Bodendruckverteilung wieder her. Wie es im Mittel über hochreichenden Antizyklonen aussieht, kann nur durch eine umfangreiche statistische Untersuchung bewiesen werden. Auch hierzu liegen Ansätze vor, die aber nicht ausreichen, um diese Frage endgültig zu entscheiden (5).

Abschließend kann gesagt werden, daß für zunehmende positive Werte der Temperaturstörung Temperatur- und Druckphase nach Westsüdwest auswandern. Das Druckmaximum bleibt immer ostwärts des Temperaturmaximums, während die maximale Amplitude stark zunimmt. Der Parameter ξ unterstützt im Bereich $1,0 > \xi > 0,7$ das Auswandern beider Größen nach Westen bei gleichzeitiger Hebung der Maximalwerte. Dies dürfte für den Massenhaushalt von besonderer Bedeutung sein.

3.2. Der Koeffizient des planetarischen Temperaturgefälles und die Berechnung der Hauptisobarenflächen

Nach Gl. [8] überlagern wir einem zellulären Bodendruckfeld ein zweites Druckfeld, das aus der Annahme eines gegenläufigen meridionalen, sowie zonalen Temperaturgefälles resultiert. Wir bestimmten den Koeffizienten des meridionalen Temperaturgradienten nach Gl. [14] als Funktion der Temperaturstörung m und des Parameters ξ . Weiterhin geht aus Gl. [14]

hervor, daß wir bei vorgegebenem Koeffizienten m der Temperaturstörung die überlagerte meridionale Komponente $k(m, \xi)$ auch auf die Breitenabhängigkeit der Vertikal Komponente der Winkelgeschwindigkeit bzw. des vertikalen Wirbels der Erdrotation zurückführen können ($\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$). Durch die Einführung eines gegenläufigen meridionalen Temperaturgefälles gelingt uns eine Umkehr der Vertikalzirkulation derart, daß innerhalb der Troposphäre eine absinkende Luftbewegung vorherrscht, während in der unteren Stratosphäre Masse nach oben abtransportiert wird. Der notwendige Massenzufluß findet sowohl innerhalb der Troposphäre als auch in der Stratosphäre statt.

Zur Berechnung des Koeffizienten der meridionalen Temperaturverteilung halten wir die Reibungsverteilung L im Kern der Antizyklone konstant. Nach N. Shaw (17) schwankt diese zwischen 1,0 und 7,0 [$g\ m^{-2}sec^{-1}$], während H. Faust (15) aus der mittleren interdiurnen Temperaturänderung in 900 mb Werte zwischen 2,3 und 3,2 [$g\ m^{-2}sec^{-1}$] ermittelt. Zur Auswertung der Formel [14] benutzen wir einen mittleren Wert von $L = 4,0$ [$g\ m^{-2}sec^{-1}$] und erhalten bei quadratisch-zellulären Druckgebilden folgende Werte für $k(m, \xi)$:

Tab. 3

		$m \times 10^{-5}$	$\alpha \sigma(m, \xi)$	$k(m, \xi) \times 10^{12}$
1)	1,00	2,5464	74° 33' 01"	10,51
2)	0,84	3,4000	80°	9,65
3)	0,70	1,9860	90°	9,92
		[$m^3\ g^{-1}$]		[$m^2\ g^{-1}$]

Um die absoluten Topographien der Hauptisobarenflächen für eine warme Antizyklone nach Gl. [8] oder Gl. [9] zu berechnen, bestimmen wir nun nach Gl. [23] das mittlere Geopotential $\bar{H}(p)$ [gdDm] im troposphärischen Raum und nach Gl. [24] innerhalb der Stratosphäre. Als mittlere Bodentemperatur nehmen wir 9,0° C an. Wir kommen damit den Verhältnissen in unseren Breiten sehr nahe. Bei Annahme eines höhenunabhängigen vertikalen Temperaturgradienten von $\bar{\gamma} = 0,6 \times 10^{-2}$ [grad m^{-1}] sind wir zunächst in der Lage, nach der Polytropengleichung [22] die mittlere Temperatur der Isobarenflächen zu berechnen. Damit läßt sich dann leicht das mittlere Geopotential der Hauptisobarenflächen bestimmen. Die berechneten Werte für $\bar{T}(p)$ und $\bar{H}(p)$ sind in Tabelle 4 noch einmal zusammengestellt.

Tab. 4

1	2	3	4
p	$\bar{T}(p)$	$\bar{H}(p)$	$\rho(p)$
1000	9,0	0	$12,36 \times 10^{-2}$
900	3,8	85	11,33 ..
800	— 1,9	187	10,28 ..
700	— 8,2	281	9,21 ..
600	— 15,2	396	8,11 ..
500	— 23,4	529	6,98 ..
400	— 33,0	686	5,81 ..
300	— 44,8	880	4,58 ..
225	— 56,1	1064	3,61 ..
150	— 56,1	1316	2,41 ..
96	— 56,1	1593	1,54 ..
41	— 56,1	2125	0,66 ..
[m b]	[°C]	[g d D m]	[$g\ m^{-3}$]

In Spalte 4 wurde die berechnete Dichte der Hauptisobarenstufen zu Vergleichszwecken eingetragen. Ein Vergleich mit Tabelle 15, Seite 45 des Scherhag'schen Werks (18) zeigt die gute Übereinstimmung der auf diese Weise ermittelten Werte der Zustandsgrößen mit den aerologischen Normalwerten über Berlin.

Somit wären alle in den Gl. [8] bzw. [9] auftretenden Größen dem mittleren Zustand der Atmosphäre in mittleren Breiten angepaßt. Das mittlere Geopotential entnehmen wir der Tabelle 4, die Koeffizienten $k(m, \xi)$ und $\alpha \sigma(m, \xi)$ für $\xi = 1,0$ und $m = 2,5464 \times 10^{-5}$ [$m^3\ g^{-1}$] der Tabelle 3, so daß eine exakte Berechnung der absoluten Topographien ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden kann.

Das Ergebnis dieser Berechnung zeigt die Abb. 4. Die Isopotentiale wurden für einen Abstand von je 4 dynamischen Dekametern gezeichnet. Man erkennt aus der graphischen Darstellung eine nach Westsüdwest verschobene Achse des Druckmaximums, wobei der horizontale Druckgradient mit der Höhe zunimmt, in 500 mb (für $\xi = 1,0$) sein Maximum erreicht, um dann bei gleichzeitigem Zurückwandern der Achse wieder abzunehmen. Im Zentrum des Bodenhochs sind die Isopotentiale fast kreisrund und geschlossen, während sie im Schnittpunkt des Achsenkreuzes in der 500 mb-Fläche von antizyklonaler in zyklonale Krümmung übergehen. Ein noch weiteres Auswandern des Druckmaximums nach Westen erhalten wir für noch kleinere Werte der Temperaturstörung. H. Faust (15) ermittelte die Schicht, in der der horizontale Druckgradient seine stärkste Ausprägung erfährt (Extrem-schicht) unterhalb 600 mb. Bei der Besprechung des Massenhaushaltes werden wir noch näher auf diese Erscheinung eingehen. Es besteht ein funktioneller Zusammenhang zwischen der Höhe der Extremschicht, der Höhe der maximalen (minimalen) Vertikalgeschwindigkeit und der Nullschicht, d. h. der Schicht, in der die Vertikalbewegung ihr Vorzeichen ändert.

Für fallende Werte von ξ verlagert sich sowohl die Höhe der Extremschicht als auch die Höhe der maximalen (minimalen) Vertikalgeschwindigkeit. Für $\xi = 1,0$ ermitteln wir $v_z = 0$ in 385 mb und das Maximum für $\frac{\partial H}{\partial n}$ in 500 mb, während für $\xi = 0,84$ die Vertikalgeschwindigkeit in 237 mb ihr Vorzeichen wechselt, wobei $\frac{\partial H}{\partial n}$ seinen höchsten Wert in 400 mb erreicht.

3.3. Berechnung der Temperaturverteilung auf den Hauptisobarenflächen

Unser Lösungsansatz [8] berücksichtigt ein zonales und ein planetarisches Temperaturgefälle durch die Einführung der Koeffizienten m und $k(m, \xi)$. Er verfügt weiterhin über eine mit der Erfahrung übereinstimmende Temperaturasymmetrie derart, daß das Temperaturmaximum nach Westsüdwest verschoben ist. Die höchsten Temperaturen treten also im Südwest-Quadranten und die niedrigsten im Nordost-Quadranten der Antizyklone am Boden auf. Mit zunehmender Höhe nimmt die Temperaturamplitude ab, erreicht in einer vom Parameter ξ abhängigen Höhe Gl. [33], [34] den Wert null, d. h. die Isobarenfläche fällt mit einer Isothermenfläche zusammen. Darüber kehrt sich die Temperaturamplitude um. Die Westseite der Antizyklone ist im stratosphärischen Raum kälter als ihre Vorderseite.

Unser Lösungsansatz berücksichtigt keine Inversionen. Diese dürften für die Dynamik vorliegender Druckgebilde nur von untergeordneter Bedeutung sein. Ein Vergleich der Größenordnung des zonalen zum meridionalen Temperaturgradienten nach Gl. [28] zeigt, daß das zonale Temperaturgefälle für die in Tab. 3 angegebenen Werte das 2,1- bis 3,6-fache des meridionalen beträgt. Der Austausch vollzieht sich in meridionalen Zirkulationsstreifen (6), so daß auf der Rückseite einer Antizyklone unserer Breiten ein Vorstoß subtropischer Luftmassen nach Norden und auf der Vorderseite Kaltluft aus dem Polargebiet nach Süden transportiert wird.

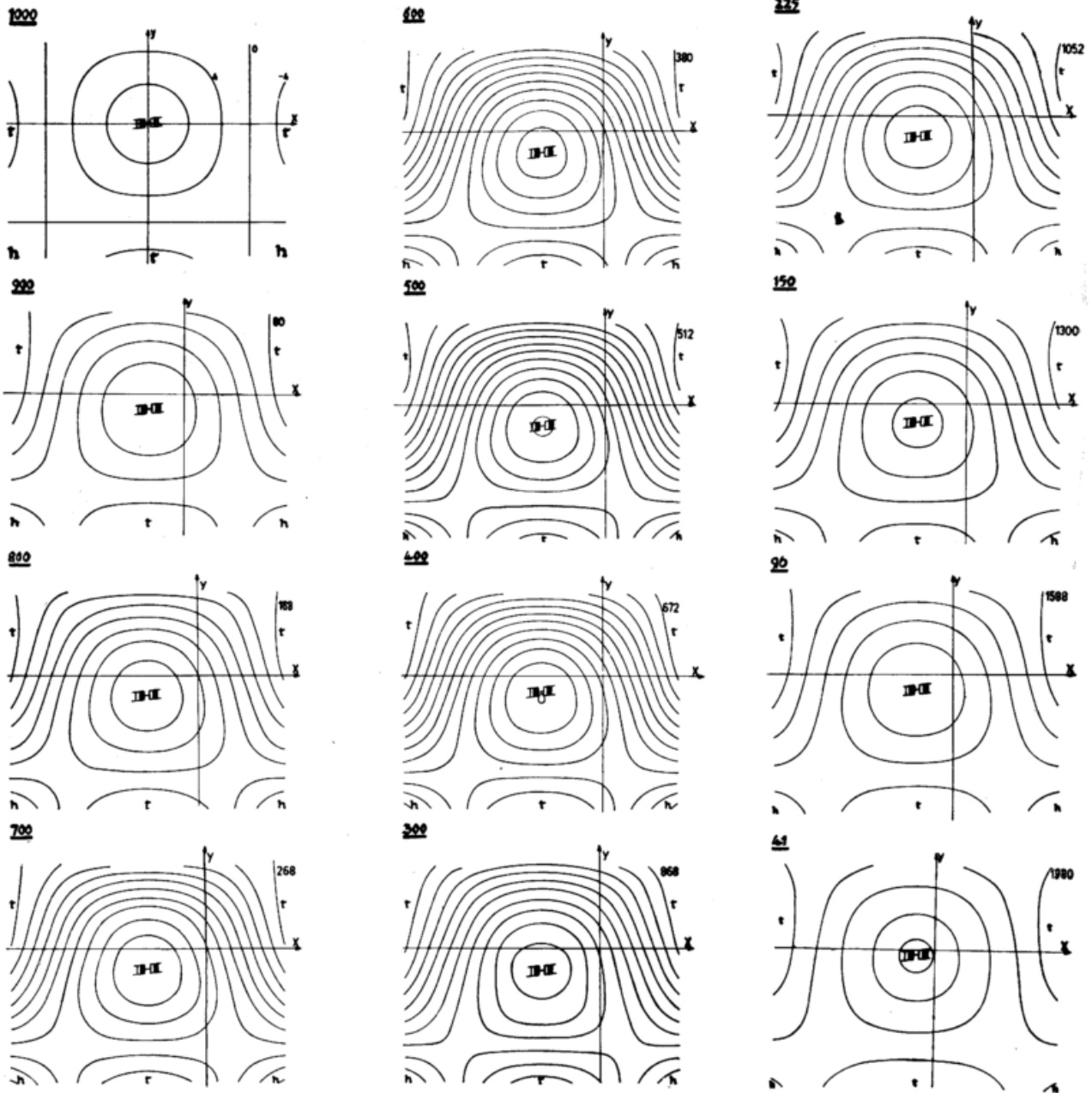


Abb. 4
Die absoluten Topographien der Hauptisobarenflächen in gdDm.
für verschiedene Werte des Parameters ξ .

Daraus ist verständlich, daß der meridionale Temperaturgradient in der gleichen Luftmasse geringer sein muß als der Temperaturunterschied zwischen beiden zum gleichen System gehörenden Luftmassen in zonaler Richtung.

Um das Temperaturfeld zu berechnen, benutzen wir Gl. [32] in der Form

$$T(x, y, p, m, \xi) = \bar{T}(p) - M(p, m, \xi) y + Z(p, m, \xi) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\alpha y) \quad [78]$$

mit den von p , m und ξ abhängigen Koeffizienten

$$a) \bar{T}(p) = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} \quad [\text{grad}] \quad [79]$$

$$b) M(p, m, \xi) = \frac{f \pi \xi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \quad [\text{grad m}^{-1}]$$

$$c) Z(p, m, \xi) = \frac{m \pi \xi p}{R} \cos(\xi \pi \zeta(p)) \quad [\text{grad}].$$

Diese wurden für die in Tabelle 3 angegebenen Werte berechnet und in Abb. 5 graphisch dargestellt. Die

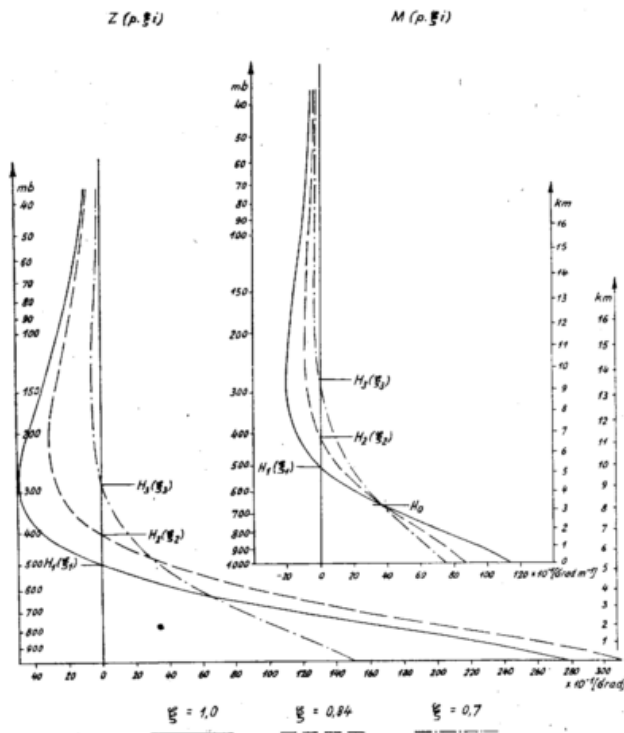


Abb. 5

Die höhenabhängigen Koeffizienten der Temperaturverteilung für verschiedene Werte des Parameters ξ .

Koeffizienten wechseln in den Höhen $H_1(\xi_1)$, $H_2(\xi_2)$ und $H_3(\xi_3)$ ihr Vorzeichen, was mit einer Temperaturgradientenumkehr gleichbedeutend ist. Die Druckflächen, in denen die Koeffizienten $M(p, m, \xi)$ und $Z(p, m, \xi)$ identisch null verschwinden, sind Isothermenflächen vom Betrag $\bar{T}(p)$. Für fallende Werte ξ , im Bereich $1,0 > \xi > 0,7$, rücken diese immer höher hinauf, während die Temperaturgradienten und damit die Temperaturamplitude abnehmen. Es tritt gleichzeitig im troposphärischen Raum bis zur Höhe H_0 Abkühlung und darüber bis in große Höhen Erwärmung ein. Die Stabilität der atmosphärischen Schichtung nimmt also für fallende Werte von ξ zu.

Dem vertikalen Meridianschnitt (Abb. 6) entnehmen wir diese bereits erläuterten und mit der Erfahrung quantitativ gut übereinstimmenden Tatsachen. Abb. 6a

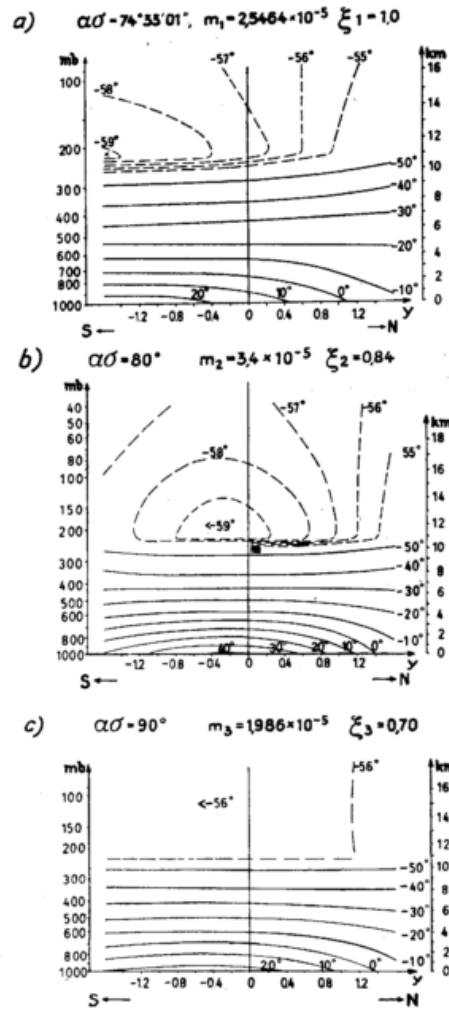


Abb. 6

Die Temperaturverteilung im Meridianschnitt durch das Bodendruckmaximum.

wurde für die Werte $\xi_1 = 1,0$, $\alpha\sigma_1 = 74^\circ 33' 01''$ und $m_1 = 2,5464 \times 10^{-5}$ berechnet. Das Temperaturmaximum liegt mit Werten größer 20°C auf der Südseite der Antizyklone. Die Temperaturumkehr findet in 500 mb statt, so daß über der warmen Troposphäre in der Höhe ein Kältegebiet mit Werten $< -59^\circ \text{C}$ zu erkennen ist. Die Abb. 6b und 6c wurden für die übrigen aus Tab. 3 zu entnehmenden Werte berechnet. Die Absolutwerte der Temperatur steigen mit wachsender Temperaturstörung rasch an. Sie betragen für $m = 3,4 \times 10^{-5} [\text{m}^3 \text{g}^{-1}]$ mehr als 41°C , wobei wir bedenken müssen, daß unser Schnitt nicht durch das Temperaturmaximum gelegt wurde, sondern dieses am Ostrande schneidet.

Wie schon aus den einleitenden Betrachtungen dieses Kapitels zu ersehen war, erhalten wir in unserem Modell beim Vorhandensein einer nach Westen verschobenen Temperaturphase zu große Werte der horizontalen Temperaturgradienten. Die untere Troposphäre ist im Bereich der Warmluft (Kaltluft) zu warm (kalt) (Abb. 6 a—c). Für fallende Werte von m und ξ nimmt der vertikale Temperaturgradient in der Warmluft (Kaltluft) ab (zu). Wir berechnen für das zweite in Tab. 3 angegebene Wertetripel wegen $m = 1,986 \times 10^{-5}$ trockenstabile Schichtung. Unter welchen Bedingungen die untersten Atmosphärenschichten im Bereich des Temperaturmaximums instabil geschichtet sind, soll später noch behandelt werden. Es sei aber hier schon darauf hingewiesen, daß es sich um eine recht geringe Instabilität für unsere in Frage kommenden Werte der Temperaturstörung m handelt. Der höhenunabhängige

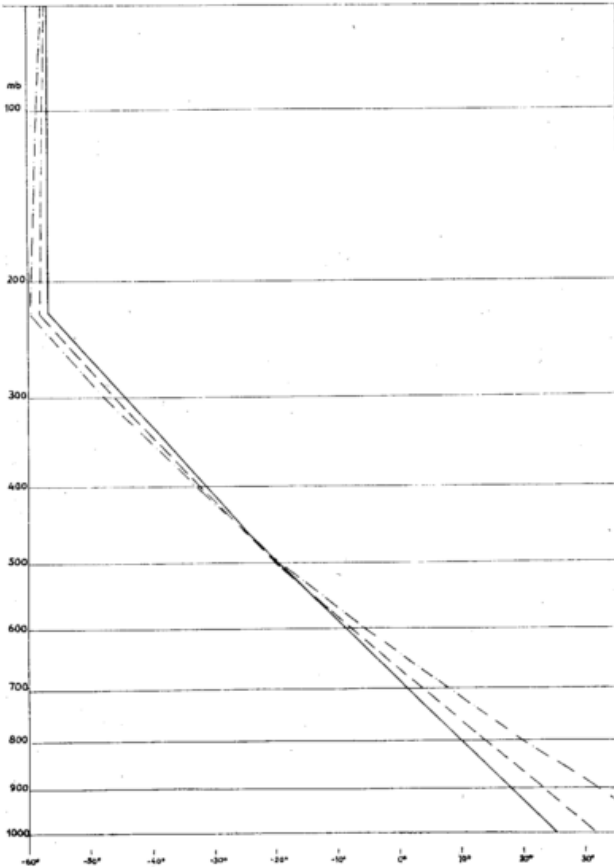


Abb. 7a

Die vertikale Temperaturverteilung im Bereich des Temperaturmaximums (siehe Text der Abb. 7a).

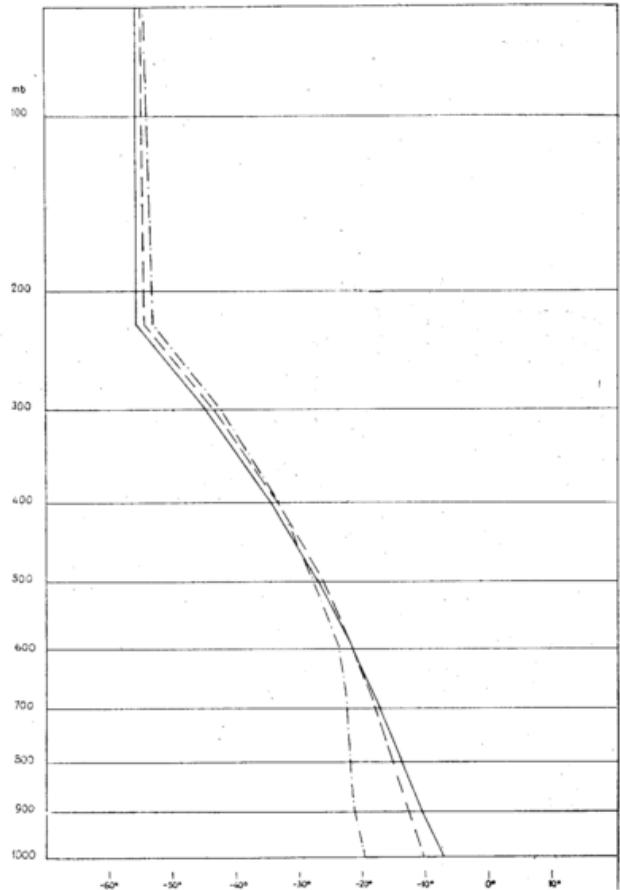


Abb. 7b

Die vertikale Temperaturverteilung im Bereich des Temperaturminimums (siehe Text der Abb. 7b).

vertikale Temperaturgradient erreicht höchstens Werte bis zu 1,02 [grad m⁻¹].

Betrachten wir nun einmal Abb. 7b. Die Atmosphäre ist bis zur Stratosphäre hin sehr stabil geschichtet. Dies steht im völligen Widerspruch zu den Erfahrungstatsachen. Mit der Kaltluftadvektion aus Norden tritt eine merkliche Abkühlung ein. Es kommt in ihr zu mehr oder minder starker Schauerbildung. Die Luftmasse müßte instabil geschichtet sein. Aus der Synopsi muß also gefolgert werden, daß der vertikale Temperaturgradient $\frac{\partial T}{\partial z}$ im Bereich der Warmluft geringer ist als im Bereich der Kaltluft. Wir müssen also um eine entsprechende Korrektur unseres Lösungsansatzes [8] bemüht sein und schreiben diesen zunächst einmal mit allgemeinen Funktionen in der Form

$$H(x, y, p, m) = \bar{H}(p) - f(m) p_0 F(p) y + m K(p) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) + C \cos(\alpha x) \cos(\gamma y). \quad [80]$$

Mit [23], [26] und [27] bestimmen wir dann leicht das Temperaturfeld zu

$$T(x, y, p, m) = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} + \frac{f(m) p_0 p}{R} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) y - \frac{m p}{R} \left(\frac{\partial K}{\partial p} \right) \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) \quad [81]$$

und erhalten daraus durch Differentiation nach p

$$\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \right\} + \frac{f(m) p_0}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial F}{\partial p} \right\} y - \frac{m}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial K}{\partial p} \right\} \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y). \quad [82]$$

Andererseits ist der vertikale Temperaturgradient durch die Beziehung

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{\partial H} \frac{\partial T}{\partial p} \approx \frac{g}{\partial H} \frac{\partial T}{\partial p} \quad [83]$$

gegeben, so daß wir mit [80] und [82] auf der x -Achse ($y = 0$)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{x,0} = -\frac{g}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \right\} - \frac{m g}{R} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial K}{\partial p} \right\} \cos \alpha (x + \sigma) \quad [84]$$

erhalten. Der erste Term dieser Gleichung gibt uns den mittleren nur von p abhängigen vertikalen Temperaturgradienten, während der zweite Term den Störungsanteil repräsentiert. In der Warmluft ($x < 0$) ist $\cos \alpha (x + \sigma) > 0$, in der Kaltluft ($x > 0$) entsprechend kleiner 0; was besagt, daß der vertikale Temperaturgradient in der Kaltluft größer ist als in der Warmluft, sofern

$\frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial K}{\partial p} \right\} > 0$ ist. Somit haben wir eine gute Möglichkeit, die unbekannte Funktion $K(p)$ exakt zu bestimmen, damit unsere aus der Synopsi folgende Forderung erfüllt werden kann. Wir setzen also

$$\frac{\partial}{\partial p} \left\{ p \frac{\partial K}{\partial p} \right\} = F^*(p) > 0, \quad [85]$$

woraus wir durch zweimalige Integration die Funktion $K(p)$ erhalten. Es resultiert

$$K(p) = \int_{p_0}^p \left[\int_{p_0}^p F^*(p) dp - \frac{s p_0}{p} \right] dp. \quad [86]$$

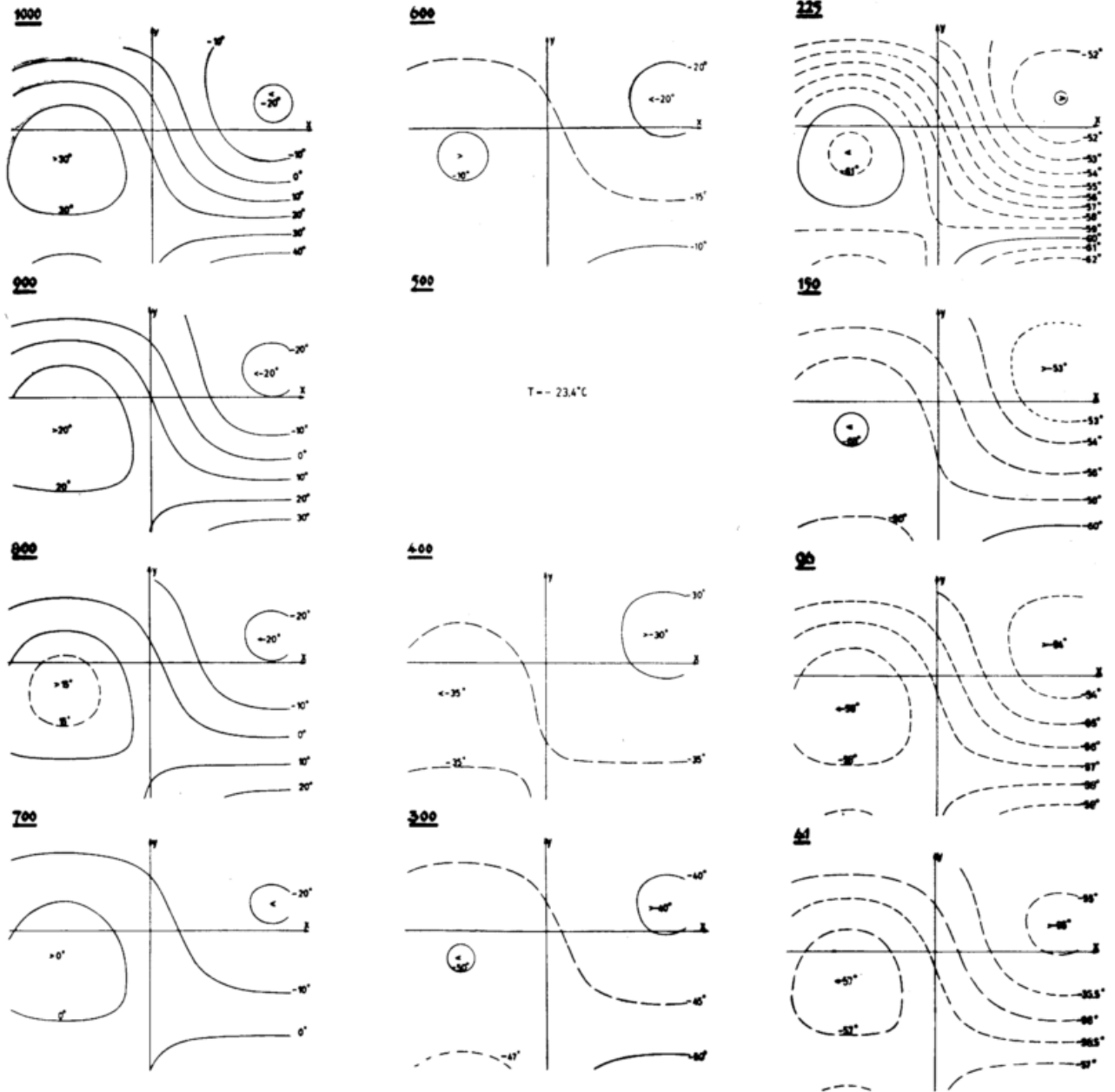


Abb. 8
Die Temperaturverteilung auf den Hauptisobarenflächen in $^{\circ}\text{C}$.

Mit [86] würde dann unser Lösungsansatz [80] folgendermaßen lauten

$$H(x, y, p, m) = \bar{H}(p) - \epsilon p_0 F(p) y + m \int_{p_0}^p \left[\frac{1}{p} \int_{p_0}^p \bar{F}(p) dp - \frac{5p_0}{p} \right] dp \cos \alpha (x + \sigma) \cos(\gamma y) + C \cos(\alpha x) \cos(\gamma y). \quad [87]$$

Ein numerisches Beispiel soll uns zeigen, daß mit diesem Lösungsansatz vernünftige vertikale Temperaturgradienten existieren. Der Einfachheit halber habe ich nach Gl. [83] für $\frac{\partial H}{\partial p} \rightarrow \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}$ gesetzt, so daß für den ersten Term der Gleichung [84] der höhenunabhängige vertikale Temperaturgradient $\bar{\gamma} = -0,6 \times 10^{-2}$ [grad/m] folgt. Unsere Untersuchung gilt für das 800-mb-Niveau an den Stellen $x = \pm 1,4$, also im Bereich der Temperaturextreme. Als Funktion $F^*(p)$ setzen wir

$$F^*(p) = q - e \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right)^n \quad [88]$$

mit $q = 0,615$, $e = 3,72$ und $n = 2,0$. Ferner soll $\alpha \sigma (m, \xi) = 80^\circ$, $m = 3,4 \times 10^{-5}$ und $\xi = 0,84$ sein. Wir erhalten dann an den Stellen

$x = -1,4$ (im Bereich der Warmluft)

$$\text{für } \frac{\partial T}{\partial z} = -0,544 \times 10^{-2} \text{ [grad/m].}$$

$x = +1,4$ (im Bereich der Kaltluft)

$$\text{für } \frac{\partial T}{\partial z} = -0,654 \times 10^{-2} \text{ [grad/m].}$$

Aus Abb. 7b folgt bei Verwendung der trigonometrischen Funktion $\sin \xi \pi \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right)$ (vgl. Gl. [8]) in 800 mb nahezu Isothermie, während wir nun in diesem Bereich auf eine wesentlich stärkere Temperaturabnahme, nämlich auf $-0,544 \times 10^{-2}$ [grad/m] kommen.

Da sich die übrigen meteorologischen Grundgrößen qualitativ kaum ändern, benutzen wir zur Berechnung und Diskussion der übrigen Feldgrößen wieder unsere Ausgangsgleichung [8], für die auch die Temperaturverteilung auf den Hauptisobarenflächen für die Werte $\xi = 1,0$; $m = 2,5464 \times 10^{-5}$ und $\alpha \sigma (m, \xi) = 74^\circ 33' 01''$ berechnet und in Abb. 8 graphisch dargestellt wurde. Sie bestätigt die in diesem Abschnitt durchgeführte Diskussion und zeigt im großen und ganzen eine gute Übereinstimmung mit der in Hochdruckgebieten vorkommenden Temperaturverteilung.

3.4. Berechnung der Divergenz und Vertikalbewegung auf den Hauptisobarenflächen. — Der Massenhaushalt

Durch die Kontinuitätsgleichung [1] ist der Zusammenhang zwischen dem vertikalen Massenfluß und der horizontalen Divergenz auf den Hauptisobarenflächen, die sich in eine Richtungs- und eine Geschwindigkeitsdivergenz zerlegen läßt, gegeben. Zur Berechnung der Divergenz benutzen wir Gl. [50] in der Form

$$\text{div } v = \sin(\alpha x + \psi) [B(p, m, \xi) - K(p, m, \xi)] \quad [89]$$

mit den höhenabhängigen Koeffizienten

$$a) B(p, m, \xi) = \frac{\alpha \beta A(p, m, \xi)}{f_0^2} \text{ [sec}^{-1}\text{]} \quad [90]$$

$$b) K(p, m, \xi) = \frac{2 \alpha^3 \epsilon^2 p_0 A(p, m, \xi)}{f_0^3} \sin(\xi \pi \xi(p)) \text{ [sec}^{-1}\text{]}.$$

Der Verlauf dieser Koeffizienten geht aus Abb. 9 hervor. Der erste Term mit $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$ charakterisiert die Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters, während der zweite Term in erster Näherung den Effekt der Krümmungsänderung der Isopotentialen enthält. Am

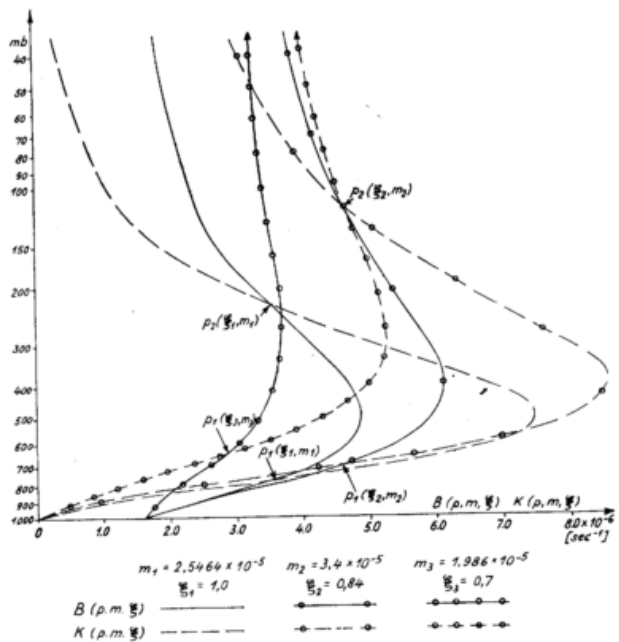


Abb. 9 Die höhenabhängigen Koeffizienten der Divergenz in 10^{-6} sec^{-1} .

Boden ist $K(p_0, m_i, \xi_i) = 0$. Weiterhin erkennt man, daß sich für ein bestimmtes Wertepaar (m_i, ξ_i) die entsprechenden Kurven für $B(p, m_i, \xi_i)$ und $K(p, m_i, \xi_i)$ schneiden. Diese Schnittpunkte sind die p -Stellen, in denen die Divergenz verschwindet. Diese Höhe bestimmen wir nach Gl. [53] für $\xi_1 = 1,0$ und $m_1 = 2,5464$

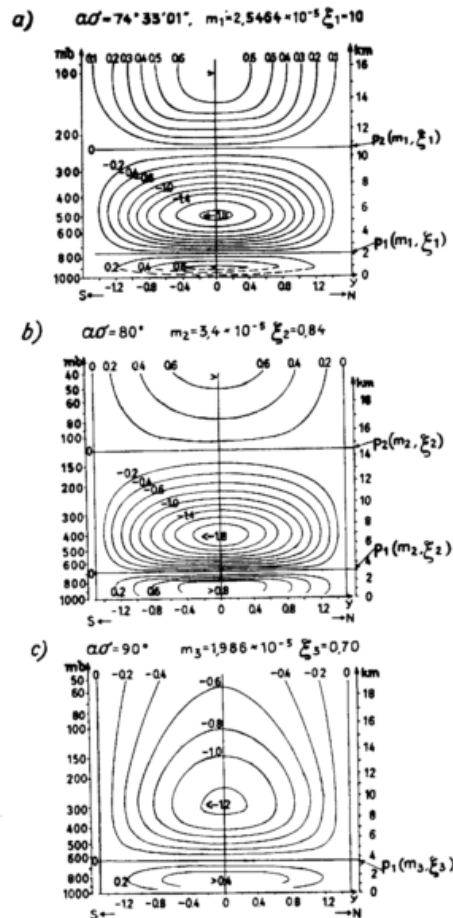


Abb. 10 Die Vergenzen im Meridionalschnitt durch das Bodendruckmaximum in 10^{-6} sec^{-1} .

$\times 10^{-5}$ zu $0,761 p_0$. Unterhalb $p_1 (m_1, \xi_1)$ überwiegt der Breiteneffekt. In dieser Schicht ergibt sich aus Gl. [89] für positive Werte von x (Vorderseite der Antizyklone) und Werte für y im Bereich $-\frac{3}{2} < y < +\frac{3}{2}$ positive Divergenz und entsprechend auf der Rückseite der Antizyklone negative Divergenz (Konvergenz).

Aus elementareren Betrachtungen folgt ebenfalls unter Berücksichtigung der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters die Tatsache, daß auf der Vorderseite der Antizyklone sich die Teilchen in niederen Breiten mit einer größeren Geschwindigkeit bewegen als in höheren Breiten.

Aus Kontinuitätsgründen muß aber die untere Divergenz (Konvergenz) durch eine obere Konvergenz (Divergenz) ersetzt werden. Aus Abb. 9 und 10 sowie aus Gl. [89] ist ersichtlich, daß die Absolutbeträge der horizontalen Divergenz am Boden mit fallendem p abnehmen, im Punkte $p_1 (m_1, \xi_1)$ gleich null werden, um dann in der darüberliegenden Schicht bis zur Höhe $p_2 (m_2, \xi_2)$ ihr Vorzeichen zu wechseln.

Da sich das Druckmaximum nach Westsüdwest verlagert, zeigen die Isopotentiale in dieser Schicht über dem Bodendruckmaximum einen Übergang von antizyklonaler zu zyklonaler Krümmung. Bei antizyklonaler Krümmung weht der Wind mit größerer Geschwindigkeit als bei zyklonaler Krümmung. Es tritt also im Bereich dieser Krümmungsänderung ein Massenstau auf der Vorderseite ein, während auf der Rückseite mehr Masse nach Norden wegtransportiert wird. Nach Gl. [60] bestimmen wir die zweite Nullstelle der Divergenz für die oben angegebenen Werte von m_1 und ξ_1 zu $0,239 p_0$. Darüber herrscht dann auf der Vorderseite der Antizyklone wieder positive Divergenz und auf der Rückseite Konvergenz.

Wir fordern, daß die Divergenz bei Annäherung an die Grenze der Atmosphäre identisch verschwindet. Dies ist für einen ganz bestimmten Wert von ξ der Fall. Wir bestimmen somit die untere Grenze des Parameters mit guter Annäherung nach Gl. [56] bzw. [59] zu $\xi = 0,75$. Für alle Werte von ξ im Bereich $1,0 < \xi < 0,75$ erhalten wir die Höhen der zweiten Nullstelle der Divergenz zwischen $0,239 p_0 > p > 0$. Zur Regelung des Massenhaushaltes einschließlich seiner Vertikalkomponente erscheint es auf Grund dieser Betrachtung sinnvoll, der Maßzahl ξ Werte zwischen 1,0 und 0,75 zuzuordnen.

Aus Abb. 9, 10 und 11 ist weiterhin zu erkennen, daß die Höhe, in der die Divergenz (Konvergenz) ihr Maximum hat, vom Parameter ξ abhängt. Für $\xi = 1,0$ finden wir es in 500 mb, und dieses rückt für fallende Werte von ξ weiter nach oben. Abb. 10 stellt die Verteilung der Divergenz auf den Hauptisobarenflächen dar.

Die Vertikalbewegung berechnen wir nach Gl. [63]. Der Verlauf der höhenabhängigen Koeffizienten geht aus Abb. 12 hervor. Betrachten wir die Verhältnisse nach Gl. [63] an der Stelle $x = 0$, so verschwindet das Glied $A^*(p, m, \xi)$ (an x), und die Vertikalgeschwindigkeit wechselt mit $B^*(p, m, \xi)$ ihr Vorzeichen. Dies ist für $\xi_1 = 1,0$ bei $p = 0,385 p_0$ und für $\xi_2 = 0,84$ bei $p = 0,237 p_0$ der Fall. Für $\xi_3 = 0,7$ bleibt dieser Koeffizient bis in große Höhen hinauf positiv. Er wechselt erst in ungefähr 35 mb sein Vorzeichen, so daß wir in der Schicht $p_0 > p > 0,035 p_0$ vorherrschend absinkende Luftbewegung vorfinden. Statistische Untersuchungen (15) haben gezeigt, daß die Nullstelle der Vertikalbewegung zwischen 10 und 12 km, also in unmittelbarer Nähe der Tropopause, liegt. In großen Zügen erreichen wir für $\xi_2 = 0,84$ eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Schema der Vertikalzirkulation, das auf S. 111 der Scherhag'schen Arbeit (18) widergege-

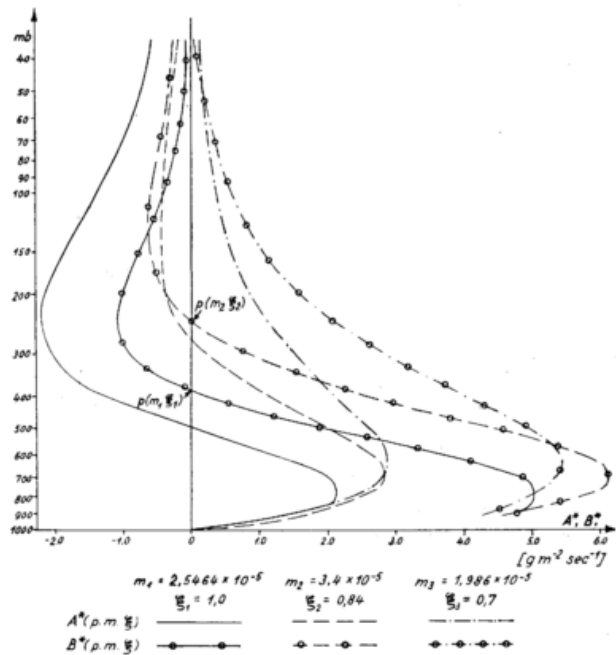


Abb. 12
Die Koeffizienten $A^*(p, m, \xi)$, $B^*(p, m, \xi)$ der Vertikalbewegung in $gm^{-2} sec^{-1}$

ben wird. Die Nullstelle finden wir dort unterhalb der Tropopause. In dieser Höhe findet zwar Massenzufluß statt, aber das Maximum liegt in unserem Modell rund 100 mb tiefer. Diese Differenz ist aus Gründen der Kontinuität auf die Dichteunterschiede in der Atmosphäre

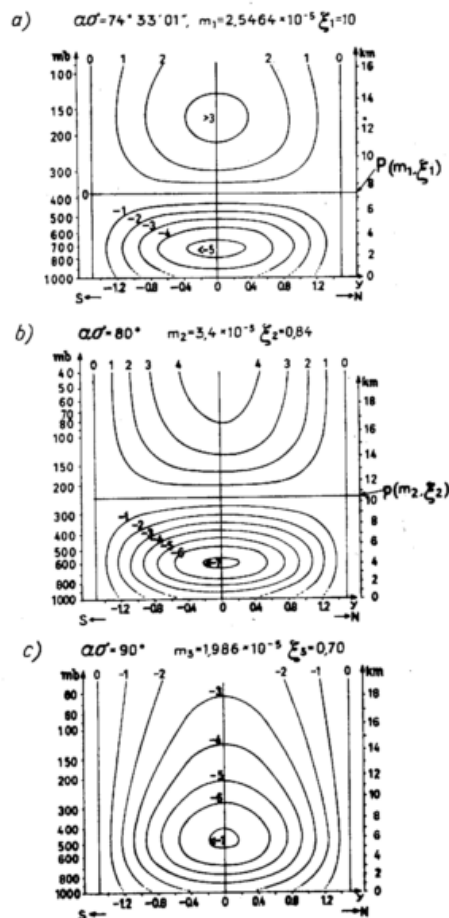


Abb. 13
Die Vertikalgeschwindigkeit im Meridionalschnitt durch das Bodendruckmaximum in $10^{-6} cm sec^{-1}$.

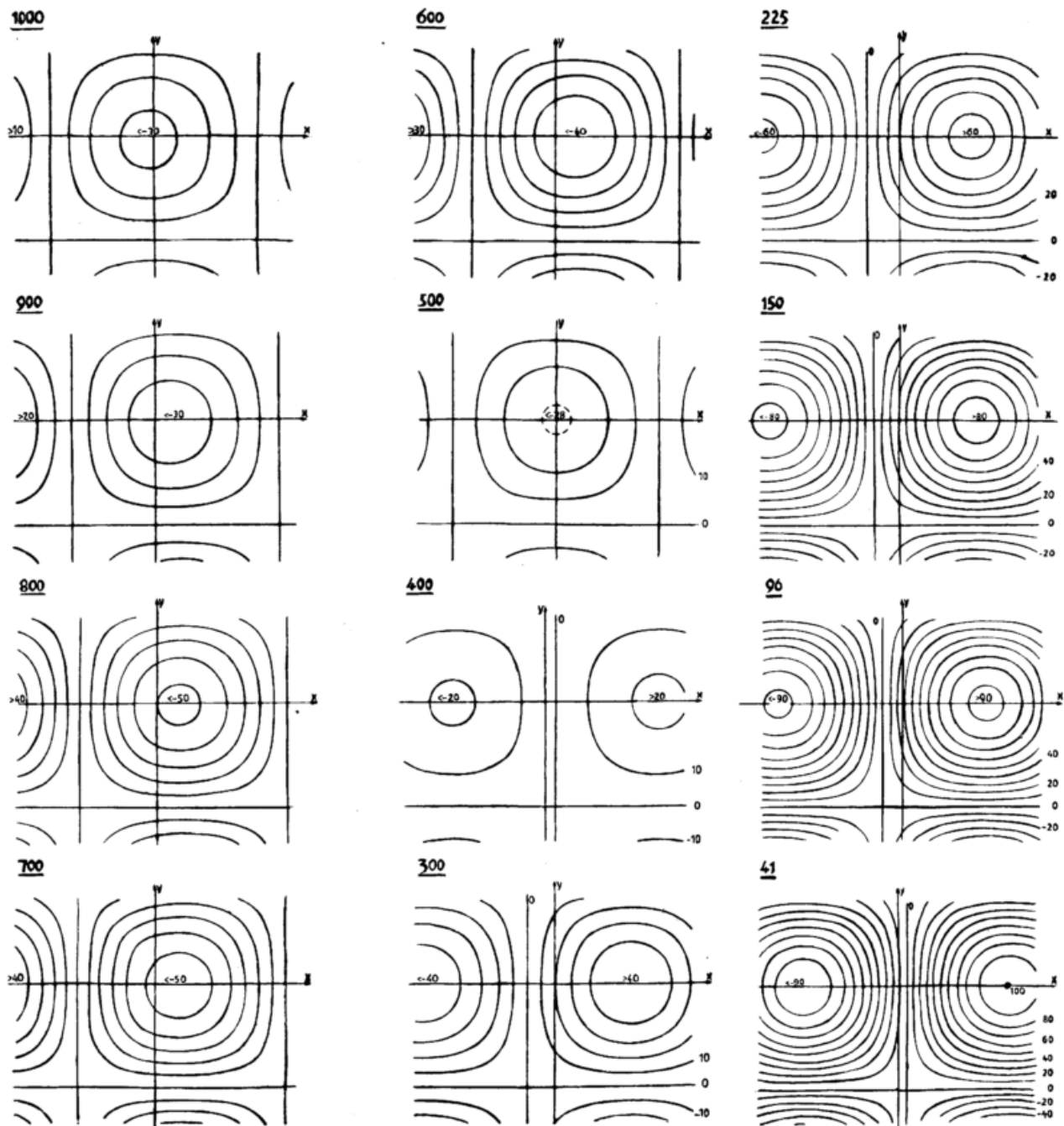


Abb. 14
Die Vertikalbewegung auf den Hauptisobarenflächen
in 10^{-2} cmsec $^{-1}$

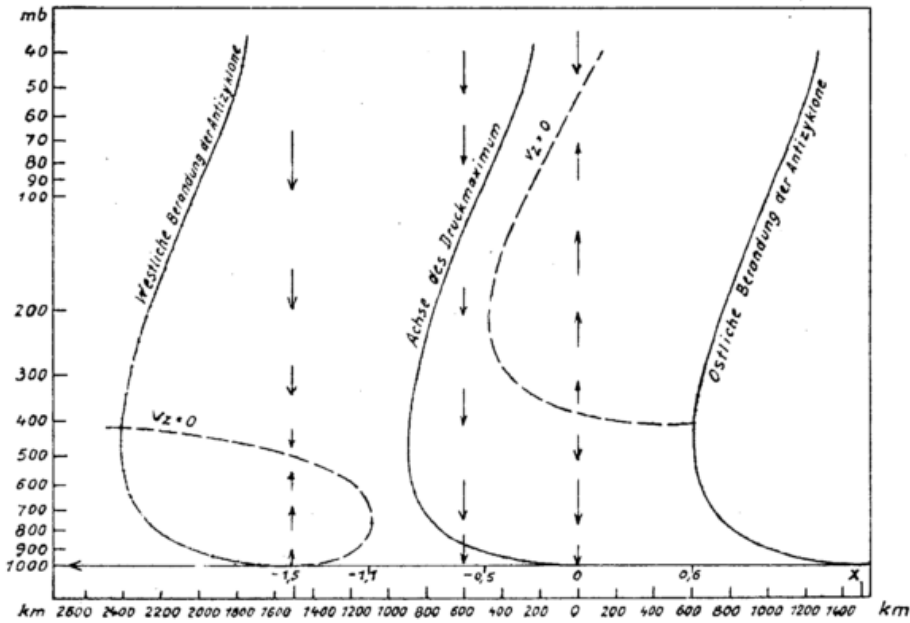


Abb. 14a
Zonalschnitt der Vertikalbewegung durch das Bodendruckmaximum (schematisiert) für $\xi = 1.0$.

zurückzuführen. Es besteht ein funktioneller Zusammenhang zwischen der horizontalen Divergenz im betrachteten x, y, p -Raum und dem vertikalen Massenfluß. Dort, wo die Divergenz verschwindet, hat der vertikale Massenfluß einen Extremwert, und an den Stellen, an denen die Divergenz (Konvergenz) ein Maximum aufweist, folgt für qv_z ein Wendepunkt des vertikalen Gradienten. Diese Abhängigkeit läßt sich aus den abgeleiteten Gleichungen leicht nachweisen.

Dem vertikalen Meridianschnitt (Abb. 13) entnehmen wir, daß in der unteren Troposphäre bis zur Höhe p ($m_{1/2}, \xi_{1/2}$) die absinkende Luftbewegung mit Werten bis zu $0,7$ [cm sec^{-1}] vorherrscht. Im oberen Teil der Troposphäre berechnen wir bis hoch hinauf in die Stratosphäre aufsteigende Luftbewegung. Aus Abb. 13c erkennen wir wegen $\xi_3 = 0,7$, daß sich die absinkende Luftbewegung bis in die obere Stratosphäre hin durchsetzt. Da für diesen Wert die zweite Nullstelle der Divergenz nicht mehr im Bereich der Atmosphäre liegt, dürfte dieser Fall indiskutabel sein.

Es wird durchaus möglich sein, daß die Nullstelle der Vertikalbewegung je nach der troposphärischen Temperaturverteilung geringe Schwankungen aufweist. Im Mittel kann jedoch angenommen werden, daß sie als Folge der Temperaturgradientumkehr in Tropopausehöhe liegt. Dies erreichen wir, wie schon oben erwähnt, für $\xi_2 = 0,84$ bei 237 mb.

Das Feld der Vertikalbewegung weist in den berechneten Hauptisobarenflächen (Abb. 14) einige Unterschiede gegenüber der Verteilung der Divergenzen auf. Die Nullstellen der Divergenz fallen jeweils mit einer Isobarenfläche zusammen, während die Nullstellen der Vertikalbewegung alle Isobarenflächen schneiden. (Abb. 14a). Für warme Hochdruckgebiete wechselt im Bereich $-0,5 < x < -1,11$ die Vertikalbewegung innerhalb der Atmosphäre ihr negatives Vorzeichen nicht. Dieser Bereich liegt in allen Höhen in der Umgebung der Achse der betrachteten Antizyklone. Wir finden auf der Rückseite der Antizyklone z. B. bei $x = -1,5, y = 0$ bis zur 500 mb-Fläche aufsteigende Luftbewegung und erst darüber Absinken. Da der Berechnung von v_z die Wertepaare $\xi_1 = 1,0$ und $m_1 = 2,5464 \times 10^{-5}$ zugrunde liegen, geht aus früheren Überlegungen hervor, daß der Aufwärtsbewegung im betrachteten Punkte unterhalb 500 mb eine schwach labile Schichtung entspricht. Im

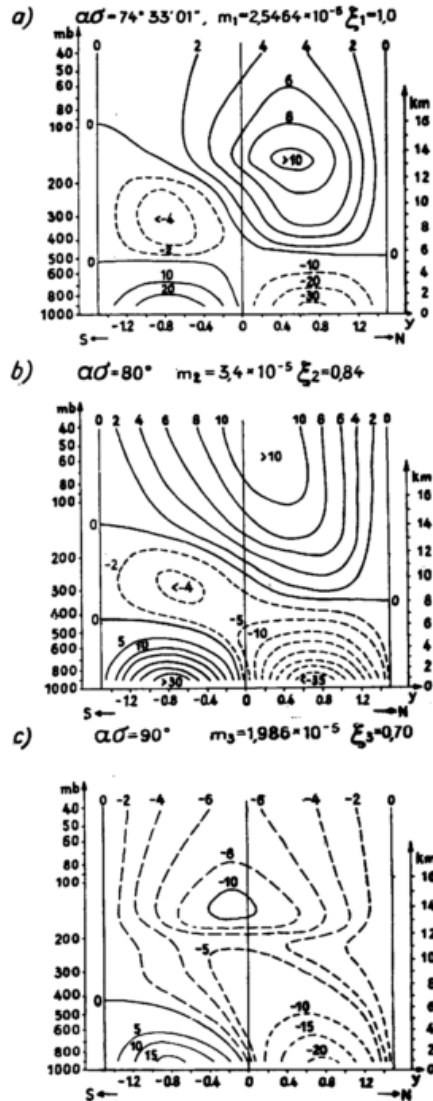


Abb. 15
Die Wärmequellen und -senken im Meridianschnitt durch das Bodendruckmaximum.

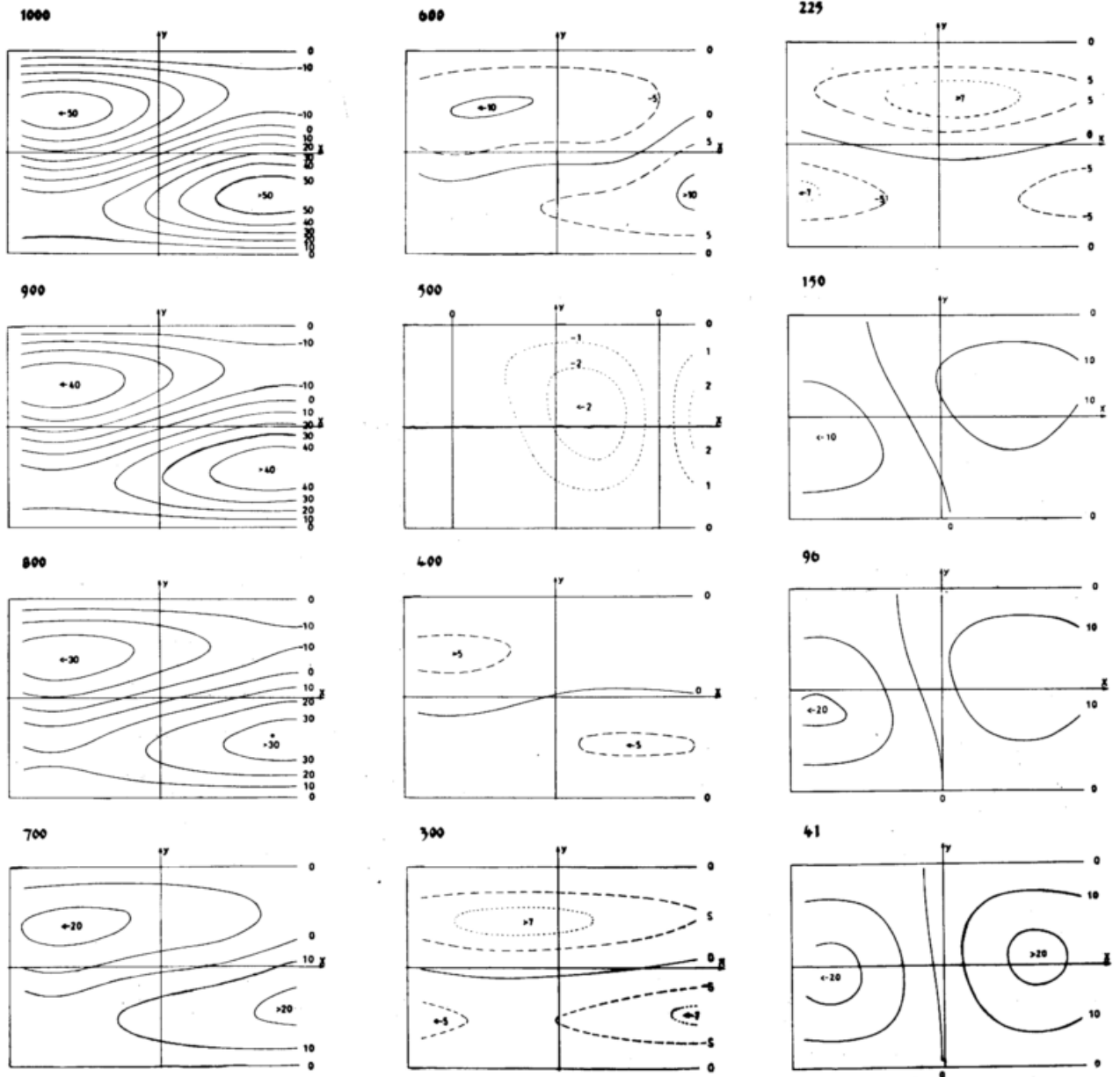


Abb. 16
Die Verteilung der Wärmequellen und -senken auf den
Hauptisobarenflächen in $10^{-6} \text{ cal g}^{-1} \text{ sec}^{-1}$.

hervor, daß wir bei vorgegebenem Koeffizienten m der Temperaturstörung die überlagerte meridionale Komponente $k(m, \xi)$ auch auf die Breitenabhängigkeit der Vertikal Komponente der Winkelgeschwindigkeit bzw. des vertikalen Wirbels der Erdrotation zurückführen können ($\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$). Durch die Einführung eines gegenläufigen meridionalen Temperaturgefälles gelingt uns eine Umkehr der Vertikalzirkulation derart, daß innerhalb der Troposphäre eine absinkende Luftbewegung vorherrscht, während in der unteren Stratosphäre Masse nach oben abtransportiert wird. Der notwendige Massenzufluß findet sowohl innerhalb der Troposphäre als auch in der Stratosphäre statt.

Zur Berechnung des Koeffizienten der meridionalen Temperaturverteilung halten wir die Reibungsverteilung L im Kern der Antizyklone konstant. Nach N. Shaw (17) schwankt diese zwischen 1,0 und 7,0 [$\text{g m}^{-2}\text{sec}^{-1}$], während H. Faust (15) aus der mittleren interdiurnen Temperaturänderung in 900 mb Werte zwischen 2,3 und 3,2 [$\text{g m}^{-2}\text{sec}^{-1}$] ermittelt. Zur Auswertung der Formel [14] benutzen wir einen mittleren Wert von $L = 4,0$ [$\text{g m}^{-2}\text{sec}^{-1}$] und erhalten bei quadratisch-zellulären Druckgebilden folgende Werte für $k(m, \xi)$:

Tab. 3

		$m \times 10^{-5}$	$\alpha \sigma(m, \xi)$	$k(m, \xi) \times 10^{12}$
1)	1,00	2,5464	74° 33' 01"	10,51
2)	0,84	3,4000	80°	9,65
3)	0,70	1,9860	90°	9,92
		[$\text{m}^3 \text{g}^{-1}$]		[$\text{m}^2 \text{g}^{-1}$]

Um die absoluten Topographien der Hauptisobarenflächen für eine warme Antizyklone nach Gl. [8] oder Gl. [9] zu berechnen, bestimmen wir nun nach Gl. [23] das mittlere Geopotential $\bar{H}(p)$ [gdDm] im troposphärischen Raum und nach Gl. [24] innerhalb der Stratosphäre. Als mittlere Bodentemperatur nehmen wir 9,0° C an. Wir kommen damit den Verhältnissen in unseren Breiten sehr nahe. Bei Annahme eines höhenunabhängigen vertikalen Temperaturgradienten von $\bar{\gamma} = 0,6 \times 10^{-2}$ [grad m^{-1}] sind wir zunächst in der Lage, nach der Polytropengleichung [22] die mittlere Temperatur der Isobarenflächen zu berechnen. Damit läßt sich dann leicht das mittlere Geopotential der Hauptisobarenflächen bestimmen. Die berechneten Werte für $\bar{T}(p)$ und $\bar{H}(p)$ sind in Tabelle 4 noch einmal zusammengestellt.

Tab. 4

1	2	3	4
p	$\bar{T}(p)$	$\bar{H}(p)$	$\rho(p)$
1000	9,0	0	$12,36 \times 10^{-3}$
900	3,8	85	11,33 ..
800	— 1,9	187	10,28 ..
700	— 8,2	281	9,21 ..
600	— 15,2	396	8,11 ..
500	— 23,4	529	6,98 ..
400	— 33,0	686	5,81 ..
300	— 44,8	880	4,58 ..
225	— 56,1	1064	3,61 ..
150	— 56,1	1316	2,41 ..
96	— 56,1	1593	1,54 ..
41	— 56,1	2125	0,66 ..
[m b]	[°C]	[g d D m]	[g m^{-3}]

In Spalte 4 wurde die berechnete Dichte der Hauptisobarenstufen zu Vergleichszwecken eingetragen. Ein Vergleich mit Tabelle 15, Seite 45 des Scherhag'schen Werks (18) zeigt die gute Übereinstimmung der auf diese Weise ermittelten Werte der Zustandsgrößen mit den aerologischen Normalwerten über Berlin.

Somit wären alle in den Gl. [8] bzw. [9] auftretenden Größen dem mittleren Zustand der Atmosphäre in mittleren Breiten angepaßt. Das mittlere Geopotential entnehmen wir der Tabelle 4, die Koeffizienten $k(m, \xi)$ und $\alpha \sigma(m, \xi)$ für $\xi = 1,0$ und $m = 2,5464 \times 10^{-5}$ [$\text{m}^3 \text{g}^{-1}$] der Tabelle 3, so daß eine exakte Berechnung der absoluten Topographien ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden kann.

Das Ergebnis dieser Berechnung zeigt die Abb. 4. Die Isopotentiale wurden für einen Abstand von je 4 dynamischen Dekametern gezeichnet. Man erkennt aus der graphischen Darstellung eine nach Westsüdwest verschobene Achse des Druckmaximums, wobei der horizontale Druckgradient mit der Höhe zunimmt, in 500 mb (für $\xi = 1,0$) sein Maximum erreicht, um dann bei gleichzeitigem Zurückwandern der Achse wieder abzunehmen. Im Zentrum des Bodenhochs sind die Isopotentiale fast kreisrund und geschlossen, während sie im Schnittpunkt des Achsenkreuzes in der 500 mb-Fläche von antizyklonaler in zyklonale Krümmung übergehen. Ein noch weiteres Auswandern des Druckmaximums nach Westen erhalten wir für noch kleinere Werte der Temperaturstörung. H. Faust (15) ermittelte die Schicht, in der der horizontale Druckgradient seine stärkste Ausprägung erfährt (Extrem-schicht) unterhalb 600 mb. Bei der Besprechung des Massenhaushaltes werden wir noch näher auf diese Erscheinung eingehen. Es besteht ein funktioneller Zusammenhang zwischen der Höhe der Extremschicht, der Höhe der maximalen (minimalen) Vertikalgeschwindigkeit und der Nullschicht, d. h. der Schicht, in der die Vertikalbewegung ihr Vorzeichen ändert.

Für fallende Werte von ξ verlagert sich sowohl die Höhe der Extremschicht als auch die Höhe der maximalen (minimalen) Vertikalgeschwindigkeit. Für $\xi = 1,0$ ermitteln wir $v_z = 0$ in 385 mb und das Maximum für $\frac{\partial H}{\partial n}$ in 500 mb, während für $\xi = 0,84$ die Vertikalgeschwindigkeit in 237 mb ihr Vorzeichen wechselt, wobei $\frac{\partial H}{\partial n}$ seinen höchsten Wert in 400 mb erreicht.

3.3. Berechnung der Temperaturverteilung auf den Hauptisobarenflächen

Unser Lösungsansatz [8] berücksichtigt ein zonales und ein planetarisches Temperaturgefälle durch die Einführung der Koeffizienten m und $k(m, \xi)$. Er verfügt weiterhin über eine mit der Erfahrung übereinstimmende Temperaturasymmetrie derart, daß das Temperaturmaximum nach Westsüdwest verschoben ist. Die höchsten Temperaturen treten also im Südwest-Quadranten und die niedrigsten im Nordost-Quadranten der Antizyklone am Boden auf. Mit zunehmender Höhe nimmt die Temperaturamplitude ab, erreicht in einer vom Parameter ξ abhängigen Höhe Gl. [33], [34] den Wert null, d. h. die Isobarenfläche fällt mit einer Isothermenfläche zusammen. Darüber kehrt sich die Temperaturamplitude um. Die Westseite der Antizyklone ist im stratosphärischen Raum kälter als ihre Vorderseite.

Unser Lösungsansatz berücksichtigt keine Inversionen. Diese dürften für die Dynamik vorliegender Druckgebilde nur von untergeordneter Bedeutung sein. Ein Vergleich der Größenordnung des zonalen zum meridionalen Temperaturgradienten nach Gl. [28] zeigt, daß das zonale Temperaturgefälle für die in Tab. 3 angegebenen Werte das 2,1- bis 3,6-fache des meridionalen beträgt. Der Austausch vollzieht sich in meridionalen Zirkulationsstreifen (6), so daß auf der Rückseite einer Antizyklone unserer Breiten ein Vorstoß subtropischer Luftmassen nach Norden und auf der Vorderseite Kaltluft aus dem Polargebiet nach Süden transportiert wird.

Bereich $-0,5 < x < +1,5$ folgt in der unteren Troposphäre Absinken und darüber Aufsteigen.

3.5. Die räumliche Verteilung der Wärmequellen und -senken in einer stationären Antizyklone

Zur Aufrechterhaltung der Stationarität unseres Modells muß eine der Dynamik entsprechende Verteilung der Wärmequellen gefordert werden. Ihre vertikale Verteilung wird in der Hauptsache durch die Annahme eines höhenunabhängigen vertikalen Temperaturgradienten bestimmt. Sie ist insbesondere der dynamischen Struktur des Modells, mit einer aus der Kontinuitätsgleichung folgenden Verteilung der Vergenzen und des vertikalen Massenflusses, angepaßt. Während die Diskussion des Feldes der Vergenzen und auch der Vertikalbewegung keinerlei Schwierigkeiten bereitet, läßt sich die räumliche Verteilung der Wärmezufuhr und der Wärmeabgabe nach der abgeleiteten Gleichung [72] physikalisch weit schwieriger erklären, zumal kaum exakte und gesicherte Beobachtungen zur Verfügung stehen (vgl. H. Philipps (20)).

Auf Grund der berechneten Temperaturverteilung stellt sich eine thermisch gebundene Zirkulation zwischen den räumlichen Gebieten der Wärmequellen ($\frac{dQ}{dt} > 0$) und denen der Wärmesenken ($\frac{dQ}{dt} < 0$) ein. Die Wärmezufuhr (Wärmeverlust) kann im allgemeinen auf die Absorption (Emission), die Turbulenz und auch Kondensation (Verdampfung) zurückgeführt werden.

Die Berechnung der Wärmequellen erfolgte nach den Gleichungen [69], [70] und [72]. Dabei wurden die in der Terminologie angegebenen Werte für c_p , Γ , γ und die bereits nach Gl. [41], [42] und [63] berechneten Werte für v_z und $\bar{\gamma}$ zunächst für positive Werte des Koeffizienten m der Temperaturstörung zugrundegelegt. Die Berechnung wurde graphisch dargestellt und der Arbeit als Abb. 15 und Abb. 16 hinzugefügt. Abb. 15 zeigt die Gebiete der Wärmeaufnahme (Wärmeverluste) im vertikalen Meridianschnitt. Im Bereich der Stratosphäre vereinfacht sich zur Berechnung der Wärmequellen Gl. [73], indem wir $\bar{\gamma} = 0$ und $T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\bar{\gamma}}{g}} = \bar{T} (0,225 p_0)$ nach Gl. [22] setzen. Abb. 16 zeigt die Verteilung auf den Hauptisobarenflächen nach Gl. [72] für $\xi_1 = 1,0$, $m_1 = 2,5464 \times 10^{-5}$ und $\alpha\sigma_1(m_1, \xi_1) = 740 33' 01''$. Bei der numerischen Auswertung der Gl. [72] gingen wir wegen der angenommenen Isothermie in der Stratosphäre ebenso vor wie beim Meridianschnitt.

Nach Abb. 15 finden wir im Bereich der unteren Troposphäre auf der nördlichen Seite des Bodendruckmaximums eine Kältequelle, darüber in der oberen Troposphäre und Stratosphäre eine Wärmequelle, während auf der Südseite in den bodennahen Atmosphärenschichten eine Wärmequelle und darüber eine Kältequelle berechnet wurden. Die Absolutbeträge der Wärmequellen und -senken hängen ebenfalls wie die Temperaturverteilung vom Koeffizienten m der Temperaturstörung ab. Abb. 15c wurde für den kleinsten Wert von m und ξ (s. Tab. 3) berechnet. Am Boden erhalten wir Werte, die dem Betrage nach um das Fünffache zu hoch liegen, eine Folge des zu großen horizontalen Temperaturgradienten. In vertikaler Richtung erfolgt die Abnahme der Wärmezufuhr (Wärmeabgabe) recht schnell. Sie wechselt noch im troposphärischen Raum als Funktion von y ihr Vorzeichen. Erstreckt man die polytrope Temperaturverteilung der Hauptisobarenflächen bis zur Grenze der Atmosphäre, so erhält man entsprechend der Temperaturabnahme im stratosphärischen Raum wesentlich kleinere Werte für $\frac{dQ}{dt}$.

Zur physikalischen Interpretation der Gl. [74] gehen

wir auf Gl. [71] zurück und erhalten mit [1] und [44]

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \left[v \operatorname{grad}_h T - \left(\frac{g}{R} - \Gamma \right) v_z + \frac{p}{R\varrho} \left(\operatorname{div} v - g\varrho \frac{\partial v_z}{\partial p} \right) \right]. \quad [91]$$

Wir sind damit in der Lage, die räumliche Verteilung der Wärmequellen und -senken mit Hilfe physikalisch vorstellbarer Ausdrücke zu erklären.

Im Zentrum der Antizyklone ($x = y = 0$) resultiert dann bei Verwendung des Windes nullter Näherung — für diesen wurden die Wärmequellen und -senken nach Gl. [72] berechnet — aus [91]

$$\frac{dQ}{dt} = -c_p \left[\left(\frac{g}{R} - \Gamma \right) V_z - \frac{p}{R\varrho} \left(\operatorname{div} v - g\varrho \frac{\partial v_z}{\partial p} \right) \right] \quad [92]$$

und unter Benutzung der statischen Grundgleichung

$$\frac{dQ}{dt} = -c_p \left[\left(\frac{g}{R} - \Gamma \right) - \frac{g p}{R\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial p} \right] \quad [93]$$

sowie nach einigen Umformungen

$$\frac{dQ}{dt} = -c_p \left[\Gamma + \frac{\partial T}{\partial z} (o, o, p, m, \xi) \right] v_z. \quad [94]$$

Somit haben wir die Verteilung der Wärmequellen und -senken auf die Differenz der verwendeten Temperaturgradienten zurückgeführt. An der Stelle $x = y = 0$ ist der Ausdruck in der eckigen Klammer größer null, d. h. der trockenadiabatische Temperaturgradient ist größer als der dort herrschende vertikale Temperaturgradient $\frac{\partial T}{\partial z} (o, o, p, m, \xi)$. Dies geht auch aus Gl. [93]

hervor, da der Ausdruck in der eckigen Klammer für alle Werte von p als nahezu konstant angesehen werden kann. Die Verteilung der Wärmequellen und -senken ist also im betrachteten Punkte proportional der Vertikalgeschwindigkeit und hat auch das gleiche Vorzeichen wie v_z . Diese Tatsache erkennen wir auch aus den Abb. 12, 13 und 15. Da für $\xi = 1,0$ die 500 mb-Fläche eine Isothermenfläche ist, gilt ebenfalls Gl. [94]. Wäre nun für alle Werte von x und y der vertikale Temperaturgradient eine Konstante, so müßten die Linien $v_z = \text{const.}$ (Abb. 14) mit den Linien für $\frac{dQ}{dt} = \text{const.}$ zusammenfallen (Abb. 16), d. h. die gleiche Konfiguration zeigen. Wir ersehen aber aus Abb. 16, daß dies nicht exakt der Fall ist und auch nicht sein kann, da $\frac{\partial T}{\partial z}$ eine Funktion von x und y ist. An den Stellen, an denen $v_z = 0$ berechnet wurde, folgt auch $\frac{dQ}{dt} = 0$, während im Südwestquadranten größere Werte für $\frac{dQ}{dt}$ berechnet wurden, da dort der vertikale Temperaturgradient größer ist, aber immer kleiner als Γ bleibt.

Aus Gl. [91] resultiert ganz allgemein

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \left[v \operatorname{grad} T + \left(\Gamma + \frac{\partial T}{\partial z} \right) v_z \right] \quad (\text{cal g}^{-1} \text{sec}^{-1}), \quad [95]$$

womit wir die Anordnung der Wärme- und Kältequellen auf eine thermisch gebundene Zirkulation — also auf das Strömungs- und Temperaturfeld selbst — zurückgeführt haben (21). Mit Gl. [95] läßt sich leicht nachweisen, daß bei vorgegebener Verteilung der Wärmequellen und -senken die Vertikalzirkulation ihr Vorzeichen im Bereich instabiler Schichtung wechselt.

3.6. Der Wind und die Windscherung

Bevor wir zusammenfassend und abschließend auf die Struktur stationärer Antizyklonen eingehen, wollen wir uns noch einmal mit der Verteilung der Zonal-komponente des quasigeostrophischen Windes im Meridianschnitt durch das Zentrum der Antizyklone am Boden, sowie mit der Windscherung als Maß der Baroklinität der Atmosphäre, befassen.

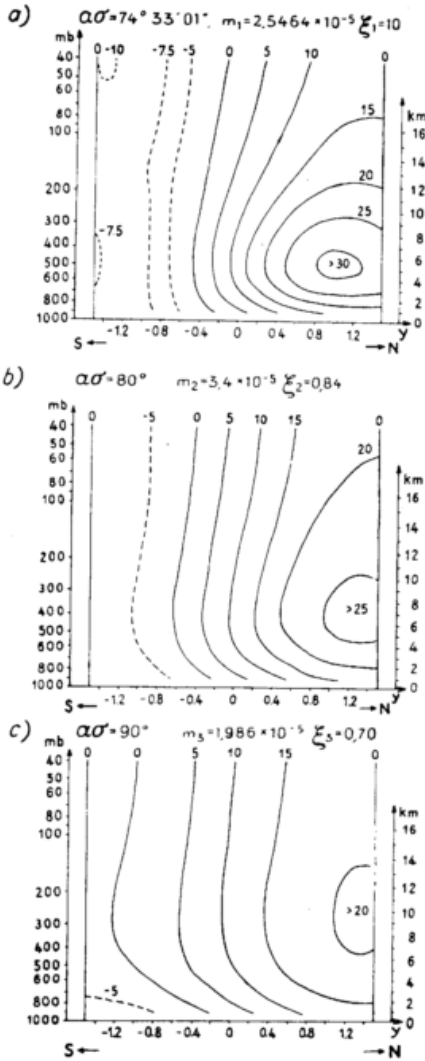


Abb. 17
Die Zonalkomponente des quasi-geostrophischen Windes im Meridionalschnitt für $x = 0$.

Gleichung [45] führt mit [9] für die Zonalkomponente des Windes erster Näherung bei quadratisch zellulären Gebilden für $x = 0$ auf

$$V_x = \frac{f p_0}{f_0} \sin(\xi \pi \xi(p)) + \frac{\alpha A(p, m, \xi)}{f_0} \cos \psi \{ \sin(\alpha y) + \dots \} + \frac{\alpha^2 p_0}{f_0^2} \sin(\xi \pi \xi(p)) \cos \alpha y + \frac{\alpha^3 A^2(p, m, \xi)}{f_0^3} \sin(\alpha y) \cos(\alpha y) \quad [92]$$

Die Berechnung wurde ebenfalls für die Wertetripel der Tab. 3 durchgeführt und in Abb. 17 graphisch dargestellt. Das Windmaximum verlagert sich für fallende Werte von ξ nach oben. Erfahrungsgemäß treten die größten Windgeschwindigkeiten unmittelbar unterhalb der Tropopause auf. Das Windmaximum liegt für $\xi = 1,0$ (Abb. 17a) mit Werten größer 30 [m/sec] zu niedrig, da nicht anzunehmen ist, daß die Tropopause in unseren Breiten bis zur 500 mb-Fläche absinkt. Es bleibt ebenso unwahrscheinlich, daß die Vertikalzirkulation im gesamten Atmosphärenbereich abwärts gerichtet ist, was für $\xi = 0,7$ (Abb. 13c) der Fall war. Somit dürften die Verhältnisse, wie sie durch die Abb. 17a und c dargestellt werden, keineswegs den Erfahrungstatsachen entsprechen. Ein Vergleich mit den mittleren Windverhältnissen über dem nordamerikanischen Kontinent (19) zeigt die recht gute Übereinstimmung mit unserer berechneten Verteilung für $\xi = 0,84$ (Abb. 17b). Das Windmaximum liegt dort mit Werten größer 20 [m/sec] 3 km unterhalb der Tropopause. Wir finden es ebenfalls 3 km unterhalb der Tropopause mit Werten größer 25 [m/sec].

Ein Maß für die Baroklinität der Atmosphäre liefert uns Abb. 17b, in dem wir die Scherung der Zonalkomponente des quasigeostrophischen Windes, also die Größe $\frac{\partial v_x}{\partial z} \equiv \frac{\partial u}{\partial z}$ berechnen. Um sie zu bestimmen, habe ich nach dem hierfür üblichen Verfahren die Differenz aus der Geschwindigkeit an der Tropopause und am Boden gebildet und durch die Tropopausehöhe dividiert. Das Ergebnis zeigt Abb. 18. Die ausgezogene Kurve gibt die beobachtete Windscherung nach E. Ekhardt (19) im Sommer wieder; die gestrichelte Kurve die berechnete Windscherung nach der Verteilung der Zonalkomponente des Windes erster Näherung. Man erkennt auch daraus, daß die Übereinstimmung mit unserer Theorie recht gut ist.

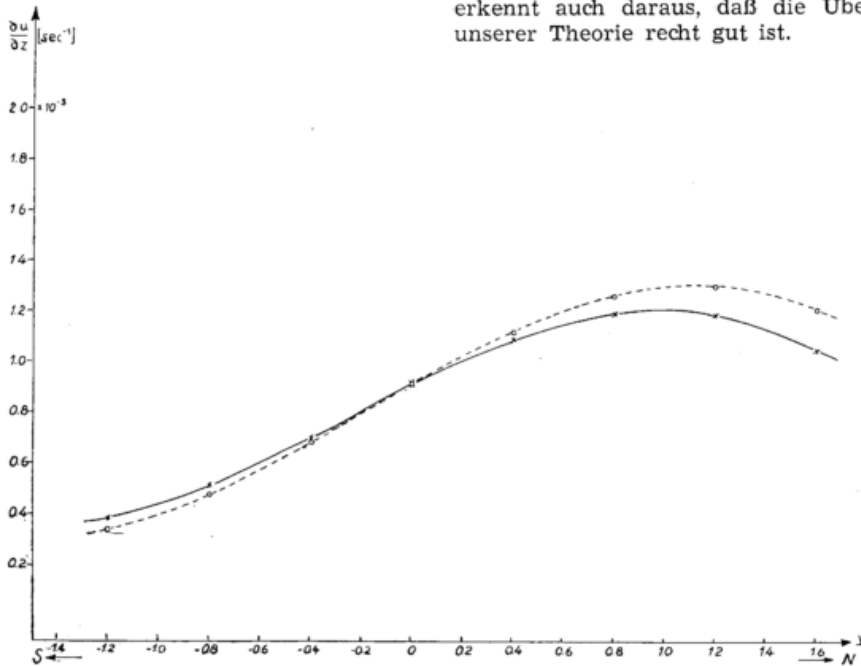


Abb. 18
Die Windscherung: in 10^{-3} sec^{-1}
ausgezogene Kurve — beobachtete mittlere Windscherung im Sommer nach E. Ekhardt (11) gestrichelte Kurve — nach der berechneten Verteilung der Zonalkomponente des Windes erster Näherung (Abb. 17).

4. Zusammenfassende Betrachtungen des analytischen Modells

Unser Lösungsansatz [8] bzw. [9] enthält als Parameter die Größe ξ . Sie beeinflusst zwangsläufig die den Massenhaushalt regulierenden Vorgänge. Wegen der Wirkung der Bodenreibung und der ablenkenden Kraft der Erdrotation finden wir in den bodennahen Luftschichten einen nach außen gerichteten Massenstrom. Dieser würde zum Abbau der Antizyklone führen, wenn die untere Divergenz nicht durch einen in der Höhe einwärts gerichteten Massenstrom kompensiert würde (Stationaritätsbedingung). Die Größe ξ hat weiterhin auf die Stabilität der vertikalen Schichtung Einfluß.

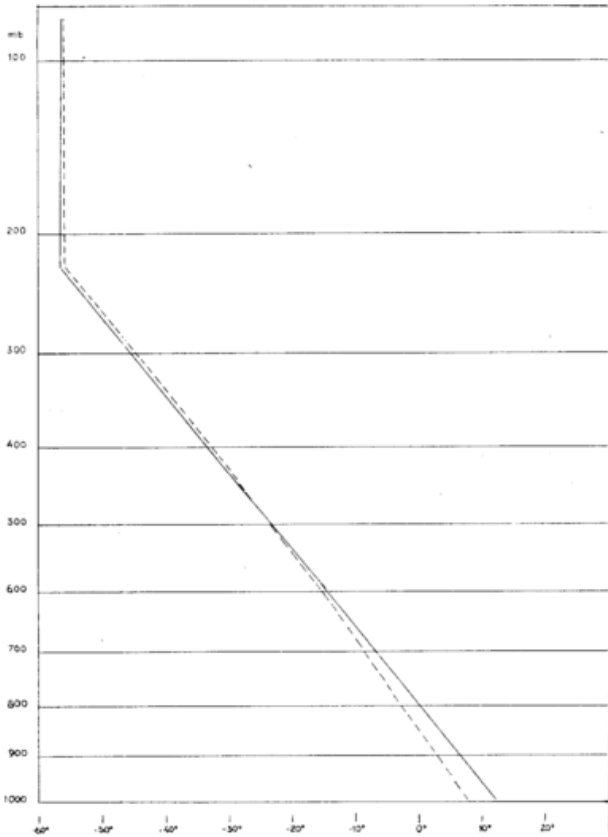


Abb. 19

Die vertikale Temperaturverteilung im Zentrum der Antizyklone bei konstantem m für $\xi_1 = 1,0$ und $\xi_2 = 0,85$.
Um diesen Einfluß zu veranschaulichen, habe ich die vertikale Temperaturverteilung bei konstanter Tempe-

raturstörung m für zwei Werte von ξ an der Stelle $x = y = 0$ (Abb. 19) berechnet und dargestellt. Wir erkennen auf der Abbildung, daß bei einer Änderung des Parameters von 1,0 auf 0,85 die untersten Troposphärenschichten kälter werden, während sich die Substratosphäre erwärmt. Die Stabilität der Schichtung nimmt bei gleichzeitiger Hebung der Nullschicht (vgl. Abb. 13) zu. Für $\xi = 1,0$ fanden wir die Nullschicht in 395 mb, während sie für $\xi = 0,85$ in 215 mb liegt. Nimmt also die Stabilität der Schichtung zu (ab), verlagert sich die Nullstelle der Vertikalzirkulation nach oben (unten). Dabei herrscht vollständige Kompensation als Folge des Strömungsgleichgewichtes.

Im Verlauf der numerischen Berechnung einiger Modelle hat sich herausgestellt, daß wir bezüglich der vertikalen Temperaturgradienten eine Korrektur unseres speziellen Lösungsansatzes [8] vornehmen mußten. Es zeigt sich jedoch, daß sich diese Korrektur qualitativ auf die Verteilung der übrigen Feldgrößen kaum auswirkt. Um die vertikale Struktur einer stationären warmen, sowie kalten Antizyklone zu erläutern, habe ich noch einmal zusammenfassend die vertikale Verteilung aller Feldgrößen für verschiedene Werte von m und ξ an der Stelle $x = y = 0$ nach dem Ansatz [8] berechnet und dargestellt.

Die Abb. 20 und 21 zeigen die Struktur einer warmen Antizyklone ($m > 0$) für zwei verschiedene Werte von ξ . Für $\xi = 1,0$ (Abb. 20) berechneten wir die Nullstelle der Vertikalzirkulation in 395 mb, sie rückt für $\xi = 0,85$ (Abb. 21) bis zu 215 mb hinauf. Unterhalb herrscht abwärts gerichtete Vertikalbewegung mit Werten bis zu $-0,55$ [cm/sec]. Der vertikale Massenfluß hat dort einen Extremwert, wo die Divergenz der reibungsfreien Bewegung eine Nullstelle hat. Wir finden im unteren Bereich der Troposphäre bis 700 mb positive Divergenz, darüber bis in die Substratosphäre negative Divergenz (Konvergenz) und in der Stratosphäre wieder eine geringe positive Divergenz. Die Verteilung der Wärmequellen richtet sich nach dem Vorzeichen der Vertikalzirkulation. Dies ist auch aus den Grundgleichungen ableitbar. Bei abwärts gerichteter Strömung folgt bis zur Nullschicht eine Kältequelle, darüber, der Kompensation entsprechend, eine Wärmequelle. Im Mittel finden wir in den untersten Atmosphärenschichten Werte um $-0,25$ [cal/g Tag]. Dies entspricht in sehr guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen anderer Autoren einer Temperaturänderung von 1,0 [grad/Tag]. Aus der Abb. 20 geht weiterhin ganz eindeutig hervor, daß wir für $\xi = 1,0$ von den wahren Verhältnissen weit entfernt sind. Wir berechneten an der Tropopause, dort wo die stratosphärische Isothermie einsetzt, wegen der

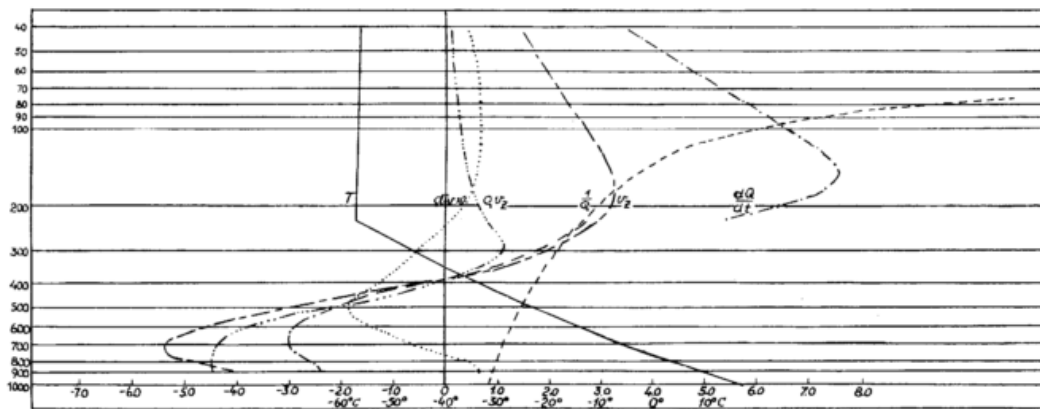


Abb. 20

Die vertikale Verteilung der berechneten Größen $T, \text{div } v, qv_z$,
 $v_z \frac{dQ}{dt}$ im Zentrum einer warmen stationären Antizyklone
für $\xi = 1,0; m = 2,5464 \times 10^{-5}, \sigma a = 73^{\circ}33'01''$

— T ($^{\circ}\text{C}$) —····· $\text{div } v$ [10^{-6}sec^{-1}] —····· qv_z [$10^3 \text{m}^2 \text{g}^{-1}$] —····· qv_z [$\text{gm}^2 \text{sec}^{-1}$] —····· v_z [10^4m sec^{-1}] —····· $-\frac{dQ}{dt}$ [$10^{-4} \text{cal g}^{-1} \text{sec}^{-1}$]

Unstetigkeit des vertikalen Temperaturgradienten, eine Sprungstelle für $\frac{dQ}{dt}$. Aus der Theorie folgt also, daß die Nullschicht in Tropopausennähe liegen muß. Dies ist für $\xi = 0,85$ (Abb. 21) der Fall. Die berechneten Werte für $\frac{dQ}{dt}$ gehen dann auch stetig ineinander über.

Analog zu den Verhältnissen in einer warmen Antizyklone habe ich nun einmal für die Werte $\xi = 0,84$, $m = -3,0 \times 10^{-5}$ und $\alpha \sigma (m, \xi) = 40^\circ 24'$ (Temperaturminimum) die vertikale Verteilung für eine kalte Antizyklone berechnet und graphisch dargestellt. Der Aufbau ist ungleich komplizierter und zeigt kaum eine Übereinstimmung mit warmen Hochdruckgebieten. Über

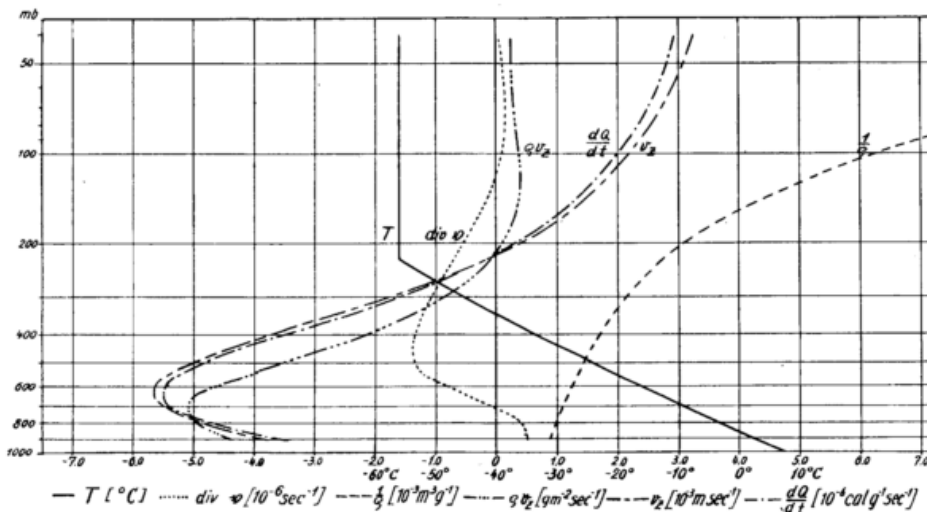


Abb. 21
Die vertikale Verteilung der berechneten Größen $T, \text{div } v, q, v_z, \frac{dQ}{dt}$ im Zentrum einer warmen stationären Antizyklone für $\xi = 0,85; m = 2,0 \times 10^{-5}, \alpha \sigma = 94,4^\circ$

der kalten Antizyklone am Boden finden wir eine kalte zyklonale Höhenströmung. Dies zeigen die Temperaturverhältnisse sehr deutlich. Die Troposphäre ist um 5° bis 10° kälter, während die Stratosphäre, deren Tropopause tiefer liegt, um 10° wärmer ist. Fast im gesamten Atmosphärenbereich herrscht eine einströmende Komponente. Geringe positive Divergenz findet

lediglich zwischen 500 mb und 300 mb statt. Das Zentrum der Antizyklone verlagert sich mit zunehmender Höhe schnell nach Osten (zum Temperaturmaximum hin). Wir befinden uns in den untersten Schichten in der Südströmung auf der Westseite der Antizyklone. Der Wind weht in südlicheren Breiten mit einer höheren Geschwindigkeit als in nördlichen. Es kommt daher

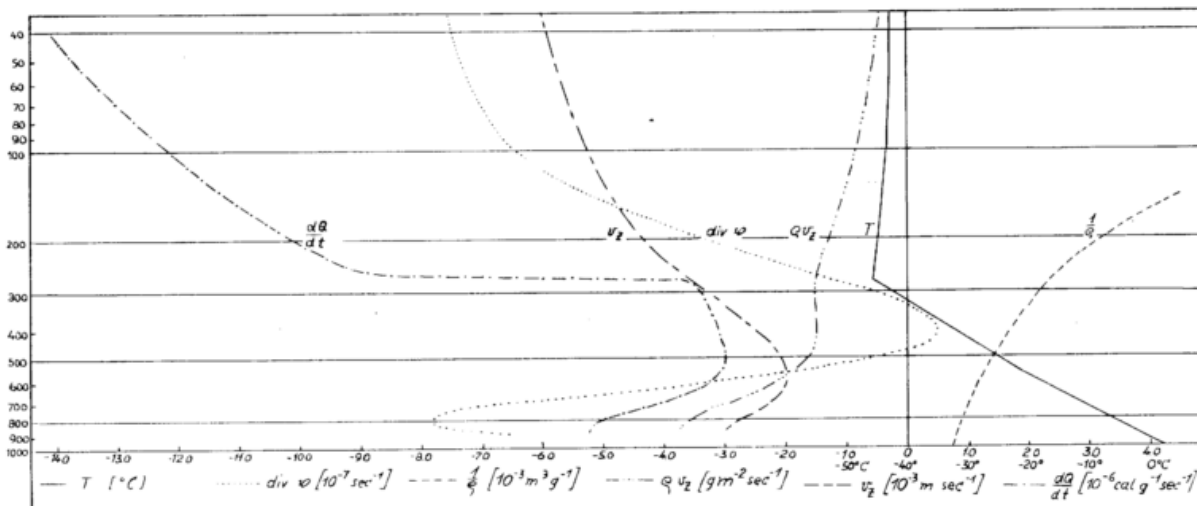


Abb. 22
Die vertikale Verteilung der berechneten Größen $T, \text{div } v, q, v_z, \frac{dQ}{dt}$ in einer kalten stationären Antizyklone für $\xi = 0,84; m = 3,0 \times 10^{-5}, \alpha \sigma = 40^\circ 24'$

zum Massenstau auf der Westseite der kalten Antizyklone. In 850 mb liegt bei gleichzeitiger Tendenz der Auflösung der höchste Druck 1,5 km vom Bodendruckmaximum entfernt. Aus der Erfahrung wissen wir (14), daß über kalten Antizyklonen ein Höhentrog oder gar ein ausgeprägtes Tiefdruckgebiet liegt. Die Strömung

ist in diesen Höhen nicht antizyklonal, sondern zyklonal gekrümmt. Wir befinden uns, wie auch aus synoptischen Beispielen hervorgeht (z. B. Wetterlage vom 13. 2. 1948), wieder auf der Westseite einer warmen Antizyklone. Beim Übergang von antizyklonaler zur zyklonalen Isobarenkrümmung resultiert, wie aus dem

theoretisch berechneten Beispiel hervorgeht, bis in große Höhen Strömungskonvergenz. Das Temperaturminimum liegt im Nordosten der Antizyklone. Die Kaltluftmassen werden mit Nordwestwind in den Tiefdrucktrog hineingesteuert. Dabei herrscht bis in große Höhen Absinkbewegung. Der vertikale Massenfluß (ρv_z) nimmt mit zunehmender Höhe ab. Er beträgt im Mittel etwa $-1,4$ [g/m²sec], was einer Vertikalgeschwindigkeit von $-0,4$ [cm/sec] entspricht. Dies bedeutet, daß die abwärts gerichtete Komponente in der kalten Antizyklone geringer ist als in der warmen. Entsprechend dem Vorzeichen der Vertikalzirkulation bleibt $\frac{dQ}{dt}$ im ganzen Bereich negativ (Kältequelle).

5. Schlußwort

Unter Benutzung der bereits von G. Hollmann (1) abgeleiteten Integro-Differentialgleichung wurden auf Grund eines erweiterten Lösungsansatzes Modelle warmer Antizyklonen konstruiert.

Wir haben uns dabei von dem Gedanken leiten lassen, den wahren Verhältnissen, so wie sie uns aus der Synoptik her bekannt sind, möglichst nahe zu kommen. Es blieb unumgänglich, den Lösungsansatz [8] mit der allgemeinen Funktion $\sin(\xi\pi z^2(p))$ wegen der der

Erfahrung widersprechenden Temperaturverteilung abzuändern. Auf die Dynamik kalter Antizyklonen sind wir nur flüchtig eingegangen. In dieser Richtung kann die Untersuchung fortgesetzt werden. Analog könnte man ebenso den Aufbau kalter und warmer Zyklonen modellmäßig darstellen und mit Wetterlagen vergleichen.

Dabei dürfen wir jedoch nicht vergessen, daß die auf diese Weise untersuchten Modelle atmosphärischer Grundzustände immer Idealfälle stationärer Druckgebilde darstellen. Es wird dabei nichts über das Zustandekommen solcher Drucksituationen ausgesagt und bleibt völlig offen, ob die zu diesen Modellen berechnete Verteilung der Wärmequellen und -senken in Wirklichkeit existiert, obwohl sich die berechneten mittleren Werte aller Feldgrößen

$$\left(v_x, v_z, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial n}, H, \text{div } v, T, \frac{dQ}{dt} \right)$$

den in der Natur vorkommenden sehr gut anpassen. Ein Beweis, daß die analytische Methode sehr brauchbar ist. Es muß jedoch angestrebt werden, nicht von der Stationarität zellulärer Bodendruckfelder auszugehen, sondern die Nichtstationarität (z. B. der Instabilität planetarischer Wellen) als Ausgang zu wählen, und die so berechneten quasistationären Modelle einer eingehenden dreidimensionalen Analyse zu unterziehen.

Literatur

- (1) Hollmann, G.: Zur Dynamik stationärer atmosphärischer Druckfelder. Abh. Meteor. Hydrol. Dienst DDR Nr. 12 (1952)
- (2) Ekholm, N.: Wetterkarten der Luftdruckschwankungen. Meteor. Z. **21**, 345 (1904)
- (3) Pepler, W.: Über die Schwankungszentren des Luftdruckes. Wetter **24**, 121 (1907)
- (4) Palmén, E.: Analyse der dynamischen Druckschwankungen der Atmosphäre. Beitr. Phys. fr. Atm. **19**, 55 (1933)
- (5) Runge, H.: Stationäre warme und kalte Antizyklonen in Europa. Diss. Univ. Leipzig (1931)
- (6) Baur, F.: Die Formen der atmosphärischen Zirkulation in den gemäßigten Breiten. Gerlands Beitr. Geophys. **34**, 264 (1931)
- (7) Wagemann, H.: Ein Beitrag zur Erklärung der Luftdruckverteilung über dem Atlantischen Ozean. Ann. Hydrogr. **71**, 236 (1943)
- (8) Rossby, C. G.: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. J. Marine Res. **2**, 38 (1939)
- (9) Ertel, H.: Neue atmosphärische Bewegungsgleichungen. Ann. Hydrogr. **68**, 421 (1940)
- (10) Ertel, H.: Über stationäre oszillatorische Luftströmungen auf der rotierenden Erde. Meteor. Z. **60**, 332 (1943)
- (11) Staff Members of the University of Chicago: On the general circulation of the atmosphere in middle latitudes. Bull. Amer. Meteor. Soc. **28**, 255 (1947)
- (12) Palmén, E.: Die Beziehung zwischen troposphärischen und stratosphärischen Temperatur- und Luftdruckschwankungen. Beitr. Phys. fr. Atm. **17**, 102 (1931)
- (13) Hann-Süring: Lehrbuch der Meteorologie. 5. Aufl. Leipzig, 1942, S. 697/98
- (14) Southwell, R. V.: Relaxation methods in theoretical physics. Oxford, 1949
- (15) Faust, H.: Zur Dynamik der Hoch- und Tiefdruckgebiete. Ber. Dt. Wetterd. US-Zone Nr. 35, 92 (1952)
- (16) Hollmann, G.: Beitrag zu einer Theorie zur Entstehung ortsfester Druckgebilde. Z. Meteor. **5**, 258 (1951)
- (17) Shaw, N.: Manual of Meteorology. Vol. II, Cambridge 1936
- (18) Scherhag, R.: Wetteranalyse und Wetterprognose. Berlin 1948
- (19) Ekhart, E.: Neue Beiträge zum Aeroklima Nordamerikas. Geofis. pura e appl. **12**, 210 (1948)
- Haarländer, H.: Meteorologie des freien Luftmeeres. Z. Meteor. **4**, 229 (1950)
- (20) Philipps, H.: Theorie der dynamischen Felder im Bereiche einer Druckstörung. Z. Meteor. **2**, 18 (1948)
- (21) Wippermann, F.: Versuch einer quantitativen Ermittlung der Wärmequellen und -senken in einer rotationssymmetrischen Zirkulation. Ann. Meteor. **5**, 358 (1952)
- (22) Flohn, H.: Über kalte metastabile Hochdruckgebiete. Meteor. Rdsch. **2**, 67 (1949)

