

DEUTSCHER WETTERDIENST

Seewetteramt

---

Einzelveröffentlichungen

Nr. 21

Zur Theorie der Verdunstung  
der natürlichen Erdoberfläche

Mit Anhang: Verdunstungsberechnungen auf Grund der neuen  
Verdunstungsformel nebst Diskussion ihrer Ergebnisse

von Dr. Willi Brogmus

Hamburg

1959

# EINZELVERÖFFENTLICHUNGEN des Seewetteramtes

	<i>DM</i>		<i>DM</i>
Nr. 1 (1953): Höhe, Länge und Steilheit der Meereswellen im Nordatlantik (H. U. Roll) .....	3,50	Nr. 11 (1956): Beiträge zur Klimakunde Südwest-Arabiens. Das Klima von Sana. Das Klima von Jemen (C. Rathjens sen., C. Rathjens jun., E. Samlenski und G. Kerner) .....	2,50
Nr. 2 (1952, Nachdruck 1953): Die Nebelverhältnisse der Unterelbe im Jahrzehnt 1939–1948 (G. Hartenstein und H. Markgraf) .....	2,00	Nr. 12 (1957): Sturmweatherlagen bei Island 1950–1954 (H. O. Mertins) .....	3,50
Nr. 3 (1954): Die Nebelverhältnisse im Küstengebiet der Weser- und Emsmündung (P. Bintig und H. Markgraf) .....	2,00	Nr. 13 (1957): Meteorologische Beobachtungen von deutschen Feuerschiffen der Nord- und Ostsee (Bundesrepublik) 1953 ....	10,00
Nr. 4 (1954): Klimatologie der Nordwesteuropäischen Gewässer Teil 1: Temperatur des Oberflächenwassers und Temperatur-Differenz Luft–Wasser (H. J. Bullig und P. Bintig) Teil 2: Windverhältnisse (H. Markgraf und P. Bintig) .....	7,00	Nr. 14 (1957): Nebel in der Deutschen Bucht A: Das Nebelvorkommen bei den Feuerschiffen (P. Bintig) B: Synoptisch-aerologische Untersuchungen verbreiteter Dauernebel der südlichen Nordsee (H. Markgraf)	3,50
Nr. 5 (1954): Atlas der Monatswerte von Wassertemperatur, Wind und Bewölkung auf dem Seeweg Europa–Südamerika (H. J. Bullig) .....	12,00	Nr. 15 (1957): Meteorologische Beobachtungen von deutschen Feuerschiffen der Nord- und Ostsee (Bundesrepublik) 1954 ....	10,00
Nr. 6 (1954): Die Größe der Meereswellen in Abhängigkeit von der Windstärke (H. U. Roll) .....	5,00	Nr. 16 (1958): Zur Niederschlagsmessung auf See: Ergebnisse von Vergleichsmessungen auf Feuerschiffen und benachbarten Inseln (H. U. Roll) .....	1,30
Nr. 7 (1955): Die vorherrschenden Winde auf dem Atlantischen Ozean im Januar und Juli nach Beobachtungen deutscher Schiffe aus dem Zeitraum 1925–1939 (H. Markgraf) .....	3,50	Nr. 17 (1958) Statistik der Meereswellen in der Nordsee (O. Petri) .....	2,50
Nr. 8 (1956): Die Meereswellen in der südlichen Nordsee (H. U. Roll) .....	5,00	Nr. 18 (1958) Die winderzeugten Meereswellen. Teil I: Beobachtungen des Seeganges und Ermittlung der Windsee aus den Windverhältnissen (H. Walden). Heft 1: Text; Heft 2: Abbildungen .....	zusammen 12,50
Nr. 9 (1956): Laderaum-Meteorologie. Vorträge auf der Arbeitstagung am 20. Juni 1956 in Hamburg .....	3,00	Nr. 19 (1958): Meteorologische Beobachtungen von deutschen Feuerschiffen der Nord- und Ostsee (Bundesrepublik) 1955 ....	10,00
Nr. 10 (1956): Klimatologie der Nordwesteuropäischen Gewässer Teil 3: Lufttemperatur, Bewölkung, Niederschlag, Nebel. Tabellen-Anhang zu den Teilen 1 bis 3 (H. Markgraf u. P. Bintig) .....	12,50	Nr. 20 (1959): Statistisch-synoptische Untersuchung über das Verhalten von Tiefdruckgebieten im Bereich von Grönland (H. Walden) .....	3,60
		Nr. 21 (1959): Zur Theorie der Verdunstung der natürlichen Erdoberfläche (W. Brogmus)	3,00

DEUTSCHER WETTERDIENST

Seewetteramt

---

Einzelveröffentlichungen

Nr. 21

Zur Theorie der Verdunstung  
der natürlichen Erdoberfläche

Mit Anhang: Verdunstungsberechnungen auf Grund der neuen  
Verdunstungsformel nebst Diskussion ihrer Ergebnisse

von Dr. Willi Brogmus

Wetteramt München  
Handbücherel Nr. 3423

Hamburg

1959



## I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

---

	Seite
I. E i n l e i t u n g .....	5
II. Verwendete Bezeichnungen .....	7
III. Der vertikale Wasserdampfaustausch in der Atmosphäre .....	8
IV. Das vertikale Windprofil und die Schubspan- nungsgeschwindigkeit .....	12
1. Die Schubspannungsgeschwindigkeit bei adiabatischer Schichtung .....	12
2. Die Schubspannungsgeschwindigkeit bei nicht-adiabatischer Schichtung .....	13
(a) Allgemeine Betrachtungen .....	13
(b) Die Schubspannungsgeschwindigkeit nach den Gleichungen von DEACON- LEICHTMANN .....	15
(c) Die Schubspannungsgeschwindigkeit nach den Gleichungen von MONIN- OBUCHOW .....	17
V. Verdunstungsformeln für die natürliche Erdoberfläche .....	22
VI. Der Widerstands- und Verdunstungskoeffizient ...	24
a) Definitionen .....	24
b) Berechnung des Widerstandskoeffizienten .....	25
c) Berechnung des Verdunstungskoeffizienten .....	27
VII. S c h l u ß (Zusammenfassung) .....	29
Literaturnachweis .....	31

### ANHANG

I. Einleitung .....	A - 3
II. Das Beobachtungsmaterial .....	A - 4
III. Berechnungsergebnisse .....	A - 6
IV. Schluß .....	A - 16
Literaturnachweis .....	A - 16



## I. Einleitung

Die Kenntnis der Verdunstung der natürlichen Erdoberfläche ist für ein vertieftes Verständnis zahlreicher meteorologischer Erscheinungen und Zusammenhänge von grundlegender Bedeutung. Wegen der engen Verknüpfung der Verdunstung mit dem Gesamtwasserhaushalt der Atmosphäre, der Hydrosphäre und der Lithosphäre muß ihre quantitative Erfassung als ein Grundproblem der Geophysik betrachtet werden.

In der maritimen Meteorologie und der Ozeanographie interessiert vornehmlich der Wasserumsatz an der flüssigen Erdoberfläche, da seine Kenntnis für die kausale Erklärung zahlreicher maritim-meteorologischer und hydrographischer Erscheinungen eine unentbehrliche Voraussetzung bildet. Um die Bereitstellung quantitativ befriedigender Unterlagen über die Grösse der Verdunstung an der festen Erdoberfläche ist wegen ihrer unmittelbar praktischen Nutzenwendungen auf land- und wasserwirtschaftliche Problemstellungen in erster Linie die Agrar- und Hydrometeorologie bemüht.

Zur Ermittlung der Verdunstung der natürlichen festen oder flüssigen Erdoberfläche hat man sich einer Vielzahl von Methoden bedient, die generell auf den folgenden Prinzipien oder Kombinationen derselben beruhen :

### a) direkte Methoden

1. Bestimmung der Verdunstung aus der Wasserbilanz der Erdoberfläche,
2. Bestimmung der Verdunstung aus der Wasserbilanz der Atmosphäre,
3. Bestimmung der Verdunstung mit Hilfe von Lysimeterbeobachtungen,

### b) indirekte Methoden

4. Bestimmung der Verdunstung auf Grund des Wärme- oder Strahlungshaushaltes von Erdoberfläche und Atmosphäre,
5. Bestimmung der Verdunstung durch Ermittlung des vertikalen Wasserdampfaustausches in der Bodenschicht der Atmosphäre,
6. Bestimmung der Verdunstung durch Reduktion von Evaporimeterbeobachtungen sowie schließlich
7. durch empirisch abgeleitete meteorologisch-klimatologische Regressionsbeziehungen.

Zusammenfassende Darstellungen der verschiedenen Methoden haben unter Diskussion ihrer Grenzen und Fehlerquellen für ozeanische Anwendungen H. U. SVERDRUP (31) und für kontinentale Anwendungen E. REICHEL (23) vorgelegt. Auf diese Arbeiten darf auch hinsichtlich weiterer umfang-

reicher Literaturangaben verwiesen werden.

Durch den Ausbau, den die Turbulenztheorie in den letzten vier Jahrzehnten erfahren hat, konnten in der Methode (5) der Verdunstungsberechnung durch Bestimmung des vertikalen Wasserdampfaustausches wesentliche Fortschritte erzielt werden. Neben den bemerkenswerten Versuchen von E. FRANKENBERGER(10), die Verdunstung der natürlichen Erdoberfläche durch direkte Messungen der turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten im atmosphärischen Strömungsfeld mit Hilfe eines "Feinstruktur-Windmessers" zu erfassen, liegen noch eine große Zahl von Verdunstungsbestimmungen durch Ermittlung des vertikalen Wasserdampfaustausches aus Messungen des vertikalen Feuchtigkeits- und Windgeschwindigkeitsprofils in den untersten Metern der Atmosphäre vor. Aufbauend auf Gedankengänge, die insbesondere von H.U. SVERDRUP(29)(30) entwickelt worden sind, haben R.B. MONTGOMERY(17), C.W. THORNTHWAITTE und B. HOLZMAN(33)(34) wichtige Grundlagen für die indirekte Bestimmung des vertikalen Wasserdampfstromes in den bodennahen Luftschichten für den Fall einer adiabatisch geschichteten Atmosphäre dargeboten, die später noch von F.PASQUILL(21) verfeinert worden sind. Unter Hinzuziehung neuerer Untersuchungsergebnisse von E.L. DEACON(8) über die Form des bodennahen vertikalen Windprofils bei nicht-adiabatischer Temperaturschichtung hat N.E. RIDER(24) in Anlehnung an die von den genannten Bearbeitern (21)(33)(34) gegebenen Ableitungen und in Ergänzung eines entsprechenden Versuches von B. HOLZMAN(11) eine Erweiterung der Entwicklungen auf nicht-adiabatische Schichtungsverhältnisse gegeben.

In der vorliegenden Arbeit werden die bisherigen Entwicklungen einer Verdunstungsformel für beliebige Schichtungsverhältnisse auf der Grundlage der Turbulenztheorie fortgeführt und durch Einbeziehung verbesserter Ausgangsgleichungen den neueren Erkenntnissen angepaßt. Hierbei wird versucht, durch Darlegung der wesentlichsten Grundlagen der Austauschtheorie ein weitgehend abgerundetes Bild des hier behandelten Problems zu vermitteln. Im Gegensatz zu den von H.U. SVERDRUP(30) und R.B. MONTGOMERY(17) abgeleiteten Formeln, die bei Zutreffen der noch hypothetischen Vorstellungen über die Existenz einer "Laminarschicht" unmittelbar über der Wasseroberfläche bzw. einer "Zwischengrenzschicht" im Niveau zwischen der eigentlichen Bodenschicht und der Laminarschicht

eine Berechnung der Verdunstung aus Beobachtungen der Windgeschwindigkeit in einem Niveau gestatten, werden hier in Analogie zu den Entwicklungen von C.W. THORNTHWAITTE und B. HOLZMAN(33), F. PASQUILL(21) und N.E. RIDER(24) Verdunstungsformeln angegeben, die sich ohne hypothetische Annahmen über die Laminar- bzw. Zwischengrenzschicht nur auf Beobachtungen innerhalb der darüber befindlichen Bodenschicht stützen, die direkten Messungen unmittelbar zugänglich ist. Die hier abgeleiteten Gleichungen für die Verdunstung setzen die Kenntnis der Windgeschwindigkeit, der spezifischen Feuchtigkeit und der Temperatur in 2 Niveaus der bodennahen Luftschicht voraus. Da jedoch zwischen den vertikalen Temperatur- und Feuchtigkeitsdifferenzen innerhalb zweier Niveaus der Bodenschicht und der Temperatur- bzw. Dampfdruckdifferenz zwischen Luft und Meeresoberfläche eine enge Korrelation bestehen dürfte, zeichnen sich schon Möglichkeiten zur Behebung der hierdurch bedingten Komplikationen in der Verdunstungsberechnung ab. Eine Lösung dieser Frage muß jedoch einer späteren Bearbeitung vorbehalten bleiben.

## II. Verwendete Bezeichnungen

In der folgenden Übersicht sind die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Buchstabenbezeichnungen zusammengestellt. In den benutzten Originalarbeiten sind von den verschiedenen Bearbeitern gleiche Buchstabenbezeichnungen für verschiedene Variable und Parameter benutzt worden. Zur Vermeidung von Verwechslungen sind deshalb in Einzelfällen neue Buchstabenbezeichnungen eingeführt, die mit denen der Originalarbeiten nicht übereinstimmen.

### (a) Lateinische Buchstaben

- $A_q$  vertikaler Austauschkoeffizient für den Wasserdampfstrom,
- $A_v$  vertikaler Austauschkoeffizient für den Impulsstrom,
- $c_p$  spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck,
- $d$  Verdrängungsdichte (Nullpunktsverschiebung),
- $e_i$  Dampfdruck in der Höhe  $z = z_i$  ( $i = 1, 2$ ),
- $g$  Erdbeschleunigung,
- $k$  v. KARMANSche Konstante ( $\sim 0,4$ ),
- $l_{ad}$  PRANDTLscher Mischungsweg bei adiabatischer Schichtung,
- $l$  Mischungsweg bei beliebiger Schichtung,
- $L$  charakteristisches Längenmaß nach MONIN-OBUCHOW,

p	Luftdruck
$q_i$	spezifische Feuchtigkeit in der Höhe $z = z_i$ ( $i = 1,2$ ),
Q	vertikale Wärmestromdichte,
R	Gaskonstante für trockene Luft,
Ri	Richardsonsche Zahl,
$T_i$	absolute Temperatur in der Höhe $z = z_i$ ( $i = 1,2$ ),
$T_v$	absolute virtuelle Temperatur,
$T_*$	charakteristisches Temperaturmaß nach MONIN-OBUCHOW,
$v_i$	ausgeglichene horizontale Windgeschwindigkeit in der Höhe $z = z_i$ ( $i = 1,2,3$ ),
$v_*$	Schubspannungsgeschwindigkeit,
V	Verdunstung pro Flächen- und Zeiteinheit,
W	vertikale Dampfstromdichte,
z	Höhenvariable,
$z_0$	Rauhigkeitsparameter

(b) griechische Buchstaben

$\beta$	universelle Konstante nach MONIN-OBUCHOW ( $\sim 0,6$ )
$\beta_0$	Stabilitätsparameter nach DEACON-LEICHTMANN,
$\gamma^2$	Widerstandskoeffizient nach G.I. TAYLOR,
$\Gamma$	Verdunstungskoeffizient nach R.B. MONTGOMERY,
$\theta$	potentielle Temperatur,
$\rho$	Luftdichte,
$\sigma_1$	Stabilitätsparameter nach ROSSBY-MONTGOMERY,
$\sigma_2$	Stabilitätsparameter nach HOLZMAN,
$\tau$	tangentiale Schubspannung (vertikale Impulsstromdichte),

III. Der vertikale Wasserdampfaustausch in der Atmosphäre

Nach den grundlegenden Untersuchungen von W. SCHMIDT(28) wird der Vertikalaustausch von Lufteigenschaften in der Atmosphäre durch vertikale Verschiebungen von Luftteilchen hervorgerufen, die sich mit ihrer neuen Umgebung vermischen und dieser dabei ihre ursprünglichen Eigenschaften mitteilen. Die aus diesen turbulenten Vermischungsvorgängen resultierende vertikale "Dampfstromdichte", d.h. die in der Zeiteinheit durch die horizontale Flächeneinheit hindurchtretende totale Wasserdampfmenge,  $W$  [ $g.cm^{-2}.sec^{-1}$ ], läßt sich durch die "Austauschgleichung"

$$W = - A_q \cdot \frac{dq}{dz} \quad (1)$$

beschreiben, worin  $A_q$  [ $g \cdot cm^{-1} \cdot sec^{-1}$ ] den sog. "Austauschkoeffizienten" für den Wasserdampfstrom,  $z$  [cm] die von der Erdoberfläche  $z = 0$  nach oben positiv gezählte Vertikalkoordinate und  $dq/dz$  die Änderung der spezifischen Feuchtigkeit  $q$  [ $g/kg$ ] mit der Höhe  $z$  darstellt. Nach Gl. (1), die man auch als Definitionsgleichung für den Austauschkoeffizienten  $A_q$  auffassen kann, ist die Dampfstromdichte  $W$  dem (stets positiven) Austauschkoeffizienten  $A_q$ , der den Turbulenzgrad der Atmosphäre beschreibt, sowie dem vertikalen Gradienten der spezifischen Feuchtigkeit proportional. Durch das negative Vorzeichen der rechten Seite der Gl.(1) wird zum Ausdruck gebracht, daß der vertikale Wasserdampftransport bei Abnahme der spezifischen Feuchtigkeit mit der Höhe ( $dq/dz < 0$ ) aufwärts, bei Zunahme ( $dq/dz > 0$ ) dagegen abwärts gerichtet ist. Da die Dampfstromdichte bei Beschränkung auf bodennahe Luftschichten ( $z \leq 30$  m) mit ausreichender Näherung als höhenunabhängig betrachtet werden kann, ist dieselbe mit der pro Flächen- und Zeiteinheit von der Unterlage verdunstenden Wassermenge  $V$  [ $g \cdot cm^{-2} \cdot sec^{-1}$ ] identisch, so daß man an Stelle von Gl. (1) auch

$$V = - A_q \cdot \frac{dq}{dz} \quad (2)$$

schreiben kann. Durch die Gl.(2) wird die Ermittlung der Verdunstung der natürlichen Erdoberfläche auf die Bestimmung des vertikalen Austauschkoeffizienten ( $A_q$ ) und Feuchtigkeitsgefälles ( $dq/dz$ ) in der Bodenschicht der Atmosphäre zurückgeführt.

Die wesentliche Aufgabe bei der Verdunstungsbestimmung auf Grund der Beziehung (2) besteht in der Ermittlung des vertikalen Austauschkoeffizienten ( $A_q$ ), da die Ableitung des vertikalen Feuchtigkeitsgradienten ( $dq/dz$ ) keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet. Die Größe des vertikalen Austauschkoeffizienten, die von der Bodengestalt, der Höhe ( $z$ ), der Windgeschwindigkeit ( $v$ ) und der vertikalen Temperaturschichtung abhängig ist, kann je nach den herrschenden äusseren Bedingungen innerhalb weiter Grenzen schwanken.

Die Turbulenztheorie hat eine Reihe von direkten und indirekten

Verfahren entwickelt, die (zumindest im Prinzip) zur Bestimmung des Austauschkoeffizienten aus meßbaren Eigenschaften der strömenden Luft herangezogen werden können. Die direkten Methoden stützen sich dabei auf

- (a) anemometrische Messungen der turbulenten Zusatzbewegungen im atmosphärischen Strömungsfeld oder
- (b) die Berechnung der Zusatzbewegungen aus den turbulenzbedingten Schwankungen der meteorologischen Elemente.

Bei den indirekten Verfahren dagegen wird die Größe des vertikalen Austauschkoeffizienten mittelbar aus

- (c) Beobachtungen des vertikalen Windprofils in der Bodenschicht der Atmosphäre,
- (d) Messungen der vom Wind auf die Unterlage ausgeübten Schubspannung (Stauerscheinungen),
- (e) Abweichungen des beobachteten Windes vom Gradientwind oder schließlich durch
- (f) Beobachtungen der Dämpfung der Amplituden bzw. der Verschiebung der Phasen im täglichen periodischen Gang der meteorologischen Elemente erschlossen. In Bezug auf die Anforderungen an die instrumentelle Ausrüstung und den Umfang der Auswertearbeit ist es am einfachsten, wenn man den auf direkte Weise schwer bestimmbareren Austauschkoeffizienten ( $A_q$ ) für den vertikalen Wasserdampfstrom nach dem bekannten Vorgang von H.Ü. SVERDRUP (29)(30) u.a. durch den aus Windprofilmessungen indirekt ableitbaren Austauschkoeffizienten ( $A_v$ ) für den vertikalen Impulsstrom ersetzt.

Die Voraussetzung der Gleichheit beider Austauschkoeffizienten kann auf Grund verschiedener experimenteller Bestimmungen derselben noch nicht als gesichert betrachtet werden. Beschränkt man jedoch den Meßbereich für die Bestimmung des Austauschkoeffizienten aus Windprofilmessungen auf die untersten Meter ( $z \leq 10$  m) der Atmosphäre, wo sich der Einfluß der Konvektion noch nicht störend bemerkbar macht, so kann man auf Grund der Ergebnisse verschiedener Untersuchungen erwarten, daß die Unterschiede in den beiden Austauschkoeffizienten im Vergleich zu ihren Änderungen mit der Windgeschwindigkeit und der Höhe als relativ klein vernachlässigt werden dürfen.

Für die Impulsstromdichte (tangente Schubspannung)  $\tau$  [ $g \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}$ ], d.h. die in der Zeiteinheit durch die horizontale Flächeneinheit

transportierte Bewegungsgröße, gilt in Analogie zu Gl.(1) der Ansatz

$$\tau = A_v \cdot \frac{dv}{dz}, \quad (3)$$

worin  $A_v$  [ $g \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ ] den vertikalen Austauschkoeffizienten für den Impulsstrom und  $(dv/dz)$  die Änderung der ausgeglichenen horizontalen Windgeschwindigkeit ( $v$ ) mit der Höhe ( $z$ ) bedeutet. Wenn man in Gl.(3) noch die durch

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau}{g}} \quad (4)$$

formal definierte "Schubspannungsgeschwindigkeit" ( $v_*$ ) einführt, so läßt sich der Austauschkoeffizient  $A_v$  explizit durch

$$A_v = \frac{g \cdot v_*^2}{\frac{dv}{dz}} \quad (5)$$

ausdrücken. Unter der Voraussetzung der Gleichheit der Austauschkoeffizienten für den Wasserdampf- und Impulsstrom ( $A_q = A_v$ ) resultiert aus den Gl.(2), (5) die Beziehung

$$v \cdot \frac{dv}{dz} = - g \cdot v_*^2 \cdot \frac{dq}{dz} \quad (6)$$

Da bei Beschränkung auf bodennahe Luftschichten sowohl die Luftdichte ( $\rho$ ) als auch die Impulsstromdichte ( $\tau$ ), wie H. ERTEL(9) gezeigt hat, mit ausreichender Näherung als höhenunabhängig betrachtet werden kann, folgt aus Gl.(4) auch die Höhenkonstanz der Schubspannungsgeschwindigkeit ( $v_*$ ). Durch Integration der Gl.(6) zwischen den Grenzen ( $z_1, z_2$ ) ergibt sich dann als Bestimmungsgleichung für die Größe der Verdunstung ( $V$ )

$$V = g \cdot v_*^2 \cdot \frac{q_1 - q_2}{v_2 - v_1}, \quad (7)$$

worin ( $q_1, q_2$ ) bzw. ( $v_1, v_2$ ) die in den Höhen ( $z_1, z_2$ ) gemessenen Werte der spezifischen Feuchtigkeit bzw. der Windgeschwindigkeit bedeuten. Die Gl. (7) stellt die verallgemeinerte Form einer Verdunstungsgleichung dar, da sie noch die Schubspannungsgeschwindigkeit als unbekanntes Parameter enthält. Die Größe der Schubspannungsgeschwindigkeit ( $v_*$ ) läßt sich jedoch, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, aus den Gleichungen für das vertikale Windgeschwindigkeitsprofil ermitteln und durch direkt meß-

bare Eigenschaften des bodennahen Strömungsfeldes ausdrücken.

IV. Das vertikale Windprofil in den bodennahen Luftschichten und die Schubspannungsgeschwindigkeit.

1. Die Schubspannungsgeschwindigkeit bei adiabatischer Schichtung

Im Fall aerodynamisch "rauher" Strömung und adiabatischer Schichtungsverhältnisse in den untersten Schichten der Atmosphäre läßt sich das vertikale Windgeschwindigkeitsprofil über der festen und flüssigen Erdoberfläche nach der Grenzschichttheorie von L.PRANDTL(22) durch den Ansatz (siehe auch Lit.27)

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_*}{k \cdot (z + z_0)} \quad (8)$$

beschreiben. Hierin stellen  $k$  die sog. v. KARMANsche Konstante ( $\sim 0,4$ ) und  $z_0$  einen von der Rauigkeit der Unterlage abhängigen "Rauigkeitsparameter" dar. Obige Beziehung (8) läßt sich nach O. BJÖRGUM(1) sowie nach A.S. MONIN und A.M. OBUCHOW(16) ebenfalls mit Hilfe von Ähnlichkeitsbetrachtungen und dimensionsanalytischen Überlegungen auf theoretischem Wege ableiten. Sie hat zahlreichen Untersuchungen über atmosphärische Austauschprobleme als Grundlage gedient und sich beim Vorliegen adiabatischer Schichtungsverhältnisse als durchaus brauchbar erwiesen. Durch Integration der Gl.(8) mit den Integrationsgrenzen ( $z_1, z_2$ ) folgt für die Größe der Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*$  der Ausdruck

$$v_* = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{\ln \left( \frac{z_2 + z_0}{z_1 + z_0} \right)} \quad (9)$$

der sich bei der üblichen Beschränkung der Beobachtungsniveaus auf Höhen  $z_1, z_2 \gg z_0$  zu

$$v_* = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{\ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right)} \quad (10)$$

vereinfachen läßt. Um mit den durch die Gl.(9)(10) gegebenen Gesetzmäßigkeiten auch die Verhältnisse bei hoher Vegetationsbedeckung der Erd-

oberfläche erfassen zu können, hat es sich nach dem Vorgang von W. PAESCHKE(20) als zweckmäßig erwiesen, eine Nullpunktsverschiebung für die Zählung der vertikalen Höhenkoordinate (z) um die sog. "Verdrängungsdichte" (d) vorzunehmen. Man erreicht dies dadurch, daß man die Höhenmessung von einem Punkt aus beginnen läßt, der über der Höhe z=0 liegt. Formal wird dies durch die Transformation  $z \rightarrow z - d$  in den obigen Gleichungen erreicht, so daß Gl.(10) die Form

$$v_* = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{\ln \left( \frac{z_2 - d}{z_1 - d} \right)} \quad (11)$$

annimmt. Hierbei kann die Größe der Verdrängungsdichte (d) beim Vorliegen von Messungen in 3 verschiedenen Höhenniveaus ( $z_1, z_2, z_3$ ) aus der Beziehung

$$\frac{v_3 - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{\ln(z_3 - d) - \ln(z_1 - d)}{\ln(z_2 - d) - \ln(z_1 - d)} \quad (12)$$

mit Hilfe der bekannten mathematischen Approximationsverfahren mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden. Die Einführung der Verdrängungsdichte (d) bei Anwendungen der Beziehungen (9)(10)(11) auf Grenzschichtprobleme an der Grenzfläche Meer - Atmosphäre dürfte sich vielleicht ebenfalls als vorteilhaft erweisen, da die Festlegung des Nullpunktes für die Höhenkoordinate (z) infolge der wandernden Wellenbewegungen an der Meeresoberfläche nicht unerhebliche Schwierigkeiten bietet, die insbesondere H.U. ROLL (25)(26) und G. NEUMANN(19) eingehender diskutiert haben. Jedoch liegen in dieser Hinsicht - soweit es dem Verfasser bekannt ist - noch keine Untersuchungen oder praktische Erfahrungen vor.

## 2. Die Schubspannungsgeschwindigkeit bei nicht-adiabatischer Schichtung

### (a) Allgemeine Betrachtungen

Wie zahlreiche experimentelle Untersuchungen gezeigt haben, lassen sich die Höhenprofile der Windgeschwindigkeit, der spezifischen Feuchtigkeit bzw. des Dampfdrucks sowie der Temperatur im Fall nicht-adiabatischer Schichtungsverhältnisse nicht mehr durch logarithmische Funktionen darstellen. Eingehende experimentelle Bestimmungen der Höhenabhängigkeit dieser Zustandsgrößen haben vielmehr gezeigt, daß bei nicht-adiabatischer Temperaturschichtung systematische Abweichungen vom loga-

rithmischen Profil auftreten, die sich besonders in grösseren Höhen ( $z > 10$  m) bemerkbar machen und die eine enge Korrelation mit der RICHARDSONschen Zahl  $Ri$

$$Ri = \frac{g \cdot \frac{d\theta}{dz}}{T \cdot \left(\frac{dv}{dz}\right)^2} \quad (13)$$

( $g$  = Erdbeschleunigung,  $\theta$  = potentielle Temperatur) aufweisen.

Ältere theoretische und empirische Versuche, den Einfluß der Stabilitätsverhältnisse in den Profilgleichungen durch Einführung von Korrekturfaktoren in den PRANDTLschen "Mischungsweg"-Ansatz zu berücksichtigen, liegen von C.-G. ROSSBY und R.B. MONTGOMERY (27) sowie von B. HOLZMAN(11) vor. Diese lauten :

$$\text{ROSSBY-MONTGOMERY: } l = \frac{l_{\text{adiab.}}}{\sqrt{1 + \sigma_1 \cdot Ri}} \quad (14)$$

bzw.

$$\text{HOLZMAN: } l = l_{\text{adiab.}} \cdot \sqrt{1 - \sigma_2 \cdot Ri} \quad , \quad (15)$$

worin  $l$  der Mischungsweg bei beliebiger Schichtung,  $l_{\text{adiab.}} = k(z+z_0)$  den PRANDTLschen Mischungsweg bei adiabatischer Schichtung bedeuten. Die Grössen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sollen von den Zustandseigenschaften der strömenden Luft unabhängige universelle Konstante darstellen. Während E.L. DEACON (8) und J.A. BUSINGER(6) theoretisch begründete Einwände gegen eine Verwendung von Gl.(14) vorbringen, wird die HOLZMANSche Gl.(15), die auf rein empirischem Wege gewonnen wurde, von E.L. DEACON(8) "eines weiteren Studiums für wert" befunden. Weiterhin sind von H. LETTAU(13) und J.A. BUSINGER(6) Gleichungen entwickelt worden, die eine Berücksichtigung des bodennahen Stabilitätsgrades gestatten. Wegen unterschiedlicher (hypothetischer) Ansätze in den Ausgangsgleichungen bestehen jedoch zwischen den Ergebnissen beider Forscher ((6)(13)) noch Diskrepanzen, deren endgültige Klärung bis heute ausstehen scheint (siehe auch Lit.14). Besonders weitgehende Anwendungen - sowohl auf maritim- wie auch auf kontinental-meteorologische Austauschprobleme (z.B. Lit. 2,3,4,12,24) - haben im letzten Jahrzehnt empirische Gleichungen für das vertikale Windprofil erfahren, die offensichtlich unabhängig voneinander von E.L. DEACON

CON(8) und D.L. LEICHTMANN(12) entwickelt worden sind. Gegenüber zahlreichen ähnlichen Versuchen zeichnen sich diese insbesondere dadurch aus, daß sie mathematisch verhältnismäßig einfach aufgebaut sind und überdies den Fall adiabatischer Schichtungsverhältnisse als Spezialfall enthalten. Weiterhin haben A.S. MONIN und A.M. OBUCHOW(16) in jüngerer Zeit auf rein theoretischem Wege mit Hilfe von hydrodynamischen Ähnlichkeitsbetrachtungen und dimensionsanalytischen Überlegungen, die sich auch bei anderen Problemstellungen in der Hydromechanik bewährt haben, neue fundamentale Gesetzmäßigkeiten zur Behandlung der Austauschprobleme in der bodennahen Luftschicht für nicht-adiabatische Schichtungsverhältnisse ableiten können.<sup>1)</sup> Bei Beschränkung auf gewisse Spezialfälle sind auch diese Gleichungen mathematisch relativ einfach gebaut und deshalb für praktische Anwendungen auf Turbulenzprobleme besonders geeignet.

Wegen der geschilderten Vorzüge, welche die Methoden von DEACON-LEICHTMANN(8)(12) und MONIN-OBUCHOW(16) aufzuweisen haben, werden dieselben in den folgenden Abschnitten eingehender dargestellt und zur Lösung des hier behandelten Problems herangezogen.

(b) Die Schubspannungsgeschwindigkeit nach den Gleichungen von DEACON-LEICHTMANN

Nach den empirischen Untersuchungsbefunden von E.L. DEACON(8) und D.L. LEICHTMANN(12) läßt sich die Änderung des Windes mit der Höhe bei beliebigen Schichtungsverhältnissen allgemein durch einen Potenzansatz mit negativem Exponenten darstellen und in der vom Verfasser gegebenen Form durch :

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_*}{k} \cdot (z + z_0)^{-\beta_0} \quad (16)$$

(siehe auch Lit.5) beschreiben. Hierin ist der als höhenunabhängig betrachtete Parameter  $\beta_0$  von der vertikalen Temperaturschichtung der bodennahen Luftschicht in dem Sinne abhängig, daß

---

<sup>1)</sup> H. CHARNOCK (7) hat in einem Vortrag Gleichungen angegeben, die mit denen von MONIN-OBUCHOW völlig übereinstimmen. Ob es sich hierbei um unabhängige Ableitungen der Gleichungen handelt, kann vom Verfasser nicht beurteilt werden, da von H. CHARNOCK keine diesbezüglichen Hinweise oder Literaturangaben gegeben worden sind.

für instabile Schichtung	$\beta_0 \left\{ \begin{array}{l} > 1 \\ = 1 \\ < 1 \end{array} \right.$
für indifferente Schichtung	
für stabile Schichtung	

gilt. Überdies hat E.L. DEACON(8) zeigen können, daß ein enger Zusammenhang zwischen dem Parameter  $\beta_0$  und der RICHARDSONSchen Zahl  $Ri$  besteht derart, daß mit einer Zunahme von  $Ri$  eine Abnahme der Größe von  $\beta_0$  verbunden ist.  $\beta_0$  stellt also gewissermaßen einen Stabilitätsparameter dar. Für die Größe der Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*$  folgt durch Integration der Gl.(16) mit den Integrationsgrenzen  $(z_1, z_2)$  der Ausdruck

$$v_* = \frac{k \cdot (1 - \beta_0) \cdot (v_2 - v_1)}{(z_2 + z_0)^{1-\beta_0} - (z_1 + z_0)^{1-\beta_0}}, \quad (17)$$

der sich bei der üblichen Beschränkung auf Beobachtungen aus Höhen  $z_1, z_2 \gg z_0$  zu

$$v_* = \frac{k \cdot (1 - \beta_0) \cdot (v_2 - v_1)}{z_2^{1-\beta_0} - z_1^{1-\beta_0}} \quad (18)$$

vereinfachen läßt. Bei Einführung der "Verdrängungsdichte"  $d$  ergibt sich dann aus Gl.(18) durch die Transformation  $z \rightarrow z-d$  in Analogie zu Gl.(11) die Beziehung

$$v_* = \frac{k \cdot (1 - \beta_0) \cdot (v_2 - v_1)}{(z_2 - d)^{1-\beta_0} - (z_1 - d)^{1-\beta_0}}, \quad (19)$$

worin die Größe von  $d$  bei bekanntem  $\beta_0$  durch mathematische Approximationsverfahren aus

$$\frac{v_3 - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{(z_3 - d)^{1-\beta_0} - (z_1 - d)^{1-\beta_0}}{(z_2 - d)^{1-\beta_0} - (z_1 - d)^{1-\beta_0}} \quad (20)$$

mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden kann, wenn Beobachtungen der Windgeschwindigkeit aus drei Höhen  $(z_1, z_2, z_3)$  vorliegen.

Es wurde schon oben angedeutet, daß die Verwendung des DEACON-LEICHTMANNschen Ansatzes (16) und der daraus resultierenden Beziehungen vom physikalischen Standpunkt aus gesehen insofern unbefriedigend ist, als dieselben sich nur auf empirische Grundlagen abstützen können. Überdies hat H. LETTAU(15) an Hand eines umfangreichen Beobachtungsmaterials nachweisen können, daß der Stabilitätsparameter  $\beta_0$  - entgegen den Annahmen von E.L. DEACON (8) und D.L. LEICHTMANN (12) - eine deutlich ausgeprägte Höhenabhängigkeit aufweist. Daraus erhellt die Tatsache, daß alle

auf Gl.(16) beruhenden Beziehungen und Folgerungen nur als eine Annäherung an die wirklichen Verhältnisse angesehen werden können. Über die Größenordnung der daraus resultierenden Fehler in den Bestimmungen der verschiedenen Turbulenzgrößen sind dem Verfasser keine Abschätzungen bekannt.

(c) Die Schubspannungsgeschwindigkeit nach den Gleichungen von MONIN-OBUCHOW

Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, haben A.S. MONIN und A.M. OBUCHOW(16) vor wenigen Jahren auf Grund von hydrodynamischen Ähnlichkeitsbetrachtungen und dimensionsanalytischen Überlegungen auf theoretischem Wege neue Gleichungen für das vertikale Wind-, Temperatur- und Feuchtigkeitsprofil für beliebige Schichtungsverhältnisse ableiten können<sup>2)</sup>. Wie A.S. MONIN und A.M. OBUCHOW(16) an Hand umfangreichen Beobachtungsmaterials nachgewiesen haben, lassen sich die Meßreihen bei allen Schichtungsverhältnissen mit überraschend großer Genauigkeit durch die von ihnen abgeleiteten Gesetzmässigkeiten beschreiben und physikalisch interpretieren. Diese fruchtbaren Anwendungen, welche die Gesetzmässigkeiten bei der Behandlung kontinentaler Turbulenzprobleme erfahren haben, lassen erwarten, daß dieselben auch neue Wege zur Lösung der noch offenen Fragen des Turbulenzaustausches an der Grenzfläche zwischen Ozean und Atmosphäre erschließen werden.

Nach den Untersuchungsergebnissen von MONIN-OBUCHOW(16) läßt sich das vertikale Windprofil bei beliebiger vertikaler Temperaturschichtung durch den Ansatz

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_*}{k \cdot z} \cdot \varphi\left(\frac{z}{L}\right) \quad (21)$$

beschreiben, worin L ein durch

$$L = - \frac{v_*^3}{k \cdot \frac{g}{T_0} \cdot \frac{Q}{c_p \cdot S}} \quad (22)$$

<sup>2)</sup> siehe Bemerkung Fußnote 1

definiertes charakteristisches Längenmaß darstellt und die Funktion  $\varphi(z/L)$  durch

$$\varphi\left(\frac{z}{L}\right) = \frac{\left(\frac{z}{L}\right)}{Ri} \quad (23)$$

mit der RICHARDSONschen Zahl verknüpft ist. In der Gl.(22) stellt  $Q$  die vertikale Wärmestromdichte und  $c_p$  die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck dar. Da die vertikale Wärmestromdichte  $Q$  bei stabiler Schichtung nach unten ( $Q < 0$ ), bei labiler Schichtung nach oben ( $Q > 0$ ) gerichtet ist und bei Annäherung an indifferente Schichtungsverhältnisse verschwindet ( $Q \rightarrow 0$ ), muß nach Gl.(22)

$$\begin{array}{l} \text{für stabile Schichtung} \\ \text{für adiabatische Schichtung} \\ \text{für instabile Schichtung} \end{array} \quad L \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ \rightarrow \pm \infty \\ < 0 \end{array} \right.$$

gelten. Da die vertikale Wärmestromdichte  $Q$  ebenso wie die Impuls- und Dampfstromdichte ( $\tau$  bzw.  $W$ ) in der Bodenschicht ( $z \leq 30$  Meter) als höhenunabhängig betrachtet werden kann, so folgt aus Gl.(22) ebenfalls die Höhenkonstanz des Längenmaßes  $L$ .

Für praktische Anwendungen ist es nach dem bekannten Vorgang von L. PRANDTL(22) zweckmäßig, den Rauigkeitsparameter  $z_0$  durch die Transformation  $z \rightarrow z + z_0$  auch in obige Gl. (21) einzuführen. Durch diese Transformation erhält man eine modifizierte Form des MONIN-OBUCHOWschen Ansatzes :

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_*}{k \cdot (z + z_0)} \cdot \varphi\left(\frac{z + z_0}{L}\right), \quad (24)$$

die der Gl.(8) völlig analog ist. Wie man durch Vergleich der Gl.(24) mit Gl.(8) sofort feststellt, muß für die Funktion  $\varphi\left[\frac{z+z_0}{L}\right]$  im Fall adiabatischer Schichtung ( $|L| = \infty$ ) die Beziehung

$$\varphi\left(\frac{z + z_0}{L}\right)_{\text{adiab.}} = \varphi(0) = 1 \quad (25)$$

gelten. Beschränkt man sich bei praktischen Anwendungen der Gl.(24) auf Höhenbereiche, für die  $|z+z_0/L| < 1$  gilt, so kann man die Funktion  $\varphi(z+z_0/L)$  nach dem Vorgang von MONIN-OBUCHOW in eine Potenzreihe nach steigenden Potenzen von  $(z+z_0)$  entwickeln. Unter Beachtung der Beziehung (25) ergibt sich dann bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\varphi\left(\frac{z+z_0}{L}\right) = 1 + \beta \cdot \frac{z+z_0}{L}, \quad (26)$$

worin  $\beta$  (ebenso wie die v.KARMANSche Konstante  $k$ ) eine universelle Konstante darstellt, deren Größe empirisch aus Beobachtungen des vertikalen Windprofils erschlossen werden muß. MONIN-OBUCHOW haben aus einem umfangreichen Beobachtungsmaterial die Größe von  $\beta$  zu  $0,60 \pm 10\%$  bestimmt. Mit der durch Gl. (26) gegebenen Näherung ergibt sich dann aus Gl.(24) die Beziehung :

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_*}{k \cdot (z+z_0)} \cdot \left(1 + \beta \cdot \frac{z+z_0}{L}\right), \quad (27)$$

welche den folgenden Betrachtungen zugrundeliegt. Durch Integration der Gl.(27) mit den Integrationsgrenzen  $(z_1, z_2)$  erhält man bei Beachtung der Höhenkonstanz von  $v_*$  und  $L$  für die gesuchte Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*$  den Ausdruck

$$v_* = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{\ln\left(\frac{z_2+z_0}{z_1+z_0}\right) + \frac{\beta}{L} \cdot (z_2 - z_1)}, \quad (28)$$

der sich bei der üblichen Beschränkung auf Beobachtungen aus Höhen  $z_1, z_2 \gg z_0$  zu

$$v_* = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{\ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \frac{\beta}{L} \cdot (z_2 - z_1)} \quad (29)$$

vereinfachen läßt. Bei Einführung der Verdrängungsdichte  $d$  durch die Transformation  $z \rightarrow z - d$  läßt sich Gl. (29) in Analogie zu den vorhergehenden Entwicklungen auch in der Form

$$v_* = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{\ln\left(\frac{z_2 - d}{z_1 - d}\right) + \frac{\beta}{L} \cdot (z_2 - z_1)} \quad (30)$$

darstellen. Ebenso wie in den vorher behandelten Fällen, läßt sich die Größe von  $d$  bei Vorliegen von Beobachtungen aus drei Höhenniveaus und bekanntem  $L$  aus

$$\frac{v_3 - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{\ln \left( \frac{z_3 - d}{z_1 - d} \right) + \frac{\beta}{L} \cdot (z_3 - z_1)}{\ln \left( \frac{z_2 - d}{z_1 - d} \right) + \frac{\beta}{L} \cdot (z_2 - z_1)} \quad (31)$$

durch mathematische Näherungsverfahren mit beliebiger Genauigkeit approximieren.

Für praktische Anwendungen der Gl.(28)(29)(30) auf die Bestimmung der Verdunstung der natürlichen Erdoberfläche nach Gl.(7) ist die Kenntnis des Längenmaßes L erforderlich. Zur Berechnung desselben stützen wir uns auf Beziehungen, die ebenfalls von A.S. MONIN und A.M. OBUCHOW(16) auf theoretischem Wege abgeleitet worden sind. Unter der Voraussetzung der Gleichheit der Austauschkoefizienten für den Impuls- und Wärmestrom (siehe Abschnitt III) finden A.S. MONIN und A.M. OBUCHOW(16) die Beziehung

$$\frac{d\theta}{dv} = - \frac{Q}{c_p \cdot \tau} = \frac{k \cdot T_*}{v_*},$$

worin  $T_*$  ein charakteristisches Temperaturmaß darstellt, das aber hier für die weiteren Entwicklungen nicht mehr benötigt wird. Bei Beachtung der Höhenkonstanz von Q und  $\tau$  ergibt sich durch Integration zwischen den Integrationsgrenzen ( $z_1, z_2$ ) die Beziehung

$$\theta_2 - \theta_1 = - \frac{Q}{c_p \cdot \tau} (v_2 - v_1),$$

woraus wegen Gl.(4) auch

$$- \frac{Q}{c_p \cdot \tau} = v_*^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{v_2 - v_1}$$

folgt. Durch Substitution dieses Ausdrucks in Gl.(22) ergibt sich für das Längenmaß L die Gleichung

$$L = \frac{v_*}{k \cdot \frac{g}{T_0}} \cdot \frac{v_2 - v_1}{\theta_2 - \theta_1},$$

die bei der Beschränkung auf bodennahe Schichten wegen  $\theta_2 - \theta_1 \approx T_2 - T_1$  auch in der Form

$$L = \frac{v_*}{k \cdot \frac{g}{T_0}} \cdot \frac{v_2 - v_1}{T_2 - T_1}$$

geschrieben werden kann. Wegen Gl. (29) gilt damit für Beobachtungsniveaus  $z_1, z_2 \gg z_0$  die Beziehung

$$L = \frac{(v_2 - v_1)^2 - \beta \cdot \frac{g}{T_0} \cdot (T_2 - T_1) \cdot (z_2 - z_1)}{\frac{g}{T_0} \cdot (T_2 - T_1) \cdot \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right)} \quad (32)$$

Für die Schubspannungsgeschwindigkeit ergibt sich durch Substitution der Gl.(32) in Gl.(29) der Ausdruck

$$v_* = \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{\ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right)} \cdot \left[ 1 - \beta \cdot \frac{g}{T_0} \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{(v_2 - v_1)^2} \cdot (z_2 - z_1) \right] \quad (33)$$

Durch Vergleich mit der für den adiabatischen Fall geltenden Gl.(10) folgt die Beziehung

$$v_* = f \cdot v_*(\text{adiab.}) \quad (34)$$

worin  $f$  durch den Ausdruck

$$f = \left[ 1 - \beta \cdot \frac{g}{T_0} \cdot \frac{(T_2 - T_1)}{(v_2 - v_1)^2} \cdot (z_2 - z_1) \right] \quad (35)$$

gegeben ist. Die Gl. (34) besagt, daß die Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*$  bei nicht-adiabatischer Schichtung aus der mit dem Faktor  $f$  multiplizierten "adiabatischen" Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*(\text{adiab.})$  berechnet werden kann. Dem Faktor  $f$  kommt daher die Bedeutung eines Korrektionsfaktors zu, mit dem der Wert der "adiabatischen" Schubspannungsgeschwindigkeit nach Gl.(10) zu multiplizieren ist, um die wahre Schubspannungsgeschwindigkeit bei der tatsächlich beobachteten Schichtung zu erhalten. Aus der Gl.(35) ist ersichtlich, daß für

$$\left. \begin{array}{l} \text{stabile Schichtung } (T_2 > T_1) \\ \text{adiabatische Schichtung } (T_2 = T_1) \\ \text{labile Schichtung } (T_2 < T_1) \end{array} \right\} (f-1) \left\{ \begin{array}{l} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{array} \right.$$

gilt.

V. Verdunstungsformeln für die natürliche Erdoberfläche

In dem letzten Abschnitt IV sind die Beziehungen abgeleitet worden, welche eine Berechnung der Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*$  aus Windgeschwindigkeitsmessungen bzw. kombinierten Geschwindigkeits- und Temperaturmessungen in der bodennahen Luftschicht erlauben. Durch Substitution der für die Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_*$  unter den verschiedenen Schichtungsverhältnissen geltenden Beziehungen in die "allgemeine" Verdunstungsgleichung (7), welche  $v_*$  noch als Unbekannte enthält, ergeben sich damit Verdunstungsformeln, die eine Berechnung der von der natürlichen Erdoberfläche verdunstenden Wassermenge auf Grund von Messungen der Windgeschwindigkeit, der spezifischen Feuchtigkeit sowie der Temperatur in (mindestens) zwei Niveaus der Bodenschicht gestatten. Als Verdunstungsformeln ergeben sich für  $z_1, z_2 \gg z_0$  auf diese Weise :

1. im Fall adiabatischer Schichtungsverhältnisse

nach Gl.(7), (10)

$$V = \frac{g \cdot k^2 \cdot (q_1 - q_2) (v_2 - v_1)}{\left[ \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \right]^2}, \quad (36)$$

2. im Fall beliebiger Schichtungsverhältnisse

nach den Gl.(7), (18) (DEACON-LEICHTMANN)

$$V = \frac{g \cdot k^2 \cdot (1 - \beta_0)^2 \cdot (q_1 - q_2) (v_2 - v_1)}{\left[ z_2^{1-\beta_0} - z_1^{1-\beta_0} \right]^2} \quad (37)$$

und nach den Gl. (7), (33) (MONIN-OBUCHOW)

$$V = f^2 \cdot \frac{g \cdot k^2 \cdot (q_1 - q_2) (v_2 - v_1)}{\left[ \ln \left( \frac{z_2}{z_1} \right) \right]^2}, \quad (38a)$$

worin  $f$  den durch Gl. (35) definierten Korrektionsfaktor darstellt. Für die Verdunstung  $V$  bei nicht-adiabatischer Schichtung gilt nach dem MONIN-OBUCHOWschen Ansatz somit die Beziehung

$$V = f^2 \cdot V_{\text{adiab.}},$$

worin  $V_{\text{adiab.}}$  die nach Gl.(36) für den adiabatischen Fall bestimmte Verdunstungsmenge bedeutet. Bei Betrachtung der Verdunstung geht also der durch Gl.(35)definierte Korrektionsfaktor  $f$  quadratisch in die für adia-

batische Verhältnisse geltende Verdunstungsgleichung ein.

Für praktische Berechnungen dürfte es sich als zweckmäßig erweisen, in der Gl.(38a) an Stelle der spezifischen Feuchtigkeiten ( $q_1, q_2$ ) den Dampfdruck ( $e_1, e_2$ ) einzuführen und die Luftdichte ( $\rho$ ) mit Hilfe der Zustandsgleichung durch den Luftdruck ( $p$ ) und die (absolute) virtuelle Temperatur ( $T_v$ ) zu ersetzen. Wegen der Beziehungen

$$q = \frac{0.623 \cdot e}{p - 0.377 \cdot e} \approx \frac{0.623 \cdot e}{p} \quad \left[ \frac{\text{g Wasserdampf}}{\text{g feuchte Luft}} \right]$$

und

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T_v} \quad \left( \text{Gaskonstante } R = 2.868 \cdot 10^6 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2 \text{grad}} \right)$$

folgt aus Gl.(38a) für die Verdunstungsmenge  $\left[ \text{g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1} \right]$  der Ausdruck

$$V = f^2 \cdot \frac{0.623 \cdot k^2}{R} \cdot \frac{(e_1 - e_2) (v_2 - v_1)}{T_v \cdot \left[ \ln(z_2/z_1) \right]^2}, \quad (38b)$$

wenn alle Größen in CGS-Einheiten bzw. Grad Kelvin gegeben sind. Drückt man die Dampfdruckdifferenz ( $e_1 - e_2$ ) statt in CGS-Einheiten in  $[\text{mbar}]$ , die übrigen Größen in CGS-Einheiten aus, so folgt nach Einsetzen der Zahlenwerte für die Konstanten als Verdunstungsmenge  $\left[ \text{g} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1} \right]$  die Beziehung :

$$V = 3.475 \cdot 10^{-5} \cdot f^2 \cdot \frac{(e_1 - e_2) \cdot (v_2 - v_1)}{T_v \cdot \left[ \ln(z_2/z_1) \right]^2}. \quad (38c)$$

Für die stündliche Verdunstungshöhe (mm/Std) ergibt sich daraus die Gleichung

$$V = 1.251 \cdot f^2 \cdot \frac{(e_1 - e_2) (v_2 - v_1)}{T_v \cdot \left[ \ln(z_2/z_1) \right]^2} \quad \left[ \frac{\text{mm}}{\text{Std.}} \right], \quad (38d)$$

die sich für praktische Berechnungen in der Regel als am zweckmäßigsten erweisen dürfte, da sich insbesondere bei Wasserhaushaltsbetrachtungen als Maßzahl für den Niederschlag ebenfalls die Niederschlagshöhe eingebürgert hat.

In den oben entwickelten Verdunstungsformeln (36), (37), (38) lassen sich der Rauigkeitsparameter  $z_0$  bzw. die Verdrängungsdichte  $d$  in einfacher Weise durch die Transformationen  $z \rightarrow z + z_0$  bzw.  $z \rightarrow z - d$  einführen, falls sich dies bei einer praktischen Anwendung als notwendig er-

weisen sollte. Die Gl.(36) wurde zuerst von C.W.THORNTHWAITE und B.HOLZMAN(33) abgeleitet und später durch Einführung der Verdrängungsdichte (d) von F. PASQUILL (21) erweitert und angewendet. In abweichender Form hat N.E.RIDER(24) Gl.(37) zur Berechnung der Verdunstung herangezogen.<sup>2)</sup> Die THORNTHWAITE - HOLZMANsche Gleichung (36) ist in größerem Umfang in den angelsächsischen Ländern zur Ermittlung der Verdunstung und ihres zeitlichen Verlaufs benutzt worden. Wie unabhängige Bestimmungen der Verdunstung mit Hilfe anderer Methoden (siehe Einleitung) gezeigt haben, hat sich Gl.(36) weitgehend bewährt, obwohl Anwendungen auch auf nicht-adiabatische Schichtungsverhältnisse nicht vermieden werden konnten. Man kann daher erwarten, daß die hier neu entwickelten Verdunstungsformeln (38a-d), die auf einfache Weise noch den Einfluß der jeweiligen Schichtungsverhältnisse auf die Verdunstung zu berücksichtigen gestatten, zur weiteren Verbesserung unserer Kenntnisse der Verdunstung der festen und flüssigen Erdoberfläche beitragen können. Gegenüber der nach N.E.RIDER (24) mit Hilfe des DEACON - LEICHTMANNschen Ansatzes abgeleiteten Formel (37) weist die neue Gl.(38) einige wesentliche Vorteile auf. Neben ihren theoretisch gut fundierten Grundlagen setzt die praktische Anwendung der Gl.(38) nur Messungen in 2 Niveaus innerhalb der Bodenschicht voraus, während die Anwendung von Gl. (37) Messungen aus mindestens drei Niveaus erfordert, aus denen der Stabilitätsparameter  $\beta_0$  mit Hilfe ziemlich zeitraubender Approximationsverfahren berechnet werden muß.

## VI. Der Widerstands- und Verdunstungskoeffizient

### a) Definitionen

Bei der Behandlung der Probleme des vertikalen Impuls- und Wasserdampfaustausches zwischen Erdoberfläche und Atmosphäre hat sich die Einführung des sog. Widerstandskoeffizienten bzw. Verdunstungskoeffizienten als kennzeichnender Parameter des Austauschvorgangs als zweckmäßig erwiesen. Obwohl in der vorliegenden Arbeit in erster Linie das Verdunstungsproblem behandelt wird und deshalb hauptsächlich der Verdunstungs-

<sup>2)</sup> Bei N.E.RIDER(24) tritt als zusätzlicher Faktor in der Verdunstungsgleichung (37) noch die Größe  $z_0^{2(1-\beta_0)}$  auf, so daß für  $z_0 \rightarrow 0$  auch  $V \rightarrow 0$  zu fordern wäre. Diese schwer verständliche Folgerung wird hier durch abweichende Grenzwertbildung (siehe Lit.5) vermieden.

koeffizient interessiert, soll in diesem Abschnitt auch eine Darstellung des Widerstandskoeffizienten gegeben werden, da die mathematischen Entwicklungen weitgehend parallel verlaufen.

Der Widerstandskoeffizient ( $\gamma^2$ ) ist nach dem Vorgang von G.I.TAYLOR(32) durch

$$z = g \cdot \gamma^2 \cdot v^2, \quad (39)$$

der Verdunstungskoeffizient ( $\Gamma$ ) nach dem Vorgang von R.B. MONTGOMERY (17) durch

$$v = -g \cdot k^2 \Gamma^2 \cdot (q - q_0) \cdot v \quad (40)$$

definiert. Wie die Gleichungen (39) und (40) erkennen lassen, sind der Widerstands- und Verdunstungskoeffizient nicht durch einander völlig analoge Gleichungen definiert. Bei der (hier stets vorausgesetzten) Gleichheit der vertikalen Austauschkoefizienten für den Impuls- und Wasserdampfstrom besteht vielmehr nach den Gl.(7),(39),(40) der Zusammenhang

$$\gamma^2 = (k \cdot \Gamma)^2, \quad (41)$$

der eine Überführung der Koeffizienten ineinander gestattet.

Während eine Darstellung der praktischen Berechnungsformeln für den Verdunstungs- und Widerstandskoeffizienten nach dem MONIN-OBUCHOWSchen Ansatz (27) noch aussteht, liegt eine solche für den PRANDTLschen bzw. DEACON-LEICHTMANNschen Ansatz in mehreren Untersuchungen (siehe z.B. Lit.(2),(4),(17)) vor. In diesem Abschnitt wird eine geschlossene Darstellung für alle hier behandelten Ansätze gegeben, worin die früheren Ergebnisse einer entsprechenden kritischen Untersuchung des Verfassers (4) bei methodisch abweichender Behandlung erneut bestätigt werden.

#### b) Berechnung des Widerstandskoeffizienten

Durch eine Kombination der Beziehungen (4),(39) erhält man für den Widerstandskoeffizienten ( $\gamma^2$ ) die Bestimmungsgleichung

$$\gamma^2 = \left[ \frac{v_*}{v} \right]^2, \quad (42)$$

die bei Kenntnis der Schubspannungsgeschwindigkeit ( $v_*$ ) zur praktischen Berechnung des Widerstandskoeffizienten benutzt werden kann. Zur Ablei-

tung einer weiteren Berechnungsformel stellen wir die verschiedenen Ansätze für die Profilgleichungen (8),(16),(27) durch den verallgemeinerten Ansatz

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_*}{f(z)} \quad (43)$$

dar, wobei  $f(z)$

a) nach dem PRANDTLschen Ansatz (8) durch

$$f(z) = k \cdot (z + z_0) \quad , \quad (44)$$

b) nach dem DEACON-LEICHTMANNschen Ansatz (16) durch

$$f(z) = k \cdot (z + z_0)^{\beta_0} \quad , \quad (45)$$

c) nach dem MONIN-OBUCHOWschen Ansatz (27) durch

$$f(z) = \frac{k \cdot (z + z_0)}{1 + \beta \cdot \left( \frac{z + z_0}{L} \right)} \quad (46)$$

gegeben ist. Durch Integration von Gl.(43) mit den Integrationsgrenzen  $(z,0)$  folgt für den Widerstandskoeffizienten nach Gl.(42) die allgemeine Beziehung

$$\gamma^2 = \left[ \frac{1}{\int_0^z \frac{dz}{f(z)}} \right]^2 \quad (47)$$

Aus den Beziehungen (42), (47) lassen sich die für praktische Berechnungen des Widerstandskoeffizienten geeigneten Formeln auf einfache Weise ableiten. Man erhält

a) im Fall adiabatischer Schichtung (PRANDTLscher Ansatz)

aus den Gl.(44),(47) :

$$\gamma^2 = \left[ \frac{k}{\ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right)} \right]^2 \quad , \quad (48)$$

aus den Gl.(9),(42) :

$$\gamma^2 = \left[ \frac{k \cdot (v_2 - v_1)}{v \cdot \ln \left( \frac{z_2 + z_0}{z_1 + z_0} \right)} \right]^2 \quad (49)$$

b) im Fall beliebiger Schichtung

1. nach dem Ansatz von DEACON-LEICHTMANN

aus den Gl.(45),(47) :

$$\gamma^2 = \left[ \frac{k \cdot (1 - \beta_0)}{(z + z_0)^{1-\beta_0} - z_0^{1-\beta_0}} \right]^2, \quad (50)$$

aus den Gl.(17),(42) :

$$\gamma^2 = \left[ \frac{k \cdot (1 - \beta_0) \cdot (v_2 - v_1) / v}{(z_2 + z_0)^{1-\beta_0} - (z_1 + z_0)^{1-\beta_0}} \right]^2 \quad (51)$$

2. nach dem Ansatz von MONIN-OBUCHOW

aus den Gl.(46),(47) :

$$\gamma^2 = \left[ \frac{k}{\ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) + \frac{\beta}{L} \cdot z} \right]^2, \quad (52)$$

aus den Gl.(28),(42),(49) :

$$\gamma^2 = \left[ \frac{k \cdot (v_2 - v_1) / v}{\ln \left( \frac{z_2 + z_0}{z_1 + z_0} \right) + \frac{\beta}{L} \cdot (z_2 - z_1)} \right]^2 \quad (53)$$

oder

$$\gamma^2 = f^2 \cdot \gamma_{\text{adiab.}}^2 \quad (54)$$

In der Gl.(54) stellt  $\gamma_{\text{adiab.}}^2$  den nach der Gl. (49) berechneten Widerstandskoeffizienten dar, der für adiabatische Schichtungsverhältnisse Gültigkeit besitzen würde. In den Berechnungsformeln (52-54) ist das Längenmaß L durch die Gl. (32), der Korrektionsfaktor F durch Gl. (35) gegeben.

c) Berechnung des Verdunstungskoeffizienten

Zur Ermittlung des Verdunstungskoeffizienten können wir uns auf die Gl.(41) stützen, die in der Form

$$\Gamma = \frac{\gamma}{k} \quad (55)$$

bei Benutzung der im vorigen Absatz für den Widerstandskoeffizienten  $\gamma^2$

abgeleiteten Beziehungen (48), (50), (52) eine direkte Berechnung von  $\Gamma$  erlaubt. Eine weitere Formel zur Berechnung des Verdunstungskoeffizienten ergibt sich aus den Gl.(7), (40), (42), (55), aus denen nach einigen Umformungen die Beziehung

$$\Gamma = \frac{q_1 - q_2}{q_0 - q} \frac{v_*}{k \cdot (v_2 - v_1)} \quad (56)$$

resultiert. Für die verschiedenen Spezialfälle erhält man damit

a) im Fall adiabatischer Schichtung (PRANDTLscher Ansatz)

aus den Gl.(48), (55) :

$$\Gamma = \frac{1}{\ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right)} \quad , \quad (57)$$

aus den Gl.(9), (56) :

$$\Gamma = \frac{\frac{q_1 - q_2}{q_0 - q}}{\ln \left( \frac{z_2 + z_0}{z_1 + z_0} \right)} \quad (58)$$

b) im Fall beliebiger Schichtung

1. nach dem Ansatz von DEACON-LEICHTMANN

aus den Gl.(50), (55) :

$$\Gamma = \frac{1 - \beta_0}{(z + z_0)^{1-\beta_0} - z_0^{1-\beta_0}} \quad , \quad (59)$$

aus den Gl.(17), (56) :

$$\Gamma = \frac{(1 - \beta_0) \cdot \frac{q_1 - q_2}{q_0 - q}}{(z_2 + z_0)^{1-\beta_0} - (z_1 + z_0)^{1-\beta_0}} \quad (60)$$

2. nach dem Ansatz von MONIN-OBUCHOW

aus den Gl.(52), (55) :

$$\Gamma = \frac{1}{\ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) + \frac{\beta}{L} \cdot z} \quad , \quad (61)$$

aus den Gl.(28),(56) :

$$\Gamma = \frac{\frac{q_1 - q_2}{q_0 - q}}{\ln \left( \frac{z_2 + z_0}{z_1 + z_0} \right) + \frac{\beta}{L} \cdot (z_2 - z_1)} \quad (62)$$

oder

$$\Gamma = f \cdot \Gamma_{\text{adiab.}} \quad (63)$$

In der Gl.(63) stellt  $\Gamma_{\text{adiab.}}$  den nach der Gl.(58) berechneten "adiabatischen" Verdunstungskoeffizienten dar, der für indifferente Schichtungsverhältnisse Gültigkeit besitzen würde. In diesen Berechnungsformeln ist das Längenmaß L durch die Gl. (32) gegeben. Der Korrektionsfaktor f ist nach Gl.(35) zu berechnen.

Sind die zur Ermittlung des Widerstands- oder Verdunstungskoeffizienten angestellten Beobachtungen in einem Niveau angestellt, für das  $z_i \gg z_0$  ( $i = 1, 2$ ) gilt, so lassen sich die obigen Berechnungsformeln vereinfachen, indem man  $z_0$  gegen  $z$  vernachlässigt, d.h.  $(z + z_0)$  durch  $z$  ersetzt. Ebenso läßt sich die Verdrängungsdichte  $d$  durch die Transformation  $(z + z_0) \rightarrow (z - d)$  auf einfache Weise in die oben abgeleiteten Gleichungen für den Widerstands- und Verdunstungskoeffizienten einführen.

## VII. S c h l u ß (Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit sind neue Gleichungen für die Bestimmung der Verdunstung der natürlichen festen oder flüssigen Erdoberfläche hergeleitet worden, die im wesentlichen auf neueren Untersuchungsergebnissen beruhen, die A.S. MONIN und A.M. OBUCHOW(16) vorgelegt haben. Die neuen Gleichungen ermöglichen es, den Einfluß der bodennahen vertikalen Temperaturschichtung auf die Austauschvorgänge in der Bodenschicht der Atmosphäre zu berücksichtigen und stellen deshalb gegenüber früheren Versuchen einen Fortschritt dar. Für die praktische Anwendung der hier entwickelten neuen Gleichungen sind simultane Beobachtungen der Windgeschwindigkeit, der spezifischen Feuchtigkeit sowie der Temperatur für zwei Niveaus innerhalb der Bodenschicht erforderlich. Da solche Messungen keine wesentlichen instrumentellen Schwierigkeiten bieten, eröffnen

sich wegen ihres relativ geringen instrumentellen Aufwandes durchaus Möglichkeiten für Anwendungen auf maritime Verdunstungsprobleme.

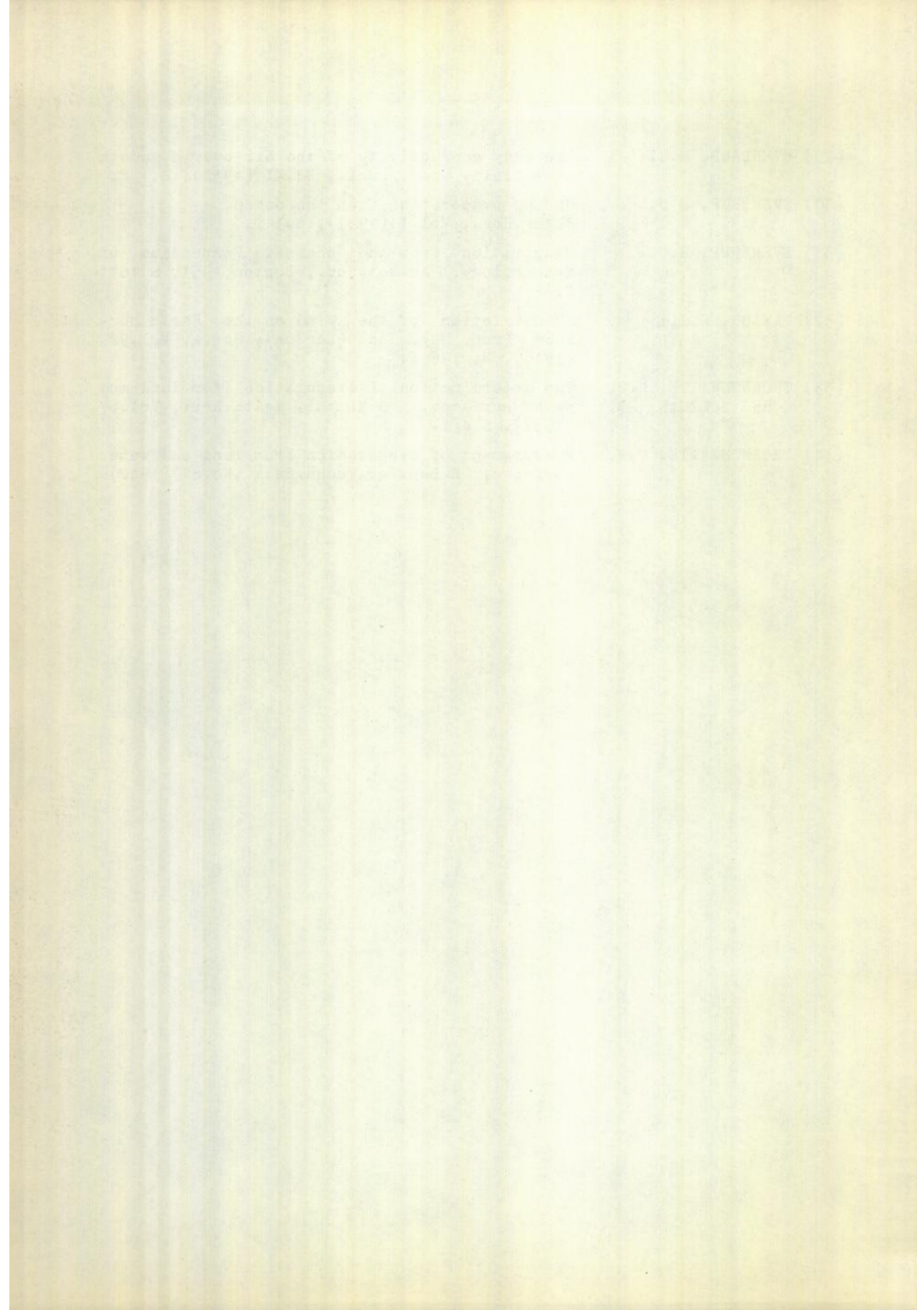
Die Verwendung der eindimensionalen Diffusionsgleichung in der Form (1) bei der Ableitung der Verdunstungsformeln bedeutet wegen der Vernachlässigung der advektiven Terme natürlich eine gewisse Einschränkung ihrer Allgemeingültigkeit. Der Anwendungsbereich der hier neu abgeleiteten Verdunstungsformeln beschränkt sich daher auf solche Oberflächen, die hinsichtlich ihrer Rauigkeits-, Feuchtigkeits- und Temperaturverhältnisse keine größeren horizontalen Inhomogenitäten aufweisen, da diese die Ausbildung interner Grenzschichten mit Unstetigkeiten in den vertikalen Wind-, Feuchtigkeits- und Temperaturprofilen zur Folge haben. Die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der abgeleiteten Gleichungen auf maritime Verdunstungsprobleme dürften - von wenigen Ausnahmen (starke horizontale Unterschiede der Wasseroberflächentemperatur, küstennahe Gebiete mit ablandigen Winden) abgesehen - weitgehend erfüllt sein.

Literatur

- (1) BJÖRGUM, O.: Note on the derivation of the logarithmic velocity profil. Qu. J. Roy. Met.Soc., Vol.78 (1952), S.89 f.
- (2) BROCKS, K.: Wasserdampfschichtung über dem Meer und "Rauigkeit" der Meeresoberfläche. Arch.Meteorol., Geophys. u. Bioklim., Serie A, Bd.8(1955), S. 354 f.
- (3) BROCKS, K.: Atmosphärische Temperaturschichtung und Austauschprobleme über dem Meer. Ber.Dtsch.Wetterd., Nr.22, Bd.4 (1956), S.10 f.
- (4) BROGMUS, W.: Zur Definition und Berechnung des Widerstands- und Verdunstungskoeffizienten bei nicht-adiabatischer Schichtung. Ann. Met., Bd.8 (1958), S.225 f.
- (5) BROGMUS, W.: Über die Reduktion von Windgeschwindigkeitsmessungen über See auf vorgegebene Bezugshöhen nebst Anwendungen. Erscheint in Ann.Met. 1958/59.
- (6) BUSINGER, J.A.: Some aspects of the influence of the earth surface on the atmosphere. Mededel. en Verhand. Bd.61 (1954).
- (7) CHARNOCK, H.: Windprofile über einer Wasseroberfläche und Windschubspannung. Vortragszusammenfassung Tagung Dtsch.Meteorolog.Ges., Hamburg 1956
- (8) DEACON, E.L.: Vertical diffusion in the lowest layers of the atmosphere Qu.J.Roy.Met.Soc., Vol.75 (1949), S.8 f.
- (9) ERTEL, H.: Beweis der Wilh. Schmidtschen konjugierten Potenzformeln für Austausch und Windgeschwindigkeit in den bodennahen Luftschichten. Met.Z., Bd. 50 (1933), S.386 f.
- (10) FRANKENBERGER, E.: Über das vertikale Gefälle der Luftfeuchtigkeit und die Verdunstung bei Quickborn/Holst. Ber.Dtsch.Wetterd., US-Zone, Nr.12 (1950), S.45 f.
- (11) HOLZMAN, B.: The influence of stability on evaporation. Ann. New York Acad.Sci., Vol.44 (1943), S.13 f.
- (12) LEICHTMANN, D.L.: Windprofil und Austausch in der bodennahen Schicht der Atmosphäre (russ.). Nachr. Akad. Wiss. UdSSR, Ser. Geogr. u. Geophys., Bd.8 (1944), Nr.1. (zitiert nach Lit.(16)).
- (13) LETTAU, H.: Isotropic and non-isotropic turbulence in the atmospheric surface layer. Geophys. Res. Pap., No.1, Cambridge (Mass.), 1949.

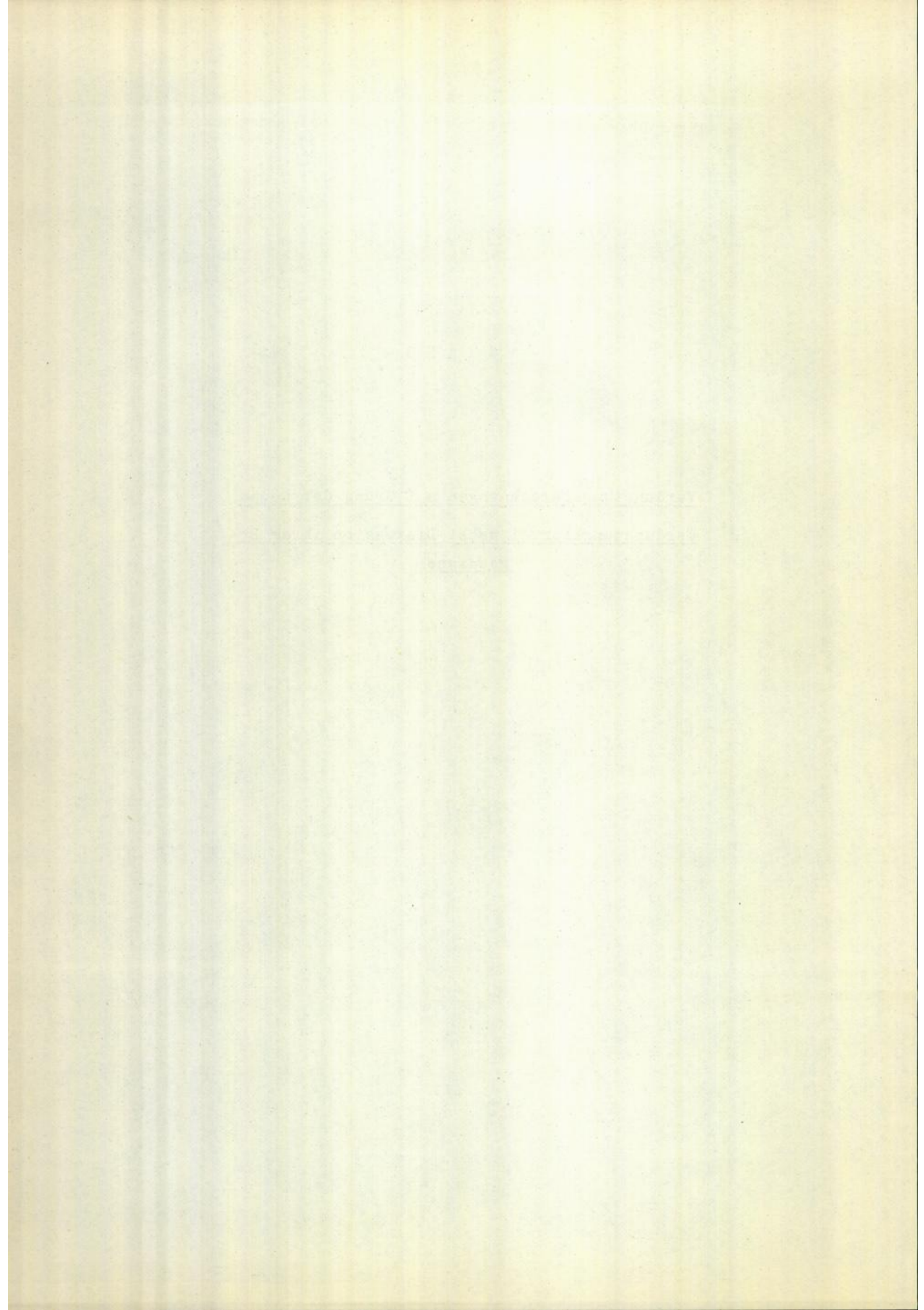
- (14) LETTAU, H.: Note on the structure of the atmospheric surface layer. J.Met., Vol.13 (1956), S.507 f.
- (15) LETTAU H. und DAVIDSON, B.: Exploring the atmosphere's first mile. Vol.I, II. Pergamon Press, New York 1957.
- (16) MONIN, A.S. und OBUCHOW, A.M.: Fundamentale Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Vermischung in der bodennahen Schicht der Atmosphäre (russ.), (1954), enthalten in "Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz" (Herausg.: Dr. H. Goering), Akademie-Verlag, Berlin 1958.
- (17) MONTGOMERY, R.B.: Observations of vertical humidity distribution above the ocean surface and their relation to evaporation. Pap.Phys.Oceanogr. and Met., Vol. 7 (1940), S.30 f.
- (18) MONTGOMERY, R.B. und ROSSBY, C.-G.: The layer of frictional influence in wind and ocean currents. Pap. Phys. Oceanogr. and Met., Vol.3 (1935), No.3.
- (19) NEUMANN, G.: Die Meeresoberfläche als hydrodynamische Grenzfläche und das Windfeld über den Wellen. Ann.Met., Bd.2 (1949), S. 156 f.
- (20) PAESCHKE, W.: Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem. Beitr. Phys. fr. Atm., Bd. 24 (1937), S.163 f.
- (21) PASQUILL, F.: Some estimates of the amount and diurnal variation of evaporation from a clayland pasture in fair spring weather. Qu.J.Roy.Met. Soc., Vol.75 (1949), S.249 f.
- (22) PRANDTL, L.: Meteorologische Anwendungen der Strömungslehre. Beitr. Phys. fr. Atm., Bd.19 (1932)S. 188 f.
- (23) REICHEL, E.: Der Stand des Verdunstungsproblems. Ber.Dtsch. Wetterd., US-Zone, Nr.35 (1952), S.155 f.
- (24) RIDER, N.E.: Evaporation from an oat field. Qu.J.Roy.Met. Soc., Vol.80 (1954), S.198 f.
- (25) ROLL, H.-U.: Wassernahes Windprofil und Wellen auf dem Wattenmeer. Ann.Met., Bd.1 (1948), S.139 f.
- (26) ROLL, H.-U.: Vergleichende Betrachtung und Kritik von Windprofilmessungen auf See. Ann.Met., Bd.2 (1949), S.71 f.
- (27) ROSSBY, C.G. und MONTGOMERY, R.B.: The layer of frictional influence in wind and ocean currents. Pap. Phys. Oceanogr. and Met., Vol. 3 (1935), No.3.
- (28) SCHMIDT, W.: Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. Hamburg 1925.

- (29) SVERDRUP, H.U.: The eddy conductivity of the air over a smooth snow field. Geof. Publ., Bd.XI (1936), S.1 f.
- (30) SVERDRUP, H.U.: On the evaporation from the ocean. J.Mar.Res., Vol.I (1937), S.3 f.
- (31) SVERDRUP, H.U.: Evaporation from the oceans. Compendium of Meteorology. Am.Met.Soc., Boston 1951, S.1071 f.
- (32) TAYLOR, G.I.: Skin-Friction of the Wind on the Earth Surface. Proc. Roy. Soc. (London), Ser.A, Vol.92 (1916), S. 196 f.
- (33) THORNTHWAITE, C.W. und HOLZMAN, B.: The determination of evaporation from land and water surfaces. US Monthl. Weath.Rev., Vol.67 (1939), S.4 f.
- (34) THORNTHWAITE, C.W.: Measurement of evaporation from land and water surfaces. US Dep.Agr.Techn.Bull.,No.817(1942).



- A N H A N G -

Verdunstungsberechnungen auf Grund der neuen  
Verdunstungsformel nebst Diskussion ihrer Er-  
gebnisse



## I. Einleitung

In der vorliegenden Veröffentlichung hat der Verfasser versucht, neue Gleichungen zur Ermittlung der Verdunstung der natürlichen Erdoberfläche abzuleiten, die den Einfluß der bodennahen Stabilitätsverhältnisse auf den Vertikalaustausch des Wasserdampfes zu berücksichtigen gestatten. In Ergänzung zu den vorhergehenden theoretischen Ausführungen werden in diesem Anhang vorläufige Ergebnisse ihrer praktischen Anwendung mitgeteilt und diskutiert mit dem besonderen Ziel, gleichzeitig eine Prüfung der Theorie auf ihre Brauchbarkeit zu ermöglichen.

Zur Prüfung der Theorie sind neben Beobachtungen der Windgeschwindigkeit, des Dampfdrucks und der Temperatur in zwei verschiedenen Niveaus der bodennahen Luftschicht auch simultane Bestimmungen der Verdunstung erforderlich. Es ist offensichtlich, daß diese Verdunstungsbestimmungen bei obiger Zielsetzung auf Methoden beruhen müssen, die von der vorliegenden Theorie und den ihr zugrundeliegenden Annahmen (Gleichheit der Austauschkoeffizienten für den vertikalen Impuls-, Wasserdampf- und Wärmestrom) unabhängig sind.\*) Für unsere Zwecke kommen deshalb im wesentlichen nur solche Verdunstungsbeobachtungen als Vergleichsmaterial in Betracht, die sich auf Untersuchungen der Wasserbilanz der natürlichen Erdoberfläche, auf Lysimeterbeobachtungen oder damit eng verwandte Verfahren abstützen können.

Während Messungen des vertikalen Windprofils in den bodennahen Luftschichten in relativ großem Umfang und Beobachtungswerte des vertikalen Feuchtigkeits- und Temperaturprofils noch in genügendem Maße vorhanden sind, liegen nur verhältnismäßig wenig Veröffentlichungen vor, die solche Profilmessungen in Verbindung mit simultanen Verdunstungsbeobachtungen enthalten. Als Beobachtungsmaterial, das den geforderten Bedingungen in ausreichendem Maße genügt, sind dem Bearbeiter gegenwärtig nur einige Meßreihen zugänglich, die von F. PASQUILL(1) in einer Unter-

---

\*) Hierunter fallen auch die Methoden, die auf Wärmehaushaltsbetrachtungen basieren, sofern das sog. "Bowen ratio" zur Berechnung der Verdunstung herangezogen ist.

suchung über den vertikalen Wärme- und Wasserdampfaustausch in der bodennahen Luftschicht veröffentlicht sind. Diese Meßreihen liegen der vorliegenden ergänzenden Untersuchung als Beobachtungsmaterial zugrunde.

## II. Das Beobachtungsmaterial

Das in der vorliegenden Untersuchung verwendete, von F.PASQUILL(1) vorgelegte Beobachtungsmaterial beruht auf Messungen, die im März 1948 auf einem mit kurzem Gras bewachsenen Lehmbodengelände des Versuchsgutes der Universität Cambridge erstellt worden sind. Die Messungen des Vertikalprofils der Windgeschwindigkeit, der Feuchtigkeit und der Temperatur wurden in verschiedenen Höhenstufen zwischen 25 und 200 cm mit Hilfe von besonders empfindlichen Schalenkreuzanemometern und ventilierten thermoelektrischen Psychrometern angestellt, die an vertikale Masten auswechselbar montiert waren. Nach den Angaben von F. PASQUILL(1) kann die Bedingung der horizontalen Homogenität des Geländes, die als Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Theorie gefordert werden muß, in weitgehendem Maße als erfüllt angesehen werden.

Insgesamt hat F. PASQUILL (1) 25 Beobachtungsserien (Nr. 6-30) veröffentlicht. Aus Gründen, die in der Originalveröffentlichung ausführlicher dargelegt werden, ist die Genauigkeit der ersten Beobachtungsreihen jedoch wegen Eichschwierigkeiten zumindest zum Teil anzuzweifeln. Bei den letzten Beobachtungsserien (Nr. 15-30) hat F. PASQUILL eine systematische Vertauschung der Anemometer und Psychrometer während jeder Meßreihe vorgenommen, wobei sich systematische Fehler durch Mittelwertbildung gegenseitig weitgehend ausgleichen. Da jeweils die Meßinstrumente in den Höhen 200 und 100 cm, 150 und 37.5 cm und schließlich 50 und 25 cm während einer Meßserie paarweise miteinander vertauscht worden sind, kommt den Meßpaaren aus den zusammengehörigen Höhen die größere Genauigkeit zu. Da ferner die Temperaturangaben für das Höhenniveau von 200 cm nur auf zehntel Grad Fahrenheit, die der obrigen Niveaus aber auf hundertstel Grad Fahrenheit genau angeführt sind, liegen unserer Bearbeitung die Meßpaare aus den Höhenniveaus 150 und 37.5 cm zugrunde, zumal diese auch gegenüber dem verbleibenden Bereich von 50 und 25 cm mit paarweisen Messungen das größere Höhenintervall umfassen und sich überdies Fehler in der Bestimmung des Rauigkeitsparameters weniger stark

auswirken.

Zur Ermittlung der Verdunstung hat F. PASQUILL (1) besonders konstruierte Erdboden-Evaporimeter benutzt, die mit ungestörten Erdbodenproben gefüllt und so in den Erdboden eingelassen werden konnten, daß ihr Oberrand lückenlos mit der natürlichen Erdoberfläche abschloss. Der Wasserverlust durch Verdunstung wurde jeweils durch Wägung zu Beginn und am Ende der einzelnen Meßreihen ermittelt. Obwohl die Genauigkeit dieser Methode der Verdunstungsbestimmung nicht an die der normalen Lysimetermethode heranreichen dürfte, kann jedoch nach F. PASQUILL(1) angenommen werden, daß dieselben eine befriedigende Abschätzung der wahren Verdunstung des Erdbodens vermitteln.

Beob.- serie	Windgeschwindigk. v (cm/sec)		abs. Feuchtigkeit a (g/m <sup>3</sup> )		Temperatur (°F)		Verdunst. V · 10 <sup>8</sup> g/cm <sup>2</sup> sec
	150 cm	37.5 cm	150 cm	37.5 cm	150 cm	37.5 cm	
15	247	200	4.74	5.21	48.11	48.81	345
16	249	206	5.46	5.95	52.45	53.58	410
17	313	253	5.19	5.70	55.29	56.22	390
18	393	317	5.06	5.40	53.01	53.03	260
19	256	189	4.48	4.68	44.71	43.43	75
20	314	254	4.99	5.49	54.80	55.74	320
21	458	365	4.34	4.82	58.47	59.22	420
22	469	363	3.30	3.78	58.89	59.12	350
23	231	157	3.74	4.05	50.52	48.44	75
24	500	398	4.90	5.25	54.50	55.53	430
25	547	427	5.18	5.60	57.13	58.41	440
26	500	386	5.42	5.81	57.71	58.23	330
27	358	276	5.65	5.95	56.39	56.26	185
28	166	101	5.40	5.53	47.18	44.85	25
29	743	594	8.12	8.41	56.95	57.50	420
30	624	493	7.61	7.81	56.52	56.71	255

**Tab.1** Originalwerte der Windgeschwindigkeit, der absoluten Feuchtigkeit und der Temperatur in den Höhenstufen 150 cm und 37.5 cm sowie der Verdunstung (auszugsweise nach F. PASQUILL).

In der Tab. 1 sind die in unserer Bearbeitung verwendeten Beobachtungsdaten von F. PASQUILL (1), die einstündige Mittelwerte darstellen, wiedergegeben. Aus ihnen sind die für die Anwendung der Verdunstungsformel benötigten Angaben abgeleitet und in der Tab.2 zusammengestellt. Die in der Tab. 2 mitgeteilten Werte der Mitteltemperatur ( $T_o$ ) und der mittleren virtuellen Temperatur ( $T_v$ ) stellen das arithmetische Mittel aus den genannten Temperaturgrößen in den Höhenstufen 150 und 37.5 cm dar.

Bei der Berechnung der virtuellen Temperatur aus den Temperatur- und Feuchtigkeitsangaben der Originalwerte ist ein Normaldruck von  $p_0 = 1000$  mb zugrundegelegt worden.

Beob.- serie	$v_{150} - v_{37.5}$ (cm/s)	$e_{37.5} - e_{150}$ (mb)	$T_{150} - T_{37.5}$ (°K)	$T_0$ (°K)	$T_v$ (°K)
15	47	0.68	-0.39	282.3	283.0
16	43	0.66	-0.63	284.8	285.6
17	60	0.69	-0.52	286.4	287.1
18	76	0.45	-0.01	284.8	285.6
19	67	0.24	+0.71	279.9	280.5
20	60	0.67	-0.52	286.1	286.8
21	93	0.64	-0.42	288.1	288.7
22	106	0.64	-0.13	288.2	288.7
23	74	0.38	+1.16	282.9	283.4
24	102	0.47	-0.57	285.9	286.7
25	120	0.57	-0.71	287.5	288.2
26	114	0.52	-0.29	287.6	288.4
27	82	0.39	+0.07	286.7	287.5
28	65	0.13	+1.29	280.9	281.7
29	149	0.39	-0.31	287.2	288.3
30	131	0.27	-0.11	286.8	287.9

Tab.2 Werte der Windgeschwindigkeits-, Dampfdruck- und Temperaturdifferenzen zwischen den Niveaus 150 und 37.5 cm sowie Mittelwerte der Temperatur und virtuellen Temperatur in der Schicht zwischen 150 und 37.5 cm (nach Daten von F. PASQUILL(1)).

### III. Berechnungsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Berechnungsergebnisse dargelegt, die sich bei der Anwendung der theoretischen Formeln auf die in Tabelle 2 zusammengestellten Beobachtungsgrößen für die Verdunstung ergeben. Berücksichtigt man in den neu abgeleiteten Verdunstungsformeln wegen der verhältnismäßig niedrigen Beobachtungshöhen noch den Rauigkeitsparameter  $z_0$ , für den F. PASQUILL (1) einen Wert von 0.25 cm gefunden hat, so gilt nach den im Hauptteil (Abschn.V, Gl.38a-c) dargelegten theoretischen Ausführungen für die Verdunstung

$$V = f^2 \cdot V_{\text{adiab.}} \quad , \quad (1)$$

worin  $V_{\text{adiab.}}$  (bei Verwendung von Dampfdruckangaben in mb) durch

$$V_{\text{adiab.}} = 3.475 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{(e_1 - e_2) \cdot (v_2 - v_1)}{T_v \cdot \left[ \ln \left( \frac{z_2 + z_0}{z_1 + z_0} \right) \right]^2} \quad (2)$$

gegeben ist. Diesem Ausdruck für  $V_{\text{adiab.}}$  kommt nur im Fall adiabatischer Schichtungsverhältnisse eine reale Bedeutung als Verdunstungsgröße zu. Bei nicht-adiabatischen Schichtungsverhältnissen ist der Ausdruck dagegen keiner anschaulichen Interpretation fähig und nur als eine fiktive Rechengröße aufzufassen, in der verschiedene Beobachtungsgrößen in zweckmäßiger Weise zusammengefaßt sind. Dies erhellt schon aus der offensichtlichen Tatsache, daß  $V_{\text{adiab.}}$  bei indifferenter Schichtung (mit entsprechenden logarithmischen Höhenfunktionen der meteorologischen Elemente) eine von der Höhe unabhängige Konstante darstellt, während diese Größe im Fall nicht-adiabatischer Schichtung (mit nicht-logarithmischen Höhenprofilen) eine Variable verkörpert, deren Größe von den Beobachtungshöhen ( $z_1, z_2$ ) abhängig ist. Dieser Sachverhalt ist bei weitergehenden Interpretationen der folgenden Ergebnisse stets zu beachten, wenn Fehlschlüsse vermieden werden sollen. In diesem Zusammenhang kann jedoch nicht weiter auf diesen nicht unmittelbar zur Sache gehörenden Fragenkomplex eingegangen werden.

Der in die Gl. (1) quadratisch eingehende, im Hauptteil durch Gl. 35 definierte "Korrektionsfaktor"  $f$  ist durch den Ausdruck

$$f = 1 - \beta \cdot \frac{g}{T_0} \cdot \frac{T_2 - T_1}{(v_2 - v_1)^2} \cdot (z_2 - z_1) \quad (3)$$

gegeben. Führt man noch die im engen Zusammenhang mit der RICHARDSONschen Zahl stehende, durch

$$S = \frac{g}{T_0} \cdot \frac{T_2 - T_1}{(v_2 - v_1)^2} \cdot (z_2 - z_1) \quad (4)$$

definierte und hier kurz als "Stabilitätsfunktion"  $S$  bezeichnete Größe ein, so gelten

$$V = (1 - \beta \cdot S)^2 \cdot V_{\text{adiab.}} \quad (5)$$

und

$$f^2 = \frac{V}{V_{\text{adiab.}}} = (1 - \beta \cdot S)^2, \quad (6)$$

die eine Bestimmung der Größe der universellen Konstanten  $\beta$  aus den hier vorliegenden Beobachtungsgrößen ermöglicht. Setzt man in Gl.(6) die aus Profilmessungen ableitbaren Werte von  $V_{\text{adiab.}}$  und  $S$ , sowie für  $V$  die beobachteten Werte der Verdunstung  $V_{\text{beob.}}$  ein, so läßt sich die im statistischen Sinne "beste Schätzung" der Größe  $\beta$  durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate aus der Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \sum \left[ f_{\text{beob.}}^2 - (1 - \beta \cdot S)^2 \right]^2 = 0 \quad (7)$$

gewinnen. Aus der Gl.(7) ergibt sich dann als Bestimmungsgleichung für  $\beta$  die kubische Gleichung

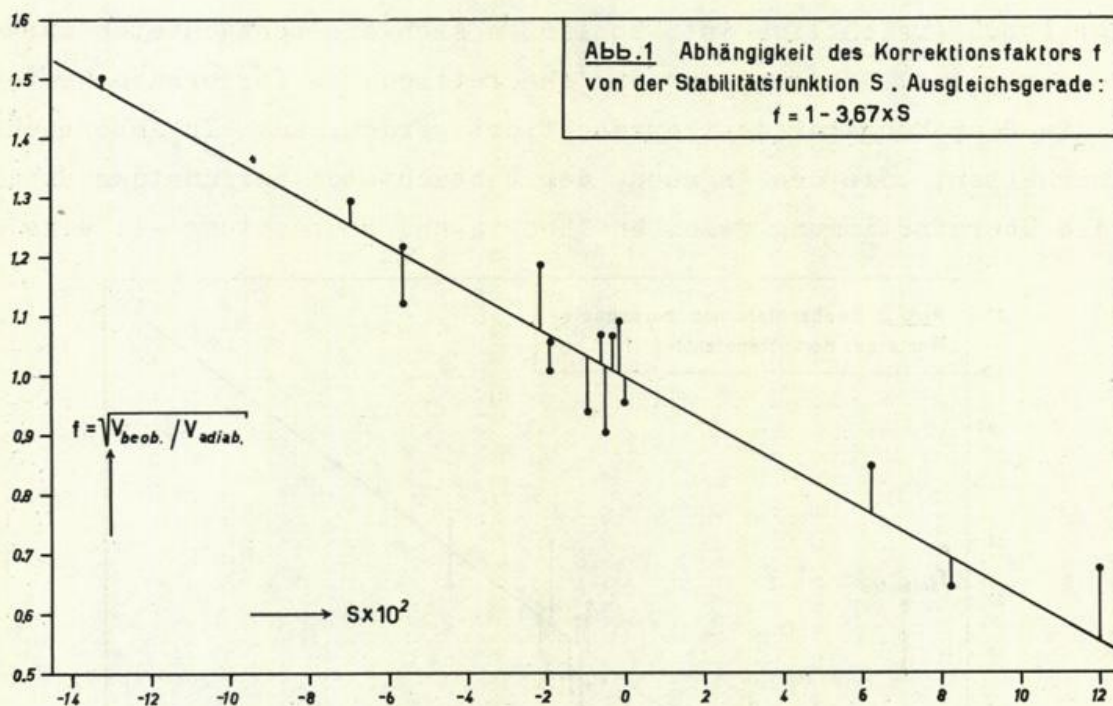
$$(3 \cdot \sum S^2 - \sum f \cdot S^2) \cdot \beta - (3 \cdot \sum S^3) \cdot \beta^2 + (\sum S^4) \cdot \beta^3 = \sum S - \sum f \cdot S, \quad (8)$$

worin die Summierung über alle  $f, S$  der 16 Beobachtungsreihen zu erstrecken ist. Da mit einer zunehmenden Instabilität ( $S < 0$ ) unter sonst gleichen äusseren Verhältnissen auch ein verstärkter Vertikalaustausch und damit ebenfalls eine verstärkte Verdunstung verknüpft ist, kann nach Gl.(5) nur den positiv-reellen Wurzeln von Gl.(8) eine reale physikalische Bedeutung beigemessen werden.

Beob.- serie	$V_{\text{beob.}} \cdot 10^8$ (g/cm <sup>2</sup> sec)	$V_{\text{adiab.}} \cdot 10^8$ (g/cm <sup>2</sup> sec)	$f^2 = \frac{V_{\text{beob.}}}{V_{\text{adiab.}}}$	$S \cdot 10^2$
15	345	206	1.68	- 6.90
16	410	181	2.26	-13.20
17	390	263	1.48	- 5.56
18	260	218	1.19	- 0.06
19	75	104	0.72	+ 6.24
20	320	255	1.25	- 5.57
21	420	376	1.12	- 1.86
22	350	428	0.82	- 0.44
23	75	181	0.42	+ 8.27
24	430	305	1.41	- 2.11
25	440	432	1.02	- 1.89
26	330	374	0.88	- 0.86
27	185	203	0.91	+ 0.40
28	25	55	0.46	+12.00
29	420	367	1.14	- 0.54
30	255	224	1.14	- 0.25

Tab.3 Werte des Korrektionsfaktors  $f_{\text{beob.}}^2 = V_{\text{beob.}}/V_{\text{adiab.}}$  und zugehörige Werte der Stabilitätsfunktion  $S$  (nach Daten von F. PASQUILL(1)).

Die zur Anwendung der Gl.(8) auf die Bestimmung von  $\beta$  erforderlichen Größen  $f^2$  und  $S$  sind in der Tabelle 3 wiedergegeben. Als positiv-reelle Lösung von Gl.(8) resultiert daraus ein Wert von  $\beta$  in Höhe von 3.67, der sich wesentlich von dem MONIN-OBUCHOWschen, aus Windprofilmessungen abgeleiteten Wert von  $\beta = 0.6$  unterscheidet. Auf diese Diskrepanz wird später noch näher eingegangen. In der Abb. 1 ist die Abhängigkeit der Größe  $f$  von der Stabilitätsfunktion  $S$ , für die sich nach Gl.(6) eine lineare Beziehung ergeben muß, graphisch dargestellt. Wie aus der Abb.1



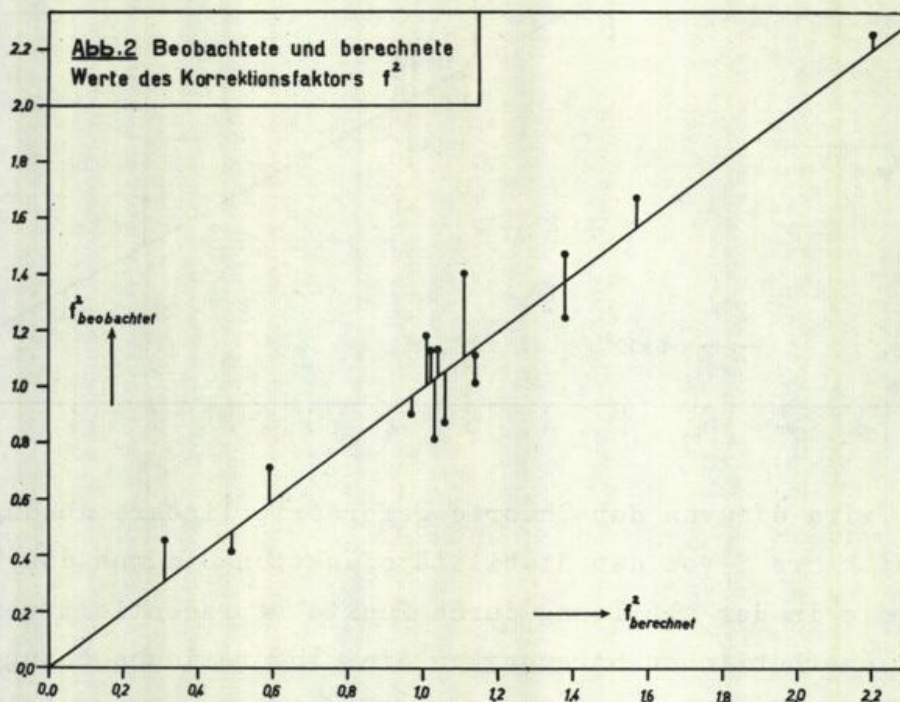
hervorgeht, wird die von der Theorie geforderte lineare Abhängigkeit des Korrekturfaktors  $f$  von der Stabilitätsfunktion  $S$  durch die Einzelbeobachtungen, die in der Abbildung durch Punkte repräsentiert werden, trotz ihrer nicht unerheblichen Streuung um die theoretische Bezugsgerade  $f = 1 - 3.67 \cdot S$  weitgehend bestätigt. Da die Darstellung keinerlei Anhalt für die Existenz einer nicht-linearen Abhängigkeit zwischen den betrachteten Größen ( $f, S$ ) bietet, bildet dieser Befund eine eindrucksvolle Bestätigung dafür, daß durch die Theorie die wesentlichen Parameter zur Beschreibung des Verdunstungsvorgangs in der funktionell richtigen Form

erfaßt werden.

Nach der empirischen Festlegung der Konstanten  $\beta$  läßt sich die theoretische Verdunstungsformel (1) zur Berechnung der Verdunstung heranziehen. Zu diesem Zwecke wird zunächst der Korrektionsfaktor  $f^2$  nach seiner Definitionsgleichung

$$f_{\text{berechn.}}^2 = (1 - \beta \cdot S)^2 = (1 - 3.67 S)^2 \quad (9)$$

für die vorliegenden Werte der Stabilitätsfunktion  $S$  berechnet. Die aus Gl.(9) resultierenden Werte von  $f_{\text{berechn.}}^2$  sind zusammen mit den beobachteten Werten dieses Faktors (siehe Tab.3) in der Tab. 4 aufgeführt. Wie aus der Abb.2 ersichtlich ist, schließen sich die beobachteten Werte von  $f_{\text{beob.}}^2$  mit guter Näherung an die theoretisch zu fordernden Werte, die durch die Beziehungsgerade repräsentiert werden, an. In Anbetracht der Unsicherheiten, die den Angaben der beobachteten Verdunstung anhaften, kann die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung als eine ziem-



lich befriedigende bezeichnet werden. Aus der großen Schwankung des Korrektionsfaktors  $f^2$ , der schon in den hier bearbeiteten wenigen Fällen entsprechend den herrschenden Stabilitätsverhältnissen zwischen weiten Grenzen variiert, läßt sich der beachtliche Einfluß der Temperaturschichtung auf die Größe der wahren Verdunstung erkennen. Im Vergleich

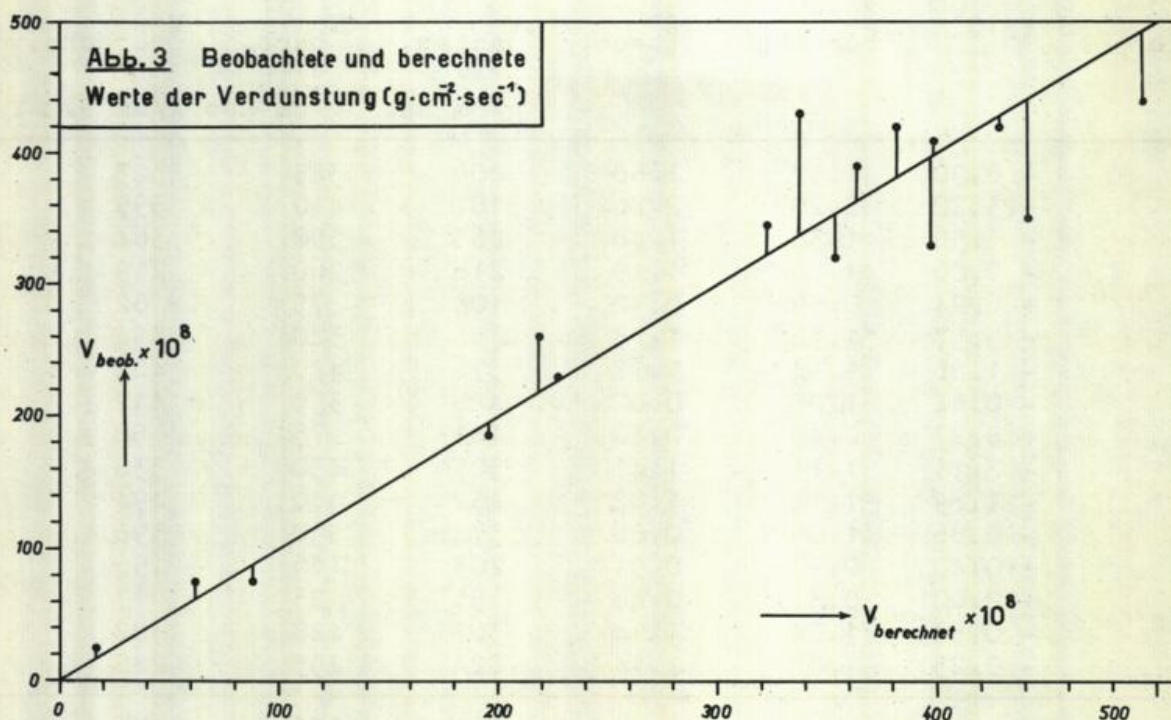
Beob.- serie	$S \cdot 10^2$	$f^2_{\text{berechn.}}$	$f^2_{\text{beob.}}$	$V_{\text{adiab.}}$ $\times 10^8$ g/cm <sup>2</sup> sec	$V_{\text{beob.}}$ $\times 10^8$ g/cm <sup>2</sup> sec	$V_{\text{berechn.}}$ $\times 10^8$ g/cm <sup>2</sup> sec
15	- 6.90	1.57	1.68	206	345	323
16	-13.20	2.20	2.26	181	410	399
17	- 5.56	1.38	1.48	263	390	364
18	- 0.06	1.01	1.19	218	260	219
19	+ 6.24	0.59	0.72	104	75	62
20	- 5.57	1.38	1.25	255	320	354
21	- 1.86	1.14	1.12	376	420	429
22	- 0.44	1.03	0.82	428	350	442
23	+ 8.27	0.49	0.42	181	75	88
24	- 2.11	1.11	1.41	305	430	338
25	- 1.89	1.14	1.02	432	440	494
26	- 0.86	1.06	0.88	374	330	398
27	+ 0.40	0.97	0.91	203	185	196
28	+12.00	0.31	0.46	55	25	17
29	- 0.54	1.04	1.14	367	420	382
30	- 0.25	1.02	1.14	224	255	228
Mittelwerte:				261	296	296

Tab.4 Zusammenstellung der Werte des Korrektionsfaktors  $f^2$  und der Verdunstung ( $\times 10^8$  g/cm<sup>2</sup>sec) nach Beobachtungen und Berechnungen (nach Daten von F. PASQUILL(1)).

zu den wahren Werten der Verdunstung sind deshalb Abweichungen von weit über 100% gegenüber den nach der adiabatischen Formel (2) berechneten Verdunstungswerten durch Schichtungseinflüsse durchaus möglich.

Nach der Ableitung des Korrektionsfaktors  $f^2_{\text{berechn.}}$  lassen sich die theoretischen Werte der Verdunstung aus der Gl.(1) ableiten. Die Ergebnisse der Berechnung sind ebenfalls in Tab. 4 aufgenommen und zur Erleichterung eines Vergleichs mit den Werten der beobachteten und der nach der adiabatischen Formel berechneten Verdunstung nebeneinander aufgeführt. In der Abb. 3 sind die beobachteten und berechneten Werte der Verdunstung zueinander in Beziehung gesetzt, wobei die Größe der Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werten der Verdunstung durch den Abstand der einzelnen Punkte von der Geraden gegeben ist.

Aus der Tab.4 ist ersichtlich, daß die nach der neuen Verdunstungsgleichung berechneten Verdunstungswerte sich den beobachteten Werten weit besser anpassen als diejenigen, welche auf Grund der von THORNTHWAITE-HOLZMAN(3) abgeleiteten, für adiabatische Verhältnisse geltenden



Formel (2) berechnet worden sind. In fast allen Fällen liefert die neu abgeleitete Gleichung Verdunstungswerte, die mit den Beobachtungen wesentlich besser übereinstimmen. Als Gesamtmittel der Verdunstung für alle 16 Beobachtungsserien ergibt sich sowohl auf Grund der Evaporimetermessungen als auch nach der neuen Verdunstungsformel ein Wert in Höhe von  $296 \cdot 10^{-8} \text{ g/cm}^2 \text{ sec}$ , während die adiabatische Verdunstungsformel(2) nur einen mittleren Verdunstungswert von  $261 \cdot 10^{-8} \text{ g/cm}^2 \text{ sec}$  liefert. Theorie und Beobachtung ergeben also im Gesamtmittel der vorliegenden Beobachtungsreihen völlig identische Werte, während die adiabatische Formel (2) einen Defizitbetrag von etwa 12% gegenüber der wahren mittleren Verdunstungsmenge aufweist.

Trotz der guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung in den Gesamtmittelwerten und trotz der Verbesserungen durch die neue Formel läßt insbesondere die Abb. 3 erkennen, daß bei den Einzelbeobachtungen noch verhältnismäßig große Abweichungen auftreten, die durch die Theorie nicht erklärt werden. Wenn man zunächst einmal annimmt, daß die Evaporimetermessungen im wesentlichen fehlerfrei sind und die wahre Bodenverdunstung mit sehr großer Genauigkeit widerspiegeln, so liegt es

nahe, nach einem Zusammenhang der verbleibenden Abweichungen mit der Stabilitätsfunktion S oder der RICHARDSONschen Zahl  $R_i$ , deren Werte von F. PASQUILL(1) für die Bezugshöhe von 75 cm gegeben sind, zu suchen. Ein entsprechender Versuch des Verfassers zeigte, daß nicht einmal andeutungsweise das Bestehen eines solchen Zusammenhanges in den Beobachtungen zu erkennen ist. Ordnet man jedoch die (auf die berechneten Verdunstungswerte bezogenen) prozentualen Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Verdunstungswerten in der Reihenfolge der Beobachtungen an und vermerkt die von F. PASQUILL(1) angegebenen Termine, an denen ein Wechsel der Bodenprobe in den Evaporimetergefäßen vorgenommen worden ist, so kommt man zu einer Erklärung für die verbleibenden Abweichungen, die dem Bearbeiter befriedigend erscheint. Wie man aus der Tab.5 entnehmen kann, sind die Vorzeichen der prozentualen Abweichungen  $\Delta V$  (%) zwischen

Beob.- serie	Bodenproben- Bezeichnung (nach PASQUILL)	prozentuale Abw. zw. beob. und be- rechneter Verdun- stung $\Delta V$ (%)	Bemerkungen über $\Delta V$ -Werte
15	C	- 6.8	nur negative Werte
16	C	- 4.8	
17	C	- 7.1	
18	C	-18.7	
19	C	-21.0	
Bodenprobenwechsel in den Evaporimetergefäßen			
20	C'	+ 9.6	nur positive Werte
21	C'	+ 2.1	
22	C'	+20.8	
23	C'	+14.8	
Bodenprobenwechsel in den Evaporimetergefäßen			
24	D	-27.2	wechselnde, meist positive Werte
25	D	+10.9	
26	D	+17.1	
27	D	+ 5.6	
28	D	-47.0	
Bodenprobenwechsel in den Evaporimetergefäßen			
29	D'	- 9.9	nur negative Werte
30	D'	-11.8	
<p><u>Tab.5</u> Angaben über Bodenprobenwechsel in den Evaporimetergefäßen für die bearbeiteten Beobachtungsserien 15 - 30 und prozentuale Abweichungen <math>\Delta V</math> (%) der beobachteten Verdunstung von den berechneten Wertén.</p>			

den beobachteten und berechneten Verdunstungsmengen innerhalb der Beobachtungsserien, die mit derselben Bodenprobe in den Evaporimetergefäßen ausgeführt sind, im wesentlichen einheitlich positiv oder negativ. Lediglich die Beobachtungsserien 24-28, welche die Beobachtungen mit der als D bezeichneten Bodenprobe umfassen, weisen Unregelmäßigkeiten in bezug auf das Vorzeichen auf. Besonders auffällig ist ferner, daß mit dem Bodenprobenwechsel in den Evaporimetergefäßen auch ein Vorzeichenwechsel der prozentualen Abweichungen verbunden oder (wie bei der Beobachtungsgruppe D (Nr.24-28)) doch zumindest angedeutet ist. Dieser Befund macht es sehr wahrscheinlich, daß die hier festgestellten, verbleibenden Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werten der Verdunstung weniger auf Unzulänglichkeiten der theoretischen Formel, als vielmehr auf Mängel der benutzten Evaporimetermethode zurückzuführen sind. Unser Untersuchungsbefund deutet darauf hin, daß die von F.PASQUILL(1) ausgeführten Evaporimetermessungen nur als eine mehr oder weniger grobe Approximation der wahren Bodenverdunstung betrachtet werden können, die jedoch noch die wesentlichen Züge des natürlichen Verdunstungsvorgangs erfaßt. Da Zufallseinflüsse der Bodenproben einen merkbaren Einfluß auf die Meßwerte der Evaporimeter auszuüben scheinen, besteht durchaus die Möglichkeit, daß die hier dargelegte theoretische Methode, die sich auf Profilmessungen in der bodennahen Luftschicht stützt, derjenigen des Evaporimeterverfahrens überlegen ist.

Anknüpfend an die letzten Bemerkungen greifen wir jetzt wieder die bisher zurückgestellte Frage nach der Größe der universellen Konstanten  $\beta$  auf, für die wir auf Grund der Beobachtungen von F. PASQUILL(1) den Wert von 3.67 gefunden haben. Im Gegensatz hierzu haben russische Forscher ihre Größe aus Windprofilmessungen zu rund 0.6 bestimmt. Eine abschließende Beantwortung der hier aufgeworfenen Frage im Rahmen der vorliegenden Untersuchung verbietet sich bei dem geringen Umfang des hier bearbeiteten Beobachtungsmaterials von selbst. Es soll aber in diesem Zusammenhang auf einige Punkte hingewiesen werden, die eine mögliche Erklärung für die so stark voneinander abweichenden Ergebnisse bei der Bestimmung der Größe  $\beta$  bieten können.

Zunächst kann man nach den vorhergehenden Ausführungen die Möglichkeit nicht ausschließen, daß die Evaporimeterangaben neben den bespro-

chenen, mehr zufälligen Fehlern auch noch unbekannte systematische Fehleranteile enthalten. Obwohl dem Verfasser eine eingehendere Diskussion dieser Frage nicht möglich ist, da ihm die näheren Einzelheiten der Durchführung der Verdunstungsmessungen unzugänglich sind, spricht die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den theoretischen Verdunstungswerten im Fall adiabatischer Schichtung gegen einen solchen systematischen Fehlereinfluß. Denn wie man aus der Abb.2 ersehen kann, stimmt der Korrektionsfaktor  $f^2$  im Fall indifferenten Schichtung auch nach den Beobachtungen gut mit seinem theoretischen Wert von  $f^2 = 1$  überein. Im Fall adiabatischer Schichtung hat aber die Verdunstungsformel (2), wie zahlreiche Untersuchungen gezeigt haben, durchaus ihre Zuverlässigkeit und Brauchbarkeit bewiesen. Da die Evaporimeter bei indifferenten Schichtung keine wesentlichen Fehlanzeigen geliefert haben, liegt kein Grund vor, solche bei instabiler oder stabiler Schichtung zu vermuten. Es dürfte deshalb wenig wahrscheinlich sein, daß Auswirkungen systematischer Fehler der benutzten Evaporimeter zu so starken Unterschieden in den Werten der Größe  $\beta$  geführt haben.

Als weitere Fehlerquelle, die auf unser Berechnungsergebnis der Konstanten  $\beta$  einen Einfluß ausüben kann, kommt fernerhin die Verwendung von einstündigen Mittelwerten bei den Ergebnissen der Profilmessungen in Betracht. Wegen des unterschiedlichen täglichen Ganges der verschiedenen meteorologischen Elemente in den verschiedenen Höhen ist diese Fehlerquelle nicht von vornherein von der Hand zu weisen. So machen N.E.RIDER und G.D.ROBINSON(2) in einer ähnlichen Austauschuntersuchung ausdrücklich darauf aufmerksam, daß zur Vermeidung fehlerhafter Auswirkungen des täglichen Ganges wahrscheinlich ein Beobachtungsintervall von 30 Minuten als die höchste zulässige Dauer ("maximum time allowable") für die Ableitung zeitlich gemittelter Meßwerte betrachtet werden muß. Welchen Einfluß diese Fehlerquelle auf unsere Bestimmung von  $\beta$  ausgeübt haben kann, läßt sich nicht ohne ergänzende Untersuchungen beurteilen.

Als dritte Erklärungsmöglichkeit für die gefundenen unterschiedlichen Werte in der Konstanten  $\beta$  kommt schließlich noch in Betracht, daß die Austauschkoefizienten für den Impuls-, Wasserdampf- und Wärmestrom - entgegen den Annahmen der Theorie - keine einheitlichen Werte aufweisen. Eine endgültige experimentelle Klärung steht bis heute noch aus.

Man kann auf Grund der im Hauptteil dargelegten Theorie leicht zeigen, daß im Fall der Ungleichheit der Austauschkoeffizienten für den vertikalen Impuls- und Wärmestrom die Größe von  $\beta$  in Gl. (3) um einen Faktor vergrößert erscheint, der dem Verhältnis der Austauschkoeffizienten für den Wärme- und Impulsstrom gleich ist. Da dieser Faktor zur Erklärung der hier aufgefundenen Diskrepanz einen Wert von rund 6 besitzen müßte, - das ist ein Wert, der alle bisherigen Schätzungen weit übersteigt, - so kann dieser Effekt der Verschiedenheit der Austauschkoeffizienten mit ziemlicher Sicherheit nur zum Teil zur Erklärung der gefundenen Größenunterschiede in den Bestimmungen von  $\beta$  herangezogen werden.

#### IV. S c h l u ß

In der vorliegenden Untersuchung hat der Verfasser den Versuch unternommen, die im Hauptteil der Veröffentlichung abgeleiteten Verdunstungsformeln auf ihre praktische Verwendbarkeit zu überprüfen. Der Nachweis, daß diese Formeln die wesentlichen Parameter für die quantitative Erfassung der verwickelten Verdunstungsvorgänge enthalten, kann mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit als erbracht angesehen werden. Für die Größe der universellen Konstanten  $\beta$  ergab sich das überraschende Resultat, daß sie den aus Windprofilmessungen abgeleiteten Wert um das etwa 6-fache übertrifft. Jedoch möchte der Verfasser dieses Ergebnis noch keineswegs als endgültig gesichert betrachten. Zur Klärung dieser Frage bietet sich der experimentellen Meteorologie noch ein weites Betätigungsfeld, um die Fehlergrenzen in den verschiedenen Bestimmungen weiter einzuengen und somit zur Erweiterung und Verfeinerung unserer Kenntnisse auf diesem geophysikalisch so wichtigen Gebiet beizutragen.

#### Literaturnachweis

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| (1) F. PASQUILL                       | Eddy diffusion of water vapour and heat near the ground.<br>Proc.Roy.Soc.,A,Vol.198 (1949), 116 f.                         |
| (2) N.E.RIDER and G.D.<br>ROBINSON    | A study of the transfer of heat and water vapour above a surface of short grass.<br>Q.J.Roy.Met.Soc., Vo.77 (1951), 375 f. |
| (3) C.W.THORNTHWAITE<br>and B.HOLZMAN | The determination of evaporation from land and water surfaces.<br>US Monthl.Weath.Rev.,Vol.67 (1939),S.4 f.                |

