NUMERUS STUDIOSORUM

IN ACADEMIA GRONINGANA,

DIE 31 M. DECEMBRIS 1850.

In Facultate Medica	. . . .	44.
〃 〃	Disc. Math. et Phys.	3.
〃 〃	Theologica	64.
〃 〃	Phil. Theor. et L. L. H. H. . .	7.
〃 〃	Juridica	110.
		228.

DOCTORES CREATI

IN ACADEMIA GRONINGANA,

INDE A D. 10 OCTOBRIS 1850 AD 9 OCTOBRIS 1851.

IN FACULTATE MEDICA.

1850.

d. 26 Oct. Jacobus Fredericus Cohen, Groninganus, M. et A. O. D., priv. def. Thes. Chir., Ch. D.

d. 9 Nov. Fredericus Constantinus van den Ham, Barnevelda-Gelrus, M. D., priv. def. Thes. Obst., A. O. D. *magna cum laude.*

d. 7 Dec. Janus Bosman Tresling, Groninganus, M. et A. O. D., priv. def. Thes. Chir., Ch. D. *cum laude.*

d. 18 Dec. Petrus Antonius van der Ketten, Zwollanus, priv. def. Diss. *de morbis simulatis, qui pertinent ad organa sensuum*, M. D. *cum laude.*

d. 20 Dec. Jacobus van der Scheer, A. f., M. D., priv. def. Thes. Obst., A. O. D. *cum laude.*

d. 21 Dec. Gerardus Posthumus, Zuidhorna-Groninganus, M. D., priv. def. Thes. Obst., A. O. D. *magna cum laude.*

1851.

d. 30 Jan. Arnoldus Nicolaus Fabius, Stenovicensis, M. D., priv. def. Thes. Obst., A. O. D. *cum laude.*

d. 31 Mart. Anastatius Antonius Jorritsma, Snecanus, M. D., priv. def. Quaest. Obst., A. O. D. *cum laude.*

d. 10 April. Mauritius Salomonson, Almeloënsis, priv. def. Spec. *de haemorrhagia, quae vocatur Apoplexia pulmonalis*, M. D. *cum laude.*

d. 12 April. Arendus Antonius Hyner, Enschedea-Transiselanus, priv. def. Spec. exhib. *nonnulla de Hyperaemia cerebri*, M. D. *cum laude.*

d. 7 Maji. Petrus Cornelis Lindeboom, Heilo-Transiselanus, priv. def. Diss. *de Diphtheritide*, M. D. *cum laude.*

d. 8 Maji. Hajo Dierhuis, Groninganus, priv. def. Diss. *de Neurosi cordis*, M. D. *cum laude.*

DESCRIPTIO ET EXAMEN SCALAE
PRO REDVCENDIS AD HORIZONTEM ANGVLIS INCLINATIS
A *TOB. MAYERO*
CONCINNATAE.

ALB. LVD. FRID. MEISTER.

RECITATA

D. XVIII. JVNII. MDCCLXXXVI.

1786

Incidit in manus meas, cum beatus MAYERUS adhuc inter nos verſaretur, delineatio ſcalae, cuius ipſe auctor praedicabatur, quaeque angulis in plano obliquo menſuratis, ad planum horizontale reducendis inſeruire dicebatur. Forte aliis tum rebus occupatus, obiter inſpectam in melius otium ſepoſueram, et incurioſius inſerueram ceteris chartarum mearum voluminibus. Ita factum eſt, inter bellicas turbas illius temporis, quod indies noua ſpectacula afferebat, noua ſtudia, nouas formidines animo obiiciebat, vt ſcalae Mayerianae memoria tandem penitus apud me interiret. Ex tanto temporis interuallo iterum obtulit ſe illa mihi, nuper admodum, aliud quaerenti. Quae cum tanti viri nomen prae ſe ferret, ſuo quaſi iure a me poſtulare videbatur, vt diuturnum ſui neglectum, quouis ſtudio compenſarem.

Ac primum quidem ſtudium in eo collocabam, vt de auctoris titulo cognoſcerem. Hunc ſtabilire videbantur ſequentia documenta, Primo acceperam ſcalam, vt Mayeri opus et inuentum, ab aliquo ipſius diſcipulo, cuius vero nec nomen nec poſſidendi ius amplius memini. In ſcalae inſcriptione, quae vſum illius, per exempla ad omnes caſus comparata, concinne admodum et appoſite docet, Mayeri manus haud dubie agnoſcebatur. Recordabar, Mayerum tum temporis nouam methodum perficiendi inſtrumenta geometrica propoſuiſſe, et nouum inſtrumentum goniometricum, recipiangulum ab auctore dictum, concinnaſſe *), perfectiorem etiam aſtrolabio formam dediſſe **). Quorum inſtrumentorum vſus, ſi promiſcuum eſſe volebat, exigere videbatur faciliorem aliquam et expeditiorem angulorum reductionem, quam quae obtinetur per conſuetas formulas trigonometricas. Etenim vtrumque inſtrumentum, loco pinnularum, inſtruxerat tubo aſtronomico, qui quidem declinari ab inſtrumenti plano, et ita inſeruire mechanicae angulorum proiectioni, non poterat. Igitur, vt tubi axis in obiecta conuerti poſſet, ipſum inſtrumentum collocari debebat in planum anguli menſurandi. Quod cum in plurimis caſibus ab horizonte plus minus declinet; calculus trigonometricus tantum non pro ſingulis angulis menſuratis Geodaetae fuiſſet inſtituendus. Accedebat, quod Mayerus ad multa alia ſcalarum vſum comprobaret, et quod ipſum ſuorum inſtrumentorum alterum, neſcio quam bene, a chordarum ſcala pendere voluerit. Inde colligebam, fieri fere non potuiſſe, vt non vtriusque inſtrumenti ſui vſui, cetera quoque ſatis impedito, ſuccurrerit ope alicuius ſcalae, reductioni angulorum inſeruientis.

Supererat, vt cognoſcerem, vtrum ſcala, quae in manibus meis erat, ita eſſet comparata, vt a viro illo ingenioſiſſimo profecta

*) Commentarii Soc. Reg. ſcient. Gottingenſis Tom. I. ad annum 1753.

**) Commentat. Mayeri de perficiendo aſtrolabio (*Göttingiſche Anzeigen von gelehrten Sachen 1759, S. 993.*)

fecta esse potuerit. Et ex hac quidem parte abunde mihi, et supra omnem expectationem meam, instrumentum satisfecit. Vsus illius est admodum expeditus: cum in duabus mensuris circino captis, et in duabus vel tribus additionibus numerorum, consistat. Acribia autem tanta, vt vel mediocriter diligentem vix tota minutia prima fallere possit. Nam insigni artificio cautum est, vt, quamquam tota scala vix occupet dimidium plagulae, eae tamen partes, quae minutis primis inuestigandis respondent, fere decimam cum dimidia pollicis partem aequent. Etenim, non ipsi anguli reducti in scala quaeruntur, vt in consuetis formulis trigonometricis; sed tantum differentiae inter angulos inclinatos eorumque proiectiones. Quae differentiae, cum, in modica inclinatione, qualem geodaetica aut geographica problemata supponunt, satis paruae sint; eo maior fieri poterat modulus scalae illas exhibentis. Nam ad Astronomiae, aut Geometriae subterraneae, vsum respexisse scalae inuentorem non arbitror: cum vltra quintum eleuationis gradum eandem non extenderit, et in hoc vtique subsistendum fuerit, vt distincte satis et accurate reductionis labor procederet.

Antequam mihi de constructionis instrumenti theoria constaret, experimentum capiebam, assumtis aliquot angulis, et crurum inclinationibus, quos tum scalae ope, tum per formulas trigonometricas, in basin proiiciebam. Vtrasque proiectiones non vltra paucas minutias secundas inter se discrepare, non sine admiratione deprehendebam. Sed poterat casu accidisse, vt vel anguli electi instrumento fauerent, vel error errorem tolleret. Ergo inquirendum erat in theoriam ipsam. Id quod difficultate non carebat, in instrumento, cui, praeter pauca verba quae vsum illius docebant, nihil adscriptum erat, ex quo indicium peti de construendi modo, ne dicam de probandi ratione, poſſet. Suſpicabar, inuentorem id egiſſe, vt in formula aliqua trigonometrica omitteret eas partes, quae ob paruitatem rationis, quam ad ceteras haberent, negligi poſſe viderentur: ceteras in ſimpliciorem formulam collegiſſe, quae conſtructionem planam, et ex meris lineis rectis conſtantem, admitteret. Sed parum mihi ſucceſſit labor, ſolennem reductionis formulam ad ſcalam accommodandi. Exſtat autem, in manuſcriptis Mayeri, formula verae propinqua, quam ipſe ad angulos reducendos vſurpauerat, quamque inde depromtam nobis ſeruauit et demonſtrauit illuſtris KAESTNERUS *). Haec quidem ad vnguem reſpondet ſcalae, et extra omnem dubitationem ponit, illam etiam Mayero deberi. Interim ſcalae ipſius conſtructionem, tanquam problema aliquod ſoluendum mihi propoſueram, et poſt aliquot tentamina fruſtra ſuſcepta, quae non eſt vt commemorem, poſtremo in talem incidi, quae a Mayeriana vix differre videbatur. Et haec quidem me docuit, non caſu accidiſſe, ſed ex rei ipſius natura, vt anguli per calculum a me reducti, ab iis quos ſcala indicabat, tam parum abluderent: differentias inter vtrosque, perinde ac differentiam vtrorumque ab exacta veritate, fieri quidem maiores, quo maior fiat crurum inclinatio; ſed nunquam tantas, quae non negligi poſſint in planorum inclinationibus, quales geodaetae vel geographo occurrere ſoleant, vel quales non ob alias rationes euitare debeat et poſſit. In hanc quoque theoriae partem ſubtilius inquiſiui: quousque nimirum extendi ſcala caute poſſit, hoc eſt, ad quot inclinationis in cruribus gradus aſcendere vel deſcendere debeat, pro modulo erroris, quem nobis in reducendis angulis permiſſum eſſe ſtatuerimus. Inde nata eſt haec commentatio. Quae, quod rem tractat, tum in ſe vtilem et ſcitu dignam, tum ad Mayeri noſtri haereditatem pertinentem, aut

*) *Aſtronomiſche Abhandlungen. Erſte Sammlung. p. 42.*

aut ſi in hoc ipſo falleremur, certe ab homine valde ingenioſo profectam *), nec, quod ipſe ſciam aut amici quos conſului recordentur, ante hac deſcriptam: non ingrata, ſpero, erit aut Vobis honoratiſſimi Sodales, aut Commentarios noſtros lecturis.

§. I.

Problema.

Ope ſcalae, Tab. II. exhibitae, angulum in plano inclinato exiſtentem, ad planum horizontale reducere. Hoc eſt, data anguli magnitudine, et crurum ad planum aliquod aſſumtum obliquitate: reperire anguli in hoc planum proiecti menſuram.

Solutio.

Caſus I. Crure vtroque vel eleuato ſupra horizontem, vel infra illum declinato: generatim, crure vtroque ex iisdem partibus plani aſſumti protenſo.

1) Fiat *aggregatum* vtriusque inclinationis, et quaeratur, in margine ſcalae verticali aut horizontali, numerus graduum et minutorum huic aggregato aequalis: noteturque recta, quae a communi centro A, in hunc locum proficiſcitur.

2) Quaeratur, in baſi inſtrumenti obliqua, inter numeros graduum et minutorum, a puncto inde A, increſcentes, numerus dato angulo aequalis.

3) Capiatur menſura rectae perpendicularis, ab hoc puncto ſurgentis, vsque ad rectam nro. 1) notatam. Haec menſura, ſcalae minuto-

*) Antequam haec typographo traderentur, omnis dubitatio ſublata fuit amici humanitate: qui, cum auditor et familiaris Mayeri ad ſuprema vsque illius tempora fuiſſet, ab ipſo acceptam ſcalae delineationem, meae quidem ita ſimilem, vt ex eodem typo expreſſas diceres, mecum beneuole communicauit.

minutorum ad calcem paginae adiectae applicata, indicabit certum aliquem minutorum primorum et secundorum numerum.

4) Hic numerus addatur ad angulum datum, et notetur summa.

Similiter a) fiat *differentia* vtriusque inclinationis, et quaeratur, in margine instrumenti verticali aut horizontali, numerus graduum et minutorum, qui huic differentiae aequalis sit: noteturque recta, quae a communi centro A, in hunc locum proficiscitur.

b) Quaeratur, in margine instrumenti obliquo, inter numeros graduum et minutorum, a puncto A, inde decrescentes, numerus dato angulo aequalis.

c) Capiatur mensura rectae perpendicularis, ab hoc puncto surgentis, vsque ad rectam sub litt. a) notatam. Haec mensura, scalae ad paginae calcem adiectae applicata, indicabit certum aliquem minutorum primorum et secundorum numerum.

d) Hic numerus subtrahatur a summa nro. 4) collecta. Residuum erit angulus quaesitus, hoc est, in horizontem, seu planum assumtum, redactus.

Casus II. Crure altero eleuato, altero declinato: generatim, cruribus anguli in diuersas plani assumti partes porrectis.

1) Capiatur *differentia* vtriusque inclinationis, et quaeratur is numerus in margine instrumenti perpendiculari aut horizontali: noteturque recta, a puncto A illuc proficiscens.

2) Quaeratur, in basi obliqua, inter numeros a puncto inde A crescentes, is, qui dato angulo aequalis est.

3) Capiatur mensura rectae, ab hoc puncto vsque ad rectam nro. 1) notatam surgentis; applicetur scalae ad calcem adiectae, et obseruetur numerus minutorum respondens.

4)

4) Is numerus addatur ad angulum inclinatum qui proponitur.

Similiter a) fiat *aggregatum* vtriusque inclinationis, et quaeratur, in margine verticali aut horizontali, graduum numerus aequalis huic ſummae, et obſeruetur recta, ab hoc inde puncto ad centrum A procedens

b) Quaeratur in margine obliquo, inter numeros graduum a puncto A decreſcentes, is, qui respondet angulo dato.

c) Menſura rectae, ab hoc loco vsque ad rectam ſub litt. a) obſervatam ſurgentis, applicetur ſcalae minutorum.

d) Numerus, in ſcala minutorum reſpondens, ſubtrahatur a ſumma nro. 4) collecta. Reſiduum, erit angulus quaeſitus.

§. 2.

Scholium.

Inſtrumenti, quod exhibeo, modulus non permiſit, vt rectas omnes, ſiue perpendiculares ſeu a puncto A diuergentes, pro ſingulis gradibus, ne dum pro ſingulis minutis deſcriptas exhiberem: ne viſum turbaret nimia linearum multitudo et proximitas. Intermediarum ſitus et interſectio, commodius et tutius, ex ſolo oculi iudicio aſſignabitur.

§. 3.

Exempla.

Caſus primus.

Sit angulus oblique ſitus	$= 57^\circ, 24', 40''$
Eleuatio vnius cruris	$= 4^\circ, 58'$
Eleuatio alterius cruris	$= 2^\circ, 25'$
1) Eleuationum ſumma	$= 7^\circ, 23'$

2) 3) Huic reſpondent in ſcala minutorum	7′, 55″
4) Quae addita angulo dato	= 57°, 24′, 40″
Efficiunt ſummam	= 57°, 32′, 35″
a) Porro differentia eleuationum eſt	= 2°, 33′,
b) c) huic reſpondent in minutorum ſcala	3′, 10″
d) quae ſubtracta a ſumma nro. 4) reperta	= 57°, 32′, 35″
Dabunt angulum quaeſitum	= 57°, 29′, 25″

Caſus ſecundus.

Sit angulus oblique poſitus	= 73°, 25′, 0″
Eleuatio vnius cruris	= 3°, 10′
Depreſſio alterius	= 1°, 20′
1) Inclinationum differentia	= 1°, 50′
2) 3) Huic reſpondent in ſcala minutorum	0′, 40″
4) Quae addita angulo dato	= 73°, 25′, 0″
efficiunt ſummam	= 73°, 25′, 40″
a) Porro ſumma inclinationum eſt	= 4°, 30′, 0″
b) c) Huic reſpondent in minutor. ſcala	7′, 5″
d) Quae ſubtracta a ſumma nro. 4) reperta	= 73°, 25′, 40″
dabunt angulum quaeſitum	= 73°, 18′, 35″

§. 4.

Scholium.

Comparationis inſtituendae cauſſa, eorundem angulorum inclinatorum reductionem quaeſiui per notam formulam trigonometricam, qua, datis tribus lateribus trianguli ſphaerici, reperitur angulus.

$$(\text{ſin } \tfrac{1}{2} h)^2 = \frac{(\text{ſin } \tfrac{1}{2}(g \mp p \mp q).\ \text{ſin } \tfrac{1}{2}(g - (p \mp q)).\ r^2}{\text{coſ } p.\ \text{coſ } q}.$$

Deno-

Denotant p, q, complementa duorum laterum, hoc eſt, inclinationes crurum, (ita vt ante litteram q ſignum — vſurpetur in Caſu I, ſignum + in Caſu II.) g autem angulum inclinatum, ceu tertium latus, cui opponitur angulus h, quaeſitus, angulum reductum exhibens.

Prodit autem angulus primi caſus = 57°, 29′, 28″, tribus tantum minutiis ſecundis maior angulo, quem ſcala dederat.

Angulus ſecundi caſus = 73°, 18′, 32″, tribus tantum minutiis ſecundis deficit a valore, per ſcalam reperto.

§. 5.

Scholium.

Cum ab his exemplis ſatis ſuperque ſe probaret vſus inſtrumenti; progreſſus ſum ad detegendam illius conſtructionem. Viam, quam tenui, hic quoque reſumam, tametſi facilior aut breuior circumſpici poterat, poſtquam illam emenſus ſum; omnium vero breuiſſimam formula ipſa Mayeri ſuppeditat. A ſimplicioribus problematis conditionibus incipiendum mihi eſſe ratus; dedi primo anguli cruribus eandem inclinationem; deinde alteri eorum nullam; porro inaequalem eleuationem; poſtremo alteri eleuationem, alteri depreſſionem, tum aequales tum inaequales. Inde nati ſunt caſus quatuor: qui, examine finito, facile redigebantur ad duos.

§. 6.

Problematis analyſis, ad ſcalae ideam ducens.

Caſus I.

Vbi vtriusque cruris, anguli dati, eadem eſt inclinatio.

1) Eſto Fig. 1. orthographica ſphaerae dimidiatae; a b (= c d = $\alpha\beta$) arcus anguli inclinati a m b, cuius menſura datur; a f (= h i) *Fig. 1.*

eleuatio

eleuatio crurum. Erit fg ($= k\delta$) arcus anguli ad horizontem reducti, hoc eſt, quaeſiti; ergo ck ($= d\delta$) arcus, qui vtrinque in complementum addi debet arcui cd menſurato, vt fiat menſura anguli quaeſiti.

2) Pone, datum fuiſſe eundem angulum, ſeu arcum ln ($= ab = cd$), cuius vero crura ml, mn, maiorem eleuationem habeant, aequalem ſcilicet arcui lp ($= nq = oi$); erit ſimiliter pq arcus reducto angulo reſpondens; et addendi erunt arcus $p\alpha$, βq ($= \epsilon c = d\theta$) arcui cd menſurato, vt anguli quaeſiti arcus compleatur.

Facile perſpicitur, rectas is, ir, im, eſſe inter ſe in ratione rectarum pu, $p\alpha$, pm; hoc enim patet ex natura ellipſis, et circuli, quorum abſciſſae ſunt iſtae rectae, ad easdem ſemiordinatas pertinentes.

3) Quod ſi ergo diuideretur arcus io, in ſuos gradus, et a ſingulis gradibus demitterentur ſemiordinatae; earum abſciſſae is... ir, hoc eſt, ſinus verſi arcuum a puncto i, incipientium, daturae eſſent rationem rectarum (diametro iw, parallelarum) pu ... $p\alpha$, reſpondentium arcubus $\epsilon k \ldots \epsilon c$, addendis in ſupplementum arcui cd dato, vt menſuram anguli reducti, pro qualibet propoſita crurum eleuatione $=$ ih ... io etc efficeret.

Fig. 2. 4) Rectae iſtae, ad ſupplementa duorum arcuum ſeu angulorum inaequalium ln, xy, pertinentes, eandem inter ſe rationem habent, dummodo crurum inclinatio, in vtroque angulo, fuerit eadem $=$ oi. Patet enim, ex indole ellipſium ep, $e\gamma$, ad aequales ſemiordinatas xz, $l\alpha$, fore $\gamma z : \gamma m = p\alpha : pm$.

In modica crurum inclinatione, quae, verbi cauſſa, decem gradus non excedat, ſumi interim poterit, iſtas rectas γz, $p\alpha$ etc.

fere

fere eſſe in ratione arcuum quibus reſpondent: iſta autem ratio $\gamma m : p m$, cognoſcitur ex aequali ratione ſinuum $z m : \alpha m$, ad arcus $l\delta$ ($= ce$), $x\varepsilon$ ($= \zeta e$), pertinentium.

5) Quod ſi itaque iſta ſupplementa, pro vnico aliquo arcu ſeu angulo reducendo, cuiuscunque demum ſit magnitudinis, reperta fuerint pro ſingulis crurum eleuationibus, gradatim ſurgentibus; poterunt reperiri pro quolibet alio arcu ſeu angulo reducendo, ope facillimae conſtructionis geometricae.

Sit enim BC longitudo arcus, qui vtrinque ſupplementi nomine addendus eſt arcui reducendo nonaginta graduum, in eleuatione crurum vnius gradus: BD ſupplementum in eleuatione duorum graduum: BE in eleuatione trium, et ita porro: et quaerantur ſupplementa pro angulo 45 graduum reducendo. Facile patet, ſi fiat baſis AG ea longitudine, quae conuenit quadraginta quinque gradibus, (quaeque in ſequentibus definietur); ducta GL parallela rectae BF, aſſumtae, fore GH ſupplementum quaeſitum pro eleuatione vnius gradus; GI pro eleuatione duorum graduum; et ita porro. *Fig. 3.*

6) Longitudo rectae BF arbitraria eſt: dummodo conſtet, quot minuta prima aut ſecunda contineant arcus BC, BD, BE, etc. in ſupplementum addendi. Nullatenus enim radius horum arcuum pendet ab interuallis AG, AB, in baſin trianguli aſſumtis. Ergo, vt exactiori diligentiae conſulatur, aſſumi poterit radius ſat magnus, et conſtrui ſcala aequaliter diuiſa, quae numerum graduum (ſi ſit opus), minutorum primorum et ſecundorum indicet, quae in arcubus per rectam BF ... extenſis, hoc eſt in ſupplementis BC, BD, BE etc., inſunt.

7) Si porro ſententia ſteterit, crurum eleuationem, iunctim ſumtam, non vltra decimum gradum aſcendere debere; palam eſt, maxi-

maximum angulum $oe\nu$, de cuius reductione fermo effe poffit, fore $= 180^\circ - 2.\ 10^\circ = 160^\circ$. Eousque igitur trianguli ABF bafis erit producenda; et notatis in illa punctis, vel pro fingulis gradibus, vel pro quinis aut denis, prout fpatium permiferit, erigendae erunt rectae, vt GL, quarum altitudines, vt GH, GI etc. ad fcalam minutorum relatae, indicabunt fupplementa, cuiuis arcui menfurato, ad quamuis crurum eleuationem, addenda.

8) En, generalem inftrumenti reductorii ideam, obiter adumbratam, cuius fingulae partes, in fequentibus, fucceffiue euoluentur. Sciendum autem eft, in ea quam Mayero vindico, rectas perpendiculares, vt BF, ita fignatas effe numeris graduum, vt fumma inclinationum vtriusque cruris in margine adfcripta fit. Ita BC eft menfura totius fupplementi, quod angulo nonaginta graduum inclinato addendum eft, vbi fumma inclinationum aequalis eft vni gradui, hoc eft, vbi, in cafu noftro primo, crura fingula eleuata funt per gradus dimidium.

Cafus II.

Vbi anguli dati crus alterum horizontale eft, alterum eleuatum.

Fig 2. 1) Sit im, crus horizontale; lm, crus eleuatum; lp = oi, eiusdem eleuatio; arcus il, aequalis arcui $i\alpha$, menfura anguli lmi, inclinati; ip, menfura anguli reducti: erit $p\alpha$, fupplementum negatiuum arcui $i\alpha$, in reductionem addendum; idem fcilicet, quod addendum bis fuerat arcui ln, reducendo.

2) Generatim duo arcus il, lw, qui ex altera parte horizonti infiftunt et femiperipheriam complent (duo anguli contigui, quorum vterque habet crus alterum horizontale), in reductione idem fupplemen-

plementum pα requirunt: nempe angulus obtufus pofitiuum, angulus acutus negatiuum.

Cafus III.

Vbi anguli dati crus alterum eleuatur, alterum deprimitur.

1) Si vtriusque cruris obliquitas aequalis eft; fupplementum negatiuum, pro arcu dimidiato repertum iuxta Cafum fecundum, bis additur.

2) Quod fi autem declinatio $\lambda\pi$, cruris λm, infra horizontem πp, et eleuatio lp, cruris ml, fupra horizontem πp, fuerint inter fe inaequales; duabus reductionibus opus eft. *Fig. 4.*

Primo enim arcus λl datus reducitur ad alium horizontem $\sigma$is, qui efficiat $\lambda\sigma =$ ls. Quo facto erit quam proxime $\lambda\sigma +$ ls $=$ $\lambda\pi +$ lp; et fupplementa harum eleuationum inueftigantur iuxta Cafum fecundum.

Deinde vero arcus $\sigma$is reductus, denuo reducitur ad verum horizontem πp, iuxta Cafum primum.

Patet autem, in prima reductione adhiberi fummam eleuationum $\pi\lambda +$ pl ($= \sigma\lambda +$ sl); in fecunda earundem differentiam lp $- \lambda\pi$ ($=$ ps $+ \pi\sigma$).

3) Ergo fupplementa negatiua arcui λl addenda, vt arcus σs fuperfit, reperiuntur per reductionem arcus $180^\circ - 2.$ il $= 180^\circ - \lambda$l, ope fcalae, iuxta Cafum fecundum.

Et fupplementa pofitiua, arcui σs addenda, vt inde fiat arcus πp, reperiuntur per reductionem arcus σs, iterum ope fcalae, iuxta Cafum primum.

4) Quandoquidem autem haec operatio per reductionem duorum angulorum contiguorum peragitur, nempe anguli λl, et anguli $180^\circ - \lambda$l; commodum erit, numeros graduum bafi fcalae bis adfcri-

adſcribi: ſemel directo ordine, et iterum inuerſo. Priores pertinent ad angulos λl, poſteriores ad angulos $180° - \lambda l$, iuxta poſitos.

Caſus IV.

Vbi crus vtrumque eleuatum eſt.

Fig. 5. Haec operatio, perinde ac in tertio caſu, ex duabus reductionibus conſtat.

Primo enim arcus datus λl, reducitur ad horizontem $i \varrho w$ ſubſidiarium, qui efficiat $\lambda\sigma = ls$, hinc $\sigma\pi \pm sp$ ($= 2.\ \sigma\pi$) $= \lambda\pi \pm lp$, ſummae eleuationum Supplementa negatiua (ſi intelligatur $a\varrho = \lambda\varrho = \alpha\varrho = l\varrho$) erunt $av \pm \alpha u$, et quaerentur in ſcala iuxta Caſum tertium, pro angulo $180° - \lambda l$ ($= 180° - a\alpha$); notante differentia, inter vtramque eleuationem datam, ſummam eleuationum, cuius numerus in ſcalae margine adhibendus eſt. Erit vu (quam proxime $= \sigma s$) reductus in horizontem ſubſidiarum arcus λl.

Secundo, hic ipſe arcus reductus vu, ſeu σs, denuo reducetur ad horizontem iw datum, ope circulorum maximorum $e\sigma\lambda\pi$, $elsp$, illi normalium; ita quidem, vt ſupplementa poſitiua arcui σs addenda, quo fiat aequalis arcui quaeſito πp, quaerantur in ſcala, pro ſumma eleuationum $\sigma\pi \pm sp = \lambda\pi \pm lp$, margini verticali adſcripta.

Sumtum hic eſt, eſſe $vu = \sigma s$, hoc eſt, $v\sigma = us$, vt ſcilicet reductio arcus vu, perinde vt arcus σs, fiat aequalis πp. Id quod exacte verum foret, ſi eſſet $\sigma\varrho = \varrho s$: eſt autem, in triangulis congruentibus $v\lambda\varrho$, $ul\varrho$, potius $\sigma\varrho \pm v\sigma = \varrho s - us$. Cum autem admodum parua ſit ratio arcuum $v\sigma$, us, reſpectu arcuum $\sigma\varrho$, ϱs; negligi poteſt error, quo haec diuerſitas reductionem ipſam afficit.

§. 7.

§. 7.

Haec omnia in compendium redigi, hoc modo, possunt. In quacunque reductione, angulo inclinato duo addenda sunt supplementa: quorum alterum reperitur in instrumenti basi directa (a puncto A procedente), ope *summae* inclinationum ad marginem relatae: alterum reperitur in instrumenti basi inuersa (ad punctum A recedente), ope *differentiae* inclinationum, ad marginem relatae.

Si crura anguli sint in eadem parte horizontis: supplementum, quod per *summam* inclinationum quaeritur in directa basi, *positiuum* est; supplementum, quod per *differentiam* eleuationum quaeritur in inuersa basi, *negatiuum* est.

Contraria ratione, si crura in oppositis partibus horizontis existunt: supplementum, quod per *summam* inclinationum in basi inversa quaeritur, *negatiuum* est; quod autem per *differentiam* inclinationum in basi directa quaeritur, *positiuum* est.

Vix est vt addam, in aequali vtriusque cruris inclinatione alterum supplementum cessare. Et si crus alterum fuerit horizontale; summam inclinationum fore aequalem differentiae; hinc pro eadem quaerenda esse supplementa in basi directa et inuersa.

§. 8.

Aut si placuerit, crus declinatum pro negatiue eleuato habere; casus omnes complectetur vnica regula:

In basi *directa* quaeritur, ex *summa* inclinationum, supplementum *positiuum*; in basi *inuersa*, ex *differentia* inclinationum, supplementum *negatiuum*.

§. 9.

Scalae, seu instrumenti reductorii, constructio.

Accedo iam ad ipsam scalae constructionem, hoc est, ostendam qua lege basis et altitudo illius sit diuidenda, vt proposito satisfaciat. Vt quam breuissime dicam: altitudines nihil aliud sunt, quam sinus versi eorum angulorum, quorum duplum margini adscriptum est; petiti ex circulo radii cuiuscunque, sat magni: basis vero, a puncto A inde, constat ex tangentibus eorum angulorum, quorum numeri itidem duplicati directe adscripti sunt; et ex cotangentibus angulorum, quorum numeri duplicati ordine inuerso adscripti sunt.

Corollarium.

Iuxta Mayeri formulam, a Kaestnero demonstratam,

$$h = g + (\tfrac{1}{2}\, p + \tfrac{1}{2}\, q)^2 .\ \tan \tfrac{1}{2}\, g - (\tfrac{1}{2}\, p - \tfrac{1}{2}\, q)^2 .\ \cot \tfrac{1}{2}\, g$$

altitudines erunt in ratione quadratorum dimidiatae summae angulorum, margini adscriptorum.

Quod perinde est in angulis satis paruis, quorum scilicet arcus aequales censeri possint eorum chordis. Sunt enim chordae in ratione duplicata sinuum versorum.

§. 10.

Altitudinis diuisio et mensura.

1) Quamdiu summa inclinationum non assurgit vltra gradus decem, hoc est, inclinatio vnius cruris non vltra quintum gradum; Fig. 6. res erit cum solis triangulis fid, hlk etc. et cum ratione, iuxta quam bases eorum, vt kl, minores euadunt, dum altitudines, vt lh (sinus inclinationis), gradatim minuuntur. Quae ratio, cum in omnibus triangulis, vt fid, hlk, (ex natura ellipsium quae hypotenu-

tenuſas eorum conſtituunt) ſit eadem; ſupereſt, vt in vno aliquo illa ratio baſium quaeratur. Adhiberi in hanc rem poſſunt figurae primae triangula l α p, a α f, (ſcilicet eorum orthographiae, in planum circuli maximi i e w proiectae) diuerſis eleuationibus o i, h i, eiusdem arcus l n = a b reſpondentia.

Eſt autem, pro ellipſi e l p,

$$ir : rm = p\alpha : \alpha m$$

Et cum, in modicis inclinationibus, admodum parua ſit ratio ipſius i r, ad r m; poterit termino r m, ſubſtitui r m + i r; hinc

$$ir : im\ (= rm + ir) = p\alpha : \alpha m.$$

Similiter pro ellipſi e a f, erit

$$is : sm = f\alpha : \alpha m,$$

et ob cauſſam modo allegatam

$$is : im\ (= is + sm) = f\alpha : \alpha m.$$

Ex vtraque proportione ſequitur, fore quam proxime

$$ir : is = p\alpha : f\alpha,$$

hoc eſt, baſes triangulorum ad ſupplementa pertinentium, fore in ratione ſinuum verſorum inclinationis. Sunt autem ſupplementa ipſa, nempe arcus vt $\nu\mu$, n m, tantum non in eadem ratione, ac ipſae baſes.

2) Hinc, ſi in margine inſtrumenti ponantur ſinus verſi BC, BD, BE, BF etc., ad angulos 30′, 1°, 1° + 30′, 2°, 2° + 30′ etc. pertinentes, adſcribatur autem duplum horum numerorum, vt ſcilicet pro ſumma inclinationum aequalium valeant; ſupererit, vt ſcala conficiatur, quae numerum minutorum oſtendat, pro modo eleuationum addendum. *Fig. 3.*

3) In hunc finem quaeratur valor arcus m n, pro ſumma eleuatione, quam hic ſupponimus = 5°: et pro arcu n ν, in exemplum aſſumto, aequali 90°.

 Eſt

Eſt autem $\sin p\varkappa : \sin tot = \sin n\varkappa : \sin m\varkappa$
hoc eſt, $\sin 85^\circ : \sin tot = \sin 45^\circ : \sin m\varkappa$
hinc $m\varkappa = 45^\circ, 13', 9''$; et $mn = 13', 9''$.

Ergo ſinus verſus, cui in margine inſtrumenti adſcripti erunt 10 gradus, nempe ſumma inclinationum, debet, pro arcu $rn = 90^\circ$ dato, in ſcala minutorum oſtendere ſummam ſupplementi, vtrinque adiiciendi, $mn + \mu\nu = 2. mn = 26' + 18''$. Ad hunc itaque modulum ſcala minutorum erit temperanda.

4) Ipſi autem ſinus verſi, deſcripti erunt ope cuiuscunque ſcalae, in partes milleſimas diuiſae; quarum numerus, pro quolibet ſinu verſo, reperietur in tabulis ſinuum, ſubtracto ſinu a radio, et neglectis quatuor vltimis notis.

Fig. 3. 5) Ceterum perinde eſt, ad quem baſis AM gradum ſinus verſi erigantur, et ſcala ſupplementorum definiatur: vtrum ad nonageſimum, vt in exemplo factum eſt, an ad aliquem ſuperiorem, verbi cauſſa ſcalae vltimum, centeſimum ſexageſimum tertium. Poſterius ad hoc confert, vt tanto maior ſcala, pro conſtruendis ſinubus verſis, aſſumi poſſit; et vt conſtructio definiat minora ex maioribus, non magna ex paruis.

6) Verum, ne ſcala reductionum ipſa in immenſum ſpatium excreſcat; poterit pars ſuperior, poſtquam rectae ad punctum A concurrentes deſcriptae erunt, ad lubitum recidi; id quod factum eſt in ſcala Mayeriana in quinto fere eleuationum gradu. Superiori autem margini, qua a radiis ſecatur, adſcribentur ceteri eleuationum gradus. Qua de re videbimus infra. Illius illuſtrandae cauſſa adieci appendicem Tabulae II, qui in inſtrumento ipſo abeſſe poteſt.

§. 11.

§. 11.

Basis diuisio et mensura.

Basis instrumenti magnitudo itidem arbitraria est; ratio autem diuidendae, hoc modo cognoscitur.

Ex superioribus patet, bases lk, st, supplementorum, mn, qr, quae arcubus hg (= nν), γδ (= qy) mensuratis vtrinque addenda sunt, tum quidem, cum crurum eleuationes omnes aequales erunt, fore in ratione axium minorum, ellipsium βhk, βγt, vel quod idem est, in ratione sinuum cl, cs, ad arcus nϰ, qϰ (mensuratorum dimidia) pertinentium. Fig. 6.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Est autem (recta)} & qr : st = & (cq =)\ cn : sq. & \text{(ob triang. similia)} \\
\text{hinc cum sit} & st : lk = & cs : cl & \\
\text{et} & \underline{lk : nm =} & \underline{ln : cn} & \text{(ob triang. similia)} \\
\text{erit} & qr : nm = & cs.ln : sq.cl = &
\end{array}
$$

$$
\frac{\text{sin } \varkappa q}{\text{cos } \varkappa q} : \frac{\text{sin } \varkappa n}{\text{cos } \varkappa n} = \frac{\text{tan } \varkappa q}{\text{rad}} : \frac{\text{tan } \varkappa n}{\text{rad}} = \text{tan } \varkappa q : \text{tan } \varkappa n.
$$

Hoc est, supplementa ipsa debent esse in ratione tangentium, ad arcus mensuratos dimidiatos pertinentium. Hinc, si in basi AM Fig. 9. assumta, fuerint AG, AB, tangentes arcuum dimidiatorum, BF autem contineat supplementa posterioris; continebit GL supplementa prioris.

Quoniam autem istae perpendiculares, per constructionem, continent summas supplementorum vtrinque arcui adiiciendorum; adscribendi etiam sunt basi numeri integrorum arcuum, quibus illa adiiciuntur. Vt, si AG fuerit tangens $22\frac{1}{2}$ graduum, adscribendi sint puncto G gradus 45; et si AB fuerit tangens 45 graduum, adscribendi sint puncto B gradus nonaginta.

§. 12.

Plane ab arbitrio artificis pendet, quem radium ad tangentes vsurpare velit; quem ad sinus versos. Visum tamen est, inquirere in radios ſcalae, quae prae manibus eſt. Inueni, tangentem cui adſcripti ſunt 90 gradus, hoc eſt tangentem 45 graduum, aequalem eſſe altitudini ad finem huius arcus erectae, quae reſpondet 6 gradibus cum 10 minutis inclinationum, hoc eſt ſinui verſo 3°, 5'. Foret autem, ad eundem radium, tan 45°: ſin verſ 3°, 5' = ſin tot: ſin tot —(coſ 3°, 5) = 10000000 : 14467. Ergo ſunt radii, hinc ad tangentes illinc ad ſinus verſos ſcalae vſurpati, reciproce vt iſti numeri; proxime in ratione 1 : 1000. Vnde patet, inſtrumenti artificem radium circuli ad tangentes adhibiti, ſcilicet tangentem 45 graduum, aſſumſiſſe in menſuram decem minutorum. Etenim arcui menſurato, aequali 2. 45°, ſumma eleuationum exiſtente = 2 (3° + 5'), adiicienda fere ſunt, in reductionem, 10 minuta. Sit enim ſupplementum ex vna parte adiiciendum = Z; erit

$$\text{coſ. } 3°, 5' : \text{ſin tot} = \text{ſin } 45° : \text{ſin } (45° + Z')$$

vnde ſequitur 45° + Z' = 45° + 4' + 59'', 3...; et Z = 4' + 59'', 3... cuius duplum = 9' + 58'', 6.. parum differt a decem minutis.

§. 13.

Reductio angulorum per ſcalam nititur, praeter cetera fundamenta vera, aliquot etiam non vsque quaque veris, ſed, pro caſuum diuerſitate, plus minus a veritate recedentibus.

Ita, vt hoc vtar, non ſupplementa ipſa quae quaerimus, ſed eorum ſubtenſae, reperiuntur. Cum autem hi defectus tam poſitiua, quam negatiua, ſupplementa adficiant; eorum modo differentia valorem repertum vitiare poteſt, qui error in modica eleuatione admodum paruus erit.

Porro autem ſumitur, ſupplementa rq, in diuerſis eiusdem arcus eleuationibus, ſequi rationem baſium ts; quod propius accedit ad veritatem in angulis $\gamma\delta$ mediocribus, quam in valde obtuſis.

Inde

Inde patet, neque bafin inftrumenti, neque illius altitudinem, ad nimium graduum numerum debere extendi: id quod iam fola tangentium magnitudo, vltra modum crefcens, non permitteret.

Supereft, vt in haec ipfa fcalae vitia paullo curiofius inquiramus.

§. 14.

De differentia, inter arcum fupplementi eiusque chordam, et vitii inde oriundi modo.

1) Iuxta veritatem eft cof fd : fin verf fd = fin $\varkappa$n : lk Fig. 6.

$$\text{et} \quad \text{cof } \varkappa n : \text{fin tot} = lk : \text{Chorda } nm$$

$$\text{hinc} \quad \text{cof fd. cof } \varkappa n : \text{fin verf fd. fin tot} = \text{fin } \varkappa n : \text{chor } nm;$$

$$\text{hoc eft} \quad \frac{\text{fin verf fd. fin tot. fin } \varkappa n}{\text{cof fd. cof } \varkappa n} = \frac{\text{fin verf fd. fin tot}}{\text{cof fd}} \cdot \frac{\tan \varkappa n}{\text{fin tot}}$$

$$= \frac{\text{fin verf fd. } \tan \varkappa n}{\text{cof fd}} = \text{Chorda arcus } nm; \text{ feu } \frac{\text{fin verf fd. } \tan \varkappa n}{2 \text{ cof fd}}$$

$$= \text{fin } \frac{nm}{2}.$$

Differentia inter hunc finum et longitudinem arcus fui, erit quarta pars vitii, quod alterutrum fupplementum, ope fcalae repertum, afficiet. Quod fi igitur propofitum nobis fuerit, totum vitium certum aliquem valorem fuperare non debere, verbi cauffa minutiam primam; quaerendus erit ifte arcus Z (in minutis fecundis expreffus), qui quarta minuti parte excedit finum fuum.

Notante p peripheriam radii 1; erit

$$180.\ 60^2 : Z = p : \text{arc } Z$$

$$\text{hinc} \quad Z.\ \frac{p}{180.\ 60^2} = \text{arc. } Z$$

Ergo longitudo arcus $\frac{1}{4}'$, feu $15''$, erit aequalis $15.\ \frac{p}{180.\ 60^2}$. Quae

cum

cum intercedere debeat inter arcum, quem quaerimus, eiusque ſinum; debet eſſe

$$Z. \frac{p}{180 \cdot 60^2} - 15. \frac{p}{180. 60^2} = \text{ſin } Z;$$

et breuitatis cauſſa poſito $n = \frac{p}{180. 60^2}$, erit $n (Z - 15) = \text{ſin } Z$.

2) Ponamus, repertum eſſe hoc $Z = a$ (quomodo ſit reperiendum, in ſequentibus oſtendam), quod in limitem nobis praeſcripſimus, et eſſe, in figura ſexta, $\text{ſin } \frac{nm}{2} = \frac{\text{ſin verſ } fd}{2. \text{ coſ } fd}$. $\tan \varkappa n =$ ſin a; palam eſt, pendere ipſius a, valorem tum ab arcu $\varkappa n$, tum ab arcu fd; hoc eſt, quo minor aſſumitur arcus fd, tanto minor erit fractio $\frac{\text{ſin verſ } fd}{\text{coſ } fd}$, et tanto maior debebit aſſumi arcus $\varkappa n$; et vice conuerſa. Hinc pro quolibet aſſumto ſin verſ fd, per analogiam

ſin verſ fd : coſ fd = 2 ſin a : tan $\varkappa n$,

vel parum ab iſta abludentem ſin verſ fd : rad. = 2 ſin a : tan $\varkappa n$, reperietur is arcus $\varkappa n$, vltra quem ſcala, pro ſimplici inclinatione fd, extendi non debet.

3) Formula $\frac{\text{rad. } 2 \text{ ſin } a}{\text{ſin verſ } fd} = \tan \varkappa n$ oſtendit, pro vno eodemque valore a, fore tangentes $\varkappa n$, ad quas ſcala extendi debet, in ratione inuerſa ſinuum verſorum, ad quos extendi debet. Hoc eſt, Fig. 7. ſi fuerit AB (= tan $\varkappa n$) tangens, ad dimidium arcus menſurati et in puncto B notati pertinens; HB = QS (= ſin verſ fd) ſinus verſus, ad dimidiatam ſummam inclinationis in puncto Q notatae, hoc eſt ad inclinationem vnius cruris, pertinens; et poſſit reductio fieri absque errore tanto, quantum nobis non permittimus; ſimiliter AC (= tan KN) tangens alius cuiusdam arcus dimidiati; et quaeratur RS

(= ſin

(= ſin verſ FD) ſinus verſus inclinationis vnius cruris, ad quam poſterior arcus aeque tuto reduci poſſit, quam prior: debet eſſe tan KN : tan $\varkappa$n = ſin verſ fd : ſin verſ FD; hoc eſt, AC : AB = HB : PB; et definietur PB, ſiue RS, per interſectionem rectae HB et hypotenuſae AG.

Similiter pro arcu, cuius valor puncto T adſcriptus eſt, maior non eſt quaerenda crurum inclinatio, quam quae puncto W adſcripta eſt. Angulorum ad X, α, notatorum inclinationes finiri debent in punctis Z, V, et ita porro. Numeri autem his punctis adſcribendi, adſcribi poterunt punctis ε, δ, etc., reciſa ſcalae parte ſupra marginem IQ aſcendente.

Scala hoc modo in iuſtos limites redacta; quae non debent quaeri inclinationum ſummae, nec quaeri poterunt: verbi cauſſa, non arcus X eleuatio δ, nec arcus C eleuatio ε.

4) In ſcala Mayeriana Bβ maximum, eſt ſinus verſus 5 graduum, et eorum ſcilicet duplum, 10°, adſcriptum puncto δ, pertinet ad arcum in α notatum aequalem 90 gradibus: puncto H adſcripta eſt inclinationum ſumma = 5°, et reſpondet arcui in B notato, aequali 163 gradibus; vtrumque tamen cum paruo aliquo exceſſu. Hinc tota ſcala continetur trapezio (ſeu potius trapezoide, quod maluit eius artifex, vt ſpatium inter radios primores Aδ, Ae etc. paullulum laxaret), ABHδA. Error autem, qui in reductione arcus 163°, dum crura ſummam eleuationis 5 gradibus aequalem conficiunt, reſpectu ſingulorum ſupplementorum hoc nomine committitur, quaſi errorum limes praeſcriptus eſt vniuerſo inſtrumento, quem in ceteris etiam caſibus transgredi non poſſit. Nam vt exacte praeſcriberetur, debuiſſet margo ſuperior Gδ, baſi CA parallelus fieri.

5) Quantus autem sit iste error, definietur hoc modo. Formula generalis,

$$\frac{\text{sin vers fd. tan } \varkappa n}{2 \text{ cos fd}} = \frac{1 - \text{cos fd}}{2 \text{ cos fd}} \cdot \text{tan } \varkappa n = \text{sin } \frac{nm}{2},$$

mutatur hoc loco in sequentem

$$\frac{\left(\text{sin } \frac{fd}{2}\right)^2 \cdot \text{tan } \varkappa n}{\text{cos fd}} = \text{sin } \frac{mn}{2}.$$

Adhibendo logarithmos, reperitur hic arcus $\frac{mn}{2} = 10', 57''$; eius sinus est $= \overset{-7}{31852}$; longitudo arcus, multiplicando $10', 57'' = 657''$ per $\frac{p}{180.\ 60^2}$ $(= \overset{-12}{4848136})$, reperitur aequalis 0,003185225, pro radio $= 1$. Hinc differentia, inter longitudinem sinus et longitudinem arcus, pene aequalis est 0,000000025352, quae diuisa per $\frac{p}{180^\circ.\ 60^2} = \overset{-12}{4848136}$, exprimit errorem commissum, in minutis secundis, aequalem 0'',00523 respectu arcus $\frac{mn}{2}$; hinc quadruplum $=$ 0'',02092 ostendit totum errorem, in integro supplemento $2 \cdot mn$ admissum. Ergo, hoc respectu, nostra scala pro exacte vera haberi potest.

§. 15.

Quaeri autem potest, quousque instrumenti altitudo extendi possit, vt error, de quo hic sermo est, datos limites non egrediatur.

Sit v longitudo arcus, cuius quadruplum constituit supplementa arcui obliquo mensurato addenda; sit eiusdem arcus v sinus $= y$; sin tot $= 1$; m differentia, quae conceditur inter longitudinem arcus et sinus: et quaeritur v ipsum.

Cum

Cum si $y = v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^5}{2.3.4.5} - \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{v^9}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ etc.
et debeat esse $- y + v = + m$;

erit $m = \frac{v^3}{2.3} - \frac{v^5}{2.3.4.5} + \frac{v^7}{2.3.4.5.6.7}$ etc.

Ponatur $m^{1:3} = n$; et $v = an^1 + bn^3 + cn^5 + dn^7$ etc.

Erit $(-m =) -n^3 = -n^3$

$$\left.\begin{array}{rlll}
+\frac{v^3}{2.3} = & +\frac{a^3 n^3}{2.6} & +\frac{a^2 b}{2}.\, n^5 & +\frac{a b^2}{2}.\, n^7 \\
 & & & +\frac{a^2 c}{2}.\, n^7 \\
+\frac{v^5}{2.3.4.5} = & & -\frac{a^5}{2.3.4.5} n^5 & -\frac{a^4 b}{2.3.4}.\, n^7 \\
+\frac{v^7}{2.3.4.5.6.7} = & & & +\frac{a^7}{2.3.4.5.6.7}.\, n^7
\end{array}\right\} \text{etc.}$$

Vnde reperientur sequentes valores coefficientium:

$a = 6^{1:3}$; $b = \frac{1}{10}$; $c = \frac{6^{2:3}.3}{700}$; $d = \frac{6^{1:3}}{700}$ etc.

Hinc $v = 6^{1:3}.\, n + \frac{1}{10} n^3 + \frac{6^{2:3}.\, 3}{700}.\, n^5 + \frac{6^{1:3}}{700}.\, n^7$ etc.

Multum vero abest, vt praesens occasio tam exactam problematis solutionem requirat; et sufficit adhibuisse primum, aut, si diligentius agere velimus, primum et secundum seriei terminum.

§. 16.

Exempla.

I. Sit $m = \overset{-3}{1}$; respondebit, tanquam sinus, angulo $3', 26''$; erit $n = m^{1:3} = \overset{-1}{1}$. Quod illatum in aequationem dabit $v =$

 0,18181237

0,18181237..., longitudinem arcus, qui ſinum ſuum excedit tribus minutis, viginti ſex ſecundis. Pertinet autem iſta longitudo ad arcum aequalem $10^\circ, 25', 1'',49\ldots$

Ne igitur in reductione, ex hoc capite, plus peccemus quam $4\,(3', 26'') = 13', 44''$; altitudo BH inſtrumenti ABHδ, ſeu ASQδ, menſura illius capta iuxta ſcalam minutorum, non excedere debet $10^\circ + 25' + 1'', 49\ldots$ Hoc eſt, debet eſſe

$$\text{ſin } v = \text{ſin}\,\frac{mn}{2} = \frac{r - \text{coſ fd}}{2\ \text{coſ fd}}.\ \tan \varkappa n \leqq \text{ſin}(10^\circ + 25' + 1'',49\ldots)$$

Ergo ad lubitum electa tangente $\varkappa n =$ AB, ad quam definire placuerit altitudinem BH ſcalae, fiat

$$\text{coſ fd} = \frac{r.\ \tan \varkappa n}{2\ \text{ſin}\ (10^\circ + 25' + 1'', 49\ldots) + \tan \varkappa n}$$

Reperto arcu fd, eius menſura, iuxta ſcalam minutorum capta, dabit altitudinem BH.

Quae ſequuntur, exempla, non ſcalae cauſſa, ſed calculi illuſtrandi, propoſita eſſe, vix eſt vt moneam.

II. Sit $m = \overset{-3}{125}$ (ſinus $7^\circ, 10', 50''$); erit $n = \overset{-1}{5}$; et reperietur $v = 0{,}92132389\ldots$ longitudo arcus; cuius menſura per gradus expreſſa, ſi dicatur Z, erit $Z = v.\,\frac{180^\circ}{p} = 52^\circ, 7879707\ldots = 52^\circ, 47', 16''$ etc.

III. Quaeritur, quis arcus v, toto radio differat a ſuo ſinu. Erit hic $m = 1$; hinc etiam $m^{1:3} = n = 1$; et $v = 6^{1:3}.\ 1 + \frac{1}{10}.\ 1^3 + \frac{3.\ 6^{2:3}}{700}.\ 1^5$ etc. $= 1{,}934405998973$; hinc $Z = \frac{v.\ 180^\circ}{p} = 110^\circ, 8332996\ldots = 110^\circ + 49' + 59'',8787\ldots$

VI.

IV. Quaeritur longitudo v arcus, qui a suo sinu differat tota semiperipheria. Erit hic $m = 3,141592\ldots$; hinc $m^{1:3} = n = 1,464\ldots$ Reperi, ex quatuor primis aequationis terminis, studio satis laxo,

$$v = 3,1167\ldots$$

quod non multum deficit ab $v = 3,1415\ldots$, quale reperiri debebat. Semicirculo enim competit, vt sinum tota sua longitudine excedat.

V. Si longitudo v, arcus quaesiti, excederet semiperipheriam longitudine w, posito iam $n = (m - p)^{1:3}$, reperiretur valor w, per similem cetera formulam

$$w = 6^{1:3}.\, n + \tfrac{1}{10}\, n^3 + \frac{6^{2:3}.\ 3}{700} + \frac{6^{1:3}}{700}\, n^7 \text{ etc.}$$

Verbi caussa, si detur $m = 3,1425926\ldots$; erit $m - p = 0,001$; hinc $n = (m - p)^{1:3} = 0,1$; ergo

$$w = 6^{1:3}.\, 0,1 + \tfrac{1}{10}.\, \overset{-3}{1} + \frac{6^{2:3}.\ 3}{700}.\, \overset{-5}{1} + \frac{6^{1:3}}{700}.\, \overset{-7}{1} \text{ etc.}$$

Summa huius seriei, iam in primo exemplo reperta, ostendit $w = 0,18181237\ldots$; cui respondent $10^\circ + 25' + 1'',49\ldots$ = angulo Z. Hinc quaesitum v ($= 180^\circ + Z$) erit $= 190^\circ + 25' + 1'',49$; cuius sinus est $= 0,18081230\ldots$; longitudo autem arcus v ($= w + 3,141592\ldots) = 3,32340502$.

Differentia $= 3,14259272$, ab assumto $3,1425926$ vix diuersa.

§. 17.

Scholium.

Iam in superioribus obseruatum est, non totum hunc errorem vitiare reductiones, ad quas supplementa positiua et negatiua adhibenda sint. Tanto vero plus, in aequali inclinationum summa, per compenſationem decedit ab hoc errore, quanto propius accedit differentia inclinationum ad earundem ſummam; et quanto minus ſimul differt arcus menſuratus, a quadrante: generatim, quo magis ſupplementa oppoſita ad aequalitatem tendunt.

Quod ſi enim p et q denotent inclinationes crurum, hinc $\frac{p \mp q}{2} = fd$; mn dimidiam partem ſupplementi poſitiui, MN dimidiam partem ſupplementi negatiui: perinde vt fuit

$$\left(\frac{\left(\text{ſin}\, \frac{fd}{2}\right)^2}{\text{coſ}\, fd} .\ \tan \varkappa n = \right) \frac{(\text{ſin}\, \frac{1}{4}\, (p \mp q))^2}{\text{coſ}\, \frac{1}{2}\, (p \mp q)} .\ \tan \varkappa n = \text{ſin}\, \frac{mn}{2},$$

ſimiliter erit $\frac{(\text{ſin}\, \frac{1}{4}\, (p - q))^2}{\text{coſ}\, \frac{1}{2}\, (p - q)} .\ \cot \varkappa n = \text{ſin}\, \frac{NM}{2}$.

Quoties igitur MN, ab mn, parum diuerſum erit; error in vtroque commiſſus fere aequalis eſt, et compenſatur.

§. 18.

De errorum, qui baſis diuiſionem vitiant, modo.

Fig. 6. 1) Aſſumtum eſt in demonſtratione, eſſe qr : st = cq : sq, et lk : mn = ln : cn. Neutrum exacte verum eſt, niſi in arcubus rq, mn, infinite paruis. Cum autem haec ſupplementa, pro inſtrumenti limitibus aſſumtis, ſubinde in tales arcus excreſcant, qui nequaquam arcuum elementarium more tractari poſſunt; conſequens eſt, vt neque baſis ſecundum rationem tangentium facta diuiſio, quae illis proportionibus nititur, vsque quaque reſpondere quaeſito poſſit.

2) Sit, vt hactenus, $\frac{mn}{2} = v$, hinc ſinus arcus v = coſinui anguli mnc, qui pro recto vſurpatur; et ſimiliter $u = \frac{rq}{2}$, hinc ſinus

arcus

arcus u = coſinui anguli rqc, qui itidem minus recte pro recto habetur:

$$\begin{array}{llcl} \text{erunt rectae } qr - x : st & = cn : sq \\ st : lk & = cs : cl \\ lk : mn - Z & = nl : cn \\ \hline \end{array}$$

hinc $qr - x : nm - Z = cs.nl : sq.cl = \tan \varkappa q : \tan \varkappa n.$

3) Ergo, ſi baſis ſcalae diuidatur in ratione tangentium; ſupplementa, arcubus menſuratis debita, non erunt in ratione $qr : nm$, vti par erat, ſed in ratione $qr - x : mn - Z$. Igitur ſcala cum aliquo errore indicabit ſupplementorum valorem, niſi caſu acciderit, vt ſit vbique $qr : mn = x : Z$. Quod vtrum fieri poſſit, iam erit diſpiciendum. Vel potius, cum fieri omnino non poſſit, videndum, quam inter ſe rationem habeant reperta ſupplementa $qr - x$, ad vera qr; iuxta magnitudines et eleuationes angulorum menſuratorum.

4) In figura octaua, recta 2.mn eſt id, quod ſupplementi nomine per ſcalam indicatur; ita vt ſit iam quoque $\frac{mn}{2} = \frac{\text{ſin verſ fd}}{2 \text{ coſ fd}}$. Fig. 8.
$\tan \varkappa n$: nam ſinus arcus $\frac{mn}{2}$ nihil aliud eſt, quam ipſa recta $\frac{mn}{2}$.

Quod ſi itaque fiat me, normalis ſubtenſae bn; et angulus mnb, notetur per Z; erit

$$r : \text{ſin } Z = mn : me$$

hoc eſt, radio figurae in vnitatem aſſumto, erit

$$me = mn.\ \text{ſin } Z.$$

Ob paruam angulorum fmn, fbn, diſcrepantiam, erit

$$(fn : nm =)\ r : \tan \varkappa n = (me =)\ mn.\ \text{ſin } Z : be$$

$$\text{hinc } be = mn.\ \text{ſin } Z.\ \tan \varkappa n.$$

Eſt autem be proxime aequale differentiae inter ſupplementum

mn

mn repertum, et ſupplementum verum bn; hinc ratio inter mn, et bn, indicat, quota parte ſupplementi reperiendi bn, peccatum ſit ab inſtrumento.

Ergo, cum ſit $bn = 2 \sin Z$; erit

$$be : bn = mn.\ \sin Z.\ \tan \varkappa n : 2 \sin Z$$

$$= \frac{mn}{2}.\ \tan \varkappa n : 1$$

$$= \frac{mn}{2} : \cot \varkappa n$$

5) Idem paullo breuius demonſtrabitur ſic. Ducta ca, per mediam chordam bn; na, autem ad ic, parallela; erit angulus $acn = bnm$, et $gan = mbn$; hinc triangula anc, bmn ſimilia; et

$$be : bn = ag : ac, \text{ proxime } = ah : ac.$$

Eſt autem $ah : ac = hn : in$; ergo

$$be : bn = hn : in, \text{ proxime } = \frac{mn}{2} : \cot \varkappa n.$$

Vel etiam $be : mn$ (fere $= bn$) $= \frac{mn}{2} : \cot \varkappa n$;

$$\text{et } be = \frac{(mn)^2}{2 \cot \varkappa n}.$$

6) Inde patet, quomodo valor erroris, oriundi a diuiſione baſis iuxta tangentium rationem facta, pendeat tum a ſumma inclinationum, tum ab ipſo arcu menſurato. Sit μ error maximus, quem, hoc nomine, ſcalae noſtrae condonabimus, in minutis ſecundis expreſſus; erit $\sin \frac{\mu}{2}$ fere $= be$, hoc eſt errori, qui reſpectu mn (ſupplementi dimidiati) committitur.

Ergo

Ergo ſin $\frac{\mu}{2} = \text{be} = \frac{(\text{mn})^2}{2 \cot \varkappa \text{n}}$. In ſuperioribus repertum fuit $\frac{(\text{ſin } \frac{1}{2} \text{fd})^2 . \tan \varkappa \text{n}}{\text{coſ fd}} = \text{ſin} \frac{\text{mn}}{2} = \text{rectae} \frac{\text{mn}}{2}$, quod eſt $\frac{2(\text{ſin } \frac{1}{2} \text{fd})^2 . \tan \varkappa \text{n}}{\text{coſ fd}}$ $= \text{mn}$; quo ſubſtituto, erit

$$\text{ſin } \tfrac{1}{2} \mu = \frac{4 \, (\text{ſin } \frac{1}{2} \text{fd})^4 . (\tan \varkappa \text{n})^2}{(\text{coſ fd})^2} . \frac{1}{2 \cot \varkappa \text{n}} = \frac{2 (\text{ſin } \frac{1}{2} \text{fd})^4 . (\tan \varkappa \text{n})^3}{(\text{coſ fd})^2}.$$

7) Ergo aſſumto aliquo limite, vltra quem baſin extendere nolumus, hoc eſt, arcu maximo, cuius reductio per ſcalam quaeri poſſit; definita erit tangens $\varkappa$n; hinc definiri poterit, ſecundum has formulas, inclinationis ſumma = 2 fd, ad cuius altitudinem aſcendere poteſt ſcala, pro erroris μ, quem nobis permittimus, quantitate. Et vice conuerſa.

§. 19.

Exempla.

I. In ſcala noſtra baſis ad 163 fere gradus extenditur; altitudo ad ſummam 5 graduum. Eſt itaque $\varkappa$n = 81°, 30′; fd = 2°, 30′; quaeritur μ.

Pro radio aſſumto = 1, a logarithmis linearum trigonometricarum ſubtrahendae erunt decem vnitates. Hinc

$$\begin{array}{rl}
\log 2 = & 0{,}3010300 \\
4 \log \text{ſin } (1°, 15') = & -40 + 33{,}3550116 \\
3 \log \tan (81°, 30') = & \underline{-30 + 32{,}4765036} \\
 & -70 + 66{,}1325452 \\
2 \log \text{coſ } (2°, 30') = & \underline{-20 + 19{,}9991730} \\
\text{Log ſin } \frac{1}{2} \mu = & -50 + 46{,}1333722 = -10 + 6{,}1333722
\end{array}$$

Ergo $\frac{1}{2} \mu = 56'',9$; hinc $\mu = 113'',8 = 1' + 53'',8$..

Secundum exemplum

Sit g = 80°, p = 30°, q = 20°; erit

I. h = 89°, 49′

II. h = 89°, 28′

III. h = 88°, 38′

Vnde apparet, meam formulam propius accedere ad veritatem: neque me iniuria affeciſſe Mayerum, cum illius ſcalam huic formulae ſuperſtructam eſſe potuiſſe arbitrarer. Poterat autem vir acutiſſimus ipſi ſcalae ſuae remedium adhibere, dum modulum ſcalae ſubſidiariae, cuius ope minutorum numeri ex principali colliguntur, quaeque, iuxta formulam, hos numeros ſemper exhibitura fuiſſet paullo, quam debebat, minores, pro rata parte deminueret. Id quod factum eſſe fere ſuſpicor.

Ceterum Mayeri manu delineatum ſcalae exemplar, tam parum differt a meo, etſi non plane eidem formulae ſuperſtructo, vt non dubitauerim, loco illius, hoc qualecunque meum typis deſcribendum tradere: maxime cum viderem, epigraphen, quam Mayerus vernacula lingua conceperat, latine eſſe reddendam; appendicem vero, quam tabulae meae primariae adieceram, etſi ſeparatim exhibitam, aliquid conferre poſſe, ad conſtruendi modum facilius intelligendum.

Tab. I.

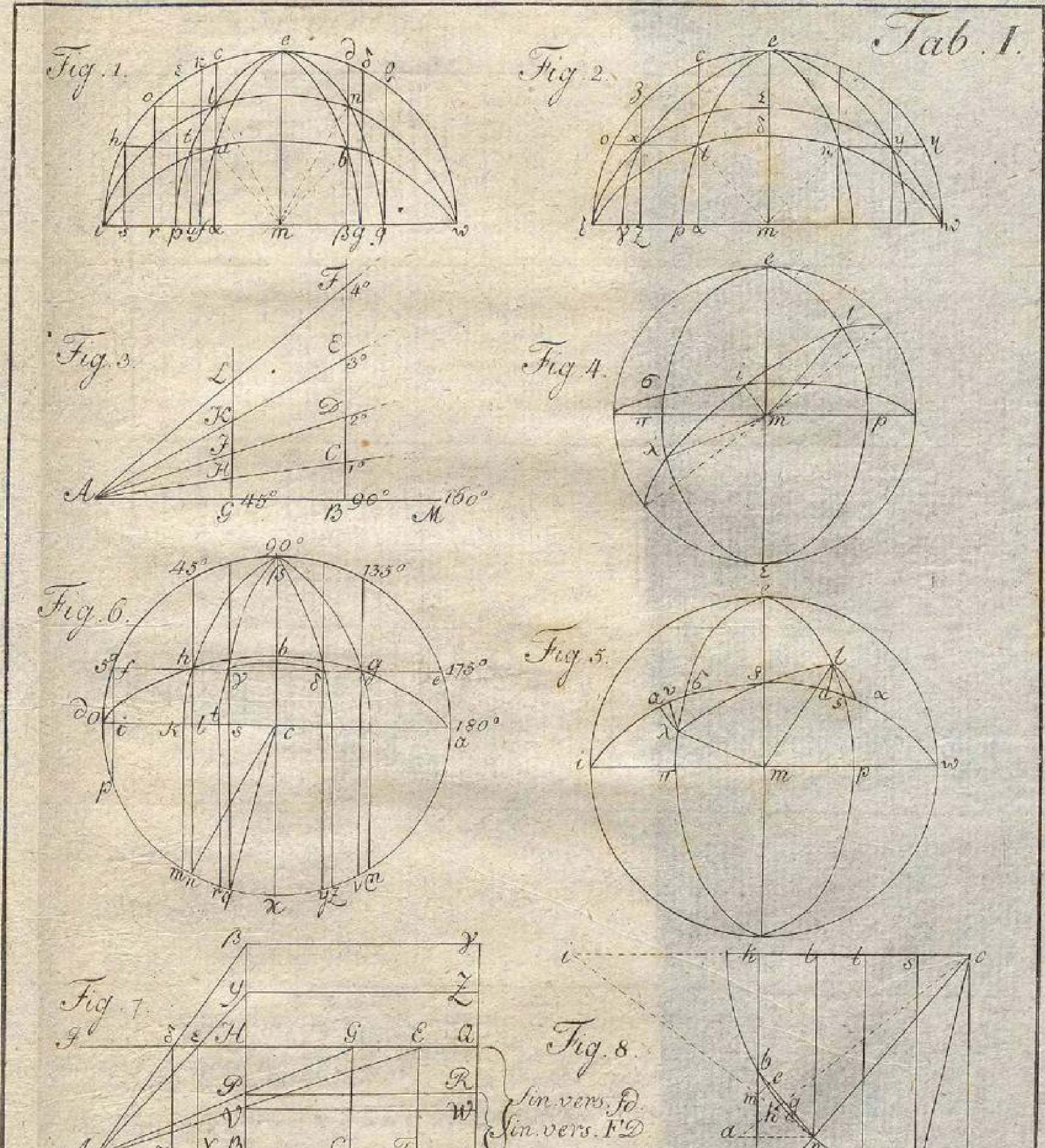
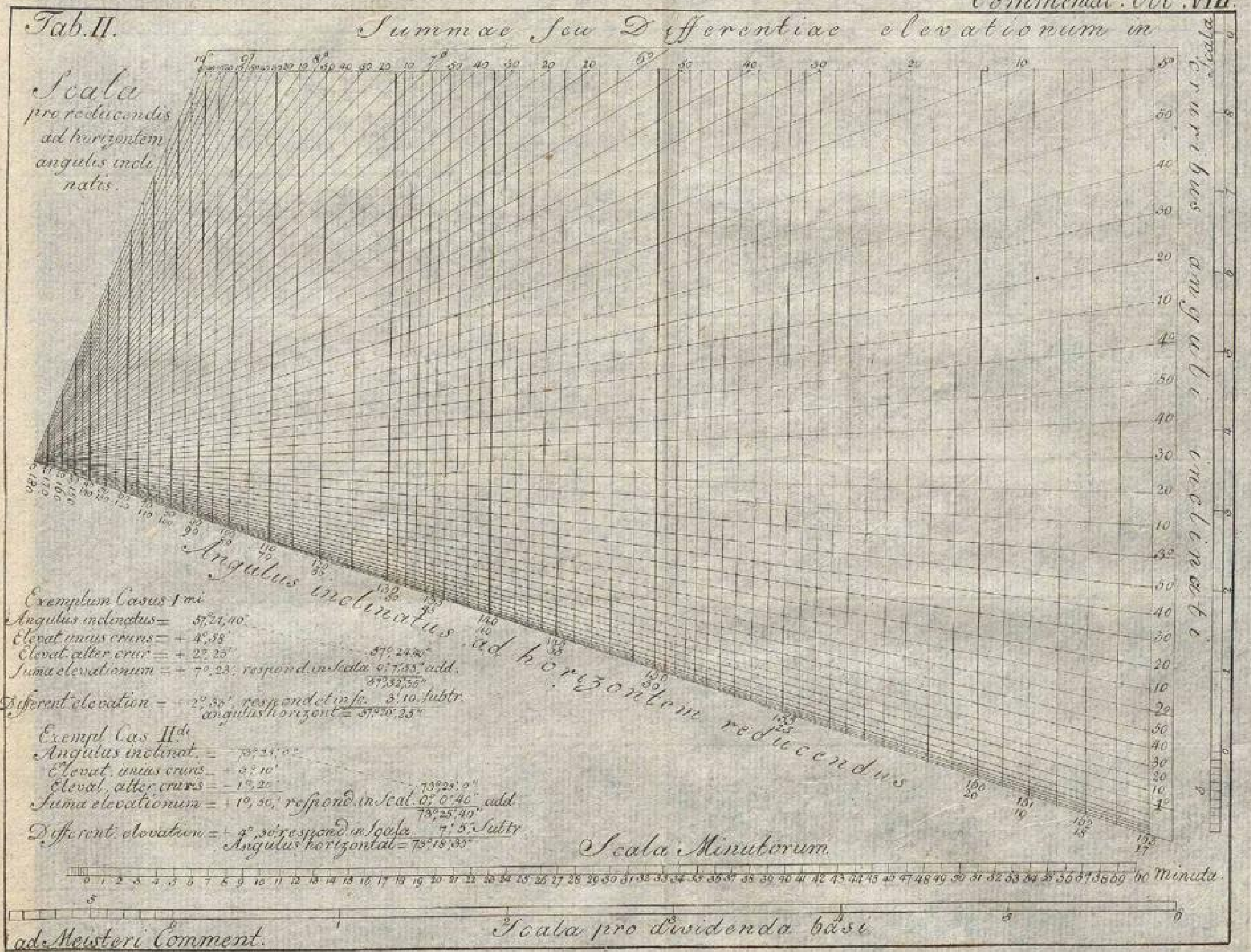
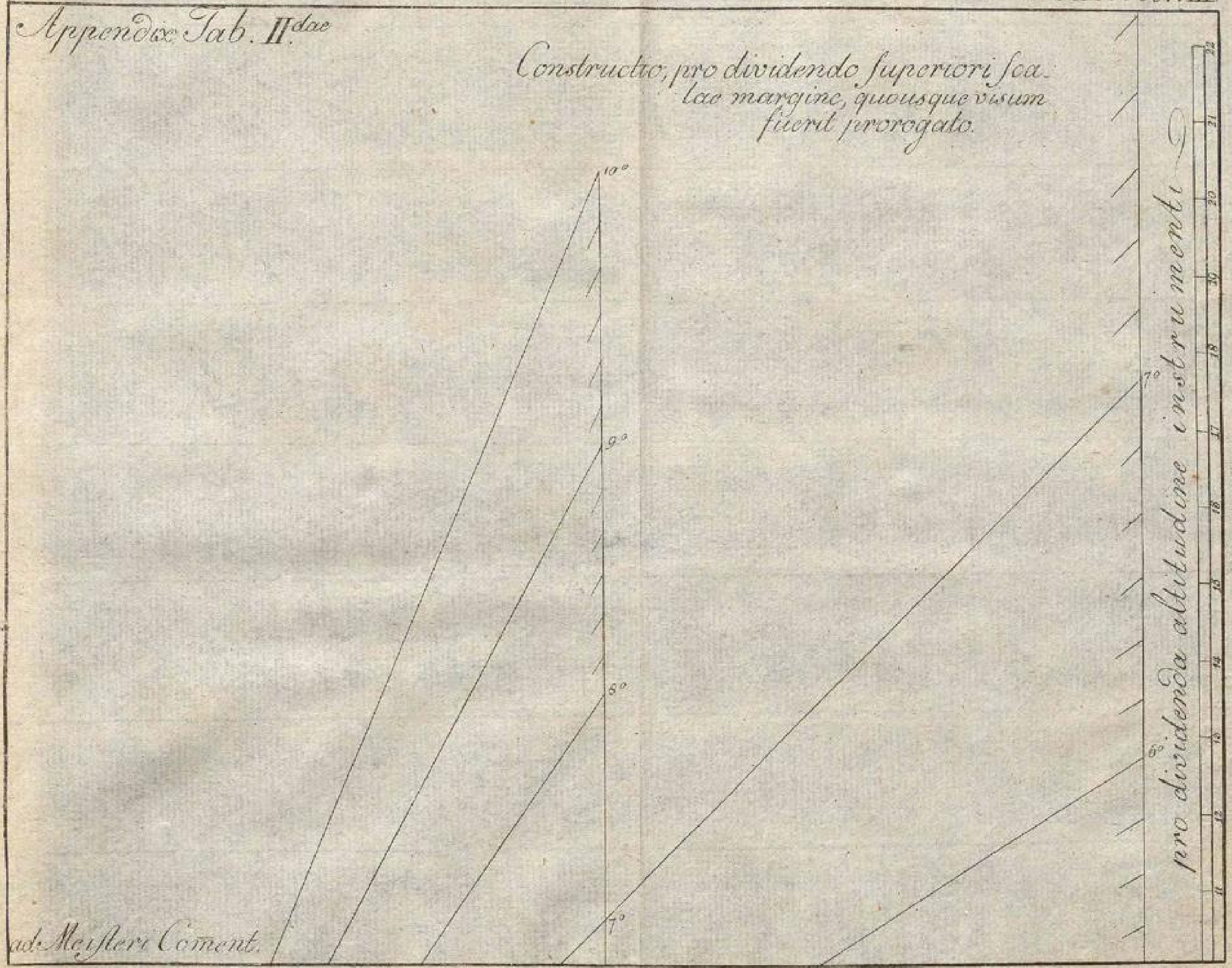
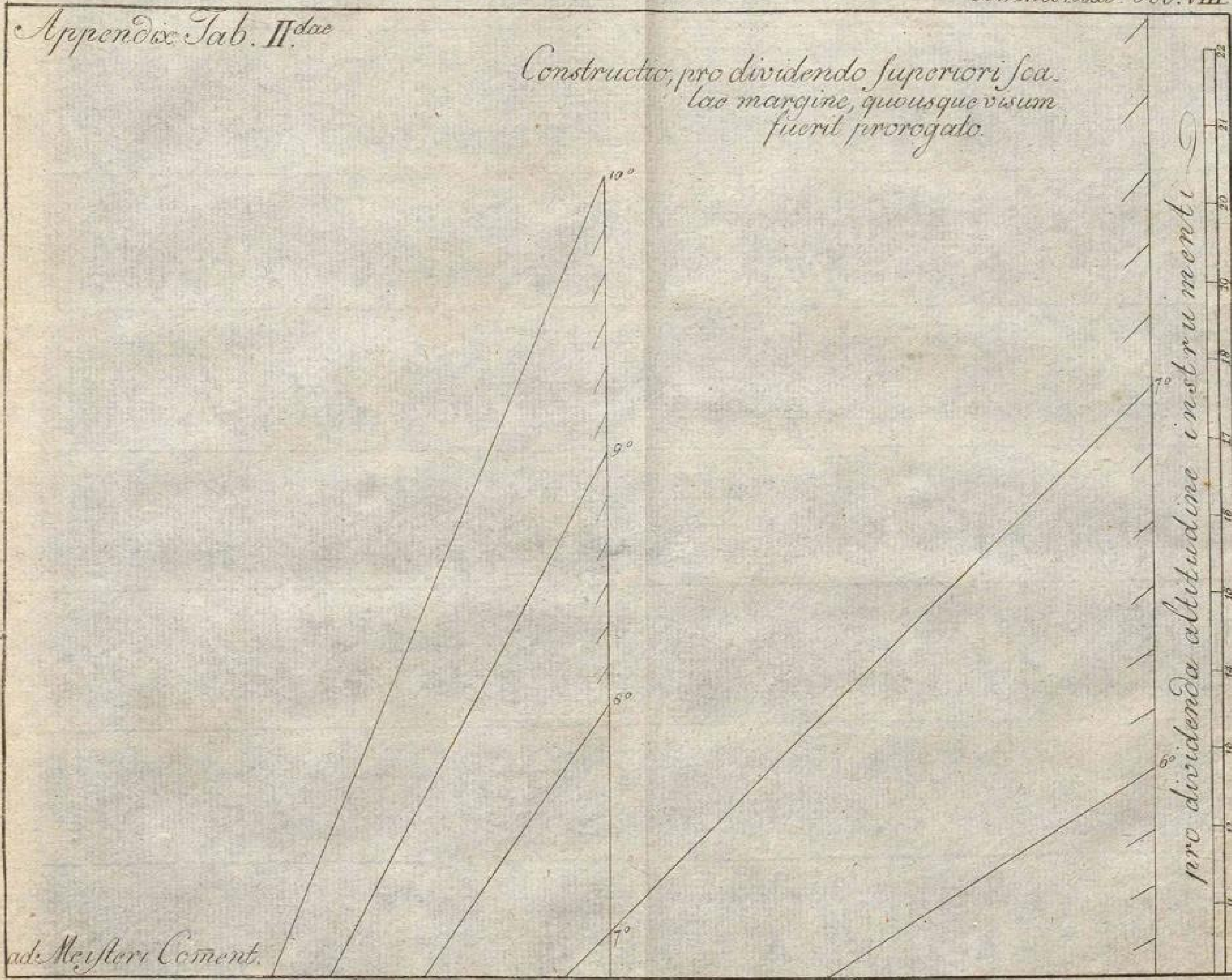


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
45°
90°
180°
135°
175°
Sin. vers. Fd.
Sin. vers. FD.
tang. xn
tang. KN.


Tab. II.
Summae seu Differentiae elevationum in cruribus anguli inclinati
Scala
Scala pro reducendis ad horizontem angulis inclinatis.
Angulus inclinatus ad horizontem reducendus
Exemplum Casus 1mi
Angulus inclinatus = 57°21'40"
Elevat. unius cruris = + 4°58'
Elevat. alter. crur. = + 2°25'
Suma elevationum = + 7°23' respond. in Scala 0°7'55" add.
Different. elevation = + 2°33' respondet in sc. 3'10" subtr.
angulus horizont. = 57°20'25"
Exempl. Cas. IIdi
Angulus inclinat. = 73°25'0"
Elevat. unius cruris = + 0°10'
Eleval. alter. cruris = − 1°20'
Suma elevationum = + 1°30' respond. in Scal. 0°0'40" add.
73°25'40"
Different. elevation = + 4°30' respond. in Scala 7'5" Subtr.
Angulus horizontal. = 73°18'35"
Scala Minutorum
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 Minuta
Scala pro dividenda basi
ad Meisteri Comment.


Appendix Tab. II.dae
Constructio, pro dividendo superiori scalae margine, quousque visum fuerit prorogato.
10°
9°
8°
7°
7°
6°
pro dividenda altitudine instrumenti
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
ad Meisteri Coment.


Appendix Tab. IIdae
Constructio, pro dividendo superiori scalae margine, quousque visum fuerit prorogato.
10°
9°
8°
7°
7°
6°
pro dividenda altitudine instrumenti
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
ad Meisteri Coment.

ATHENAEUM ILLUSTRE

AMSTELODAMENSE.