

Zusammenfassung: Die Bewegungsgleichungen einer autobarotropen Atmosphäre über einem Erdkörper mit beliebig gestalteter Oberfläche werden aufgestellt und durch Operatoren ausgedrückt. Dadurch wird deutlich, dass es sich hier um ein lineares Eigenwertproblem handelt. Von den bekannten Lösungen für die ruhende Erde mit glatter Oberfläche ausgehend, werden mit Hilfe der Störungsrechnung die Abweichungen ermittelt, die durch die Erdrotation und ein den westamerikanischen Kor-dillieren ähnliches Hindernis entstehen. Beim Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie ergibt sich eine qualitative Übereinstimmung.

Summary: The equations of motion in an auto-barotropic atmosphere on an earth with surface-irregularities are formulated and expressed, by means of operators, in terms of a linear eigen-value problem. Starting from the solutions for a non-rotating earth with smooth surface, the theory of perturbations is applied to find the deviations produced by the earth's rotation and by an obstacle corresponding to the cordilleras in western America. The comparison of observational results on tidal atmospheric oscillations with theory shows qualitative agree-ment.

I. Einleitung und Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

1. Beobachtungsergebnisse. Problemstellung.

Bei den sonnentägigen Luftdruckschwankungen hat man im wesentlichen drei pla-netarische Typen sicher nachgewiesen ([1] bis [3]). Bezeichnet man mit λ die geo-graphische Länge östl. Greenwich, ϑ die Poldistanz und t die Weltzeit, so können diese dargestellt werden:

1) halbtägige stehende Welle

$$z_2 = 0,121 P_2^0(\vartheta) \sin(2t + 105^\circ) \text{ mbar } ^2)$$

2) halbtägige wandernde Welle

$$w_2^2 = 1,395 (P_2^2(\vartheta) - 0,140 P_4^2(\vartheta)) \sin(2(t+\lambda) + 154^\circ) \text{ mbar}$$

3) dritteltägige wandernde Welle

$$w_4^3 = 0,293 P_4^3(\vartheta) \sin(3(t+\lambda) + \begin{matrix} 335^\circ \\ 149^\circ \end{matrix}) \text{ mbar } \begin{matrix} \text{Winter} \\ \text{Sommer} \end{matrix}$$

Als mondentägige Luftdruckwelle ist die halbtägige wandernde Welle bekannt ([1] bis [6]). Bei ihr sind Amplitude und Phase weniger regelmässig verteilt als bei der entsprechenden halbsonnentägigen Welle. Die Amplitude beträgt am Äquator etwa 0,060 mbar und in mittleren Breiten 0,015 mbar. Die Phase liegt in der Nähe von 90 Grad, so dass das Druckmaximum mit den Kulminationen fast zusammenfällt.

¹⁾ Die vorliegende Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fa-kultät der Universität Göttingen als Doktordissertation D 7 angenommen.

²⁾ Die $P_n^m(\vartheta)$ sind die nach Ad. SCHMIDT normierten Kugelfunktionen

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n^m(\vartheta) \cos m\lambda]^2 \sin\vartheta d\vartheta d\lambda = \frac{1}{2n+1}$$

Die oben vorkommenden Funktionen sind:

$$P_2^0(\vartheta) = 0,500 (3\cos^2\vartheta - 1)$$

$$P_4^2(\vartheta) = 0,559 \sin^2\vartheta (7\cos^2\vartheta - 1)$$

$$P_2^2(\vartheta) = 0,866 \sin^2\vartheta$$

$$P_4^3(\vartheta) = 2,092 \sin^3\vartheta \cos\vartheta$$

In 45 Grad Breite und Null m Seehöhe ist 1 mbar = 0,75008 mmHg.

Da bei all diesen Wellen die beobachteten Amplituden im Vergleich zu den anregenden Kräften (Gravitationswirkung der Sonne und des Mondes, Temperaturschwankungen) gross sind, so muss man annehmen, dass es sich um Resonanzerscheinungen handelt. Man kann nun zeigen, dass eine autobarotrope Atmosphäre, d.h. eine solche, die sich im konvektiven Gleichgewicht befindet, in erster Näherung die gleichen Schwingungsformen und Perioden besitzt wie ein Wasserozean, der die ganze Erdkugel mit einer Tiefe, die gleich der Skalenhöhe H (Höhe der homogenen Atmosphäre) ist, bedeckt. (vgl. unten p. 4). Die Rechnung liefert für die 3 genannten Schwingungsformen Resonanztiefen von 8,76 km für Z_2 , 7,12 km für W_2^2 und 7,45 km für W_4^3 . Die Resonanztiefen der beiden wandernden Wellen stimmen einigermaßen überein, aber sie weichen um 15% von dem Wert der stehenden Welle ab. Prof. BARTELS vermutete nun ([15] p.11), dass diese Abweichung durch die Nord- und Südamerikanischen Kordilleren bedingt sei, welche die von Osten nach Westen wandernden Wellen stärker behindere als die stehende zonale Schwingung. Den Einfluss eines solchen Gebirges auf die Gezeitenschwingungen der Atmosphäre zu untersuchen, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Bei einer genaueren Betrachtung der geographischen Verteilung der Luftdruckwellen erkennt man den Einfluss der westamerikanischen Kettengebirge auch in verschiedenen anderen Einzelheiten: Die wandernde halbsonnentägige Welle zeigt an der Ostküste einen um 20 Grad grösseren Phasenwinkel als an der Westküste, und zwar ändert sich die Phase sprunghaft über dem Felsengebirge [7]. Die Amplitude wird auch etwas kleiner von Osten nach Westen. Bei der halbmondentägigen Welle dagegen ist in der Phase kein merklicher Unterschied zwischen Ost- und Westküste festzustellen, aber die Amplitude sinkt auf weniger als die Hälfte ihres Betrages an der Ostküste.

2. Analogie zwischen den Gezeiten des Meeres und der Atmosphäre.

Es werden folgende Bezeichnungen gebraucht :

g = Schwerebeschleunigung = $9,81 \text{ m sec}^{-2}$

ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation = $0,729 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$

a = Erdradius = $0,637 \cdot 10^7 \text{ m}$

Ω = Gezeitenpotential

t = Weltzeit

ϕ = Polabstand = 90 Grad - geogr. Breite

λ = Länge (von einem Nullmeridian aus nach Osten positiv)

z = Höhe über einer festen Potentialfläche

$\left. \begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \right\}$ = Geschwindigkeit der Luft nach $\left\{ \begin{array}{l} \text{Süden} \\ \text{Osten} \\ \text{oben (Zenit)} \end{array} \right.$

p = Druck

ρ = Dichte

T = Temperatur

} der Luft

P_0

ρ_0

T_0

beziehen sich auf den Ruhezustand und sollen nur von z abhängig sein.

Dann gelten bei Vernachlässigung kleiner Grössen die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos \phi = -\frac{1}{a\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \phi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos \phi = -\frac{1}{a\rho_0} \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \sin \phi} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

...(1)

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho_0 u \sin \varphi) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho_0 v) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 w) = 0 \quad \dots(2)$$

Die Bewegungsgleichungen sind die linearisierten Eulergleichungen mit Coriolis - gliedern. Insbesondere ist aber in der dritten Gleichung von (1) die Vertikalbeschleunigung $\frac{\partial w}{\partial t}$ gestrichen, so dass nur die statische Grundgleichung übrigbleibt. SOLBERG bezeichnet deshalb diese Näherung als "quasistatisch" und hat selbst für das Meer eine Berechnung ohne diese Vernachlässigung ("Dynamische Theorie") in Angriff genommen ([40], vgl. auch [41]). Es zeigt sich dabei jedoch, dass die Änderungen gegen die quasistatische Theorie bei den schnellen Schwingungen (Periode kleiner als 12 Sternstunden) nicht so erheblich sind. Grosse Unterschiede treten erst bei den langsamen Schwingungen auf. Für solche langsamen Luftdruckschwingungen benutzt deshalb WÜNSCHE [8] das Gleichungssystem der dynamischen Theorie. In der vorliegenden Arbeit gilt aber das Hauptinteresse den schnellen Schwingungen. Deshalb kann die quasistatische Näherung verwandt werden.

Die Tiefe der Erdoberfläche unter der festen Potentialfläche sei $s = s(\varphi, \lambda)$. Es muss an der Erdoberfläche gelten:

$$w(-s) = -u \frac{\partial s}{a \partial \varphi} - v \frac{\partial s}{a \sin \varphi \partial \lambda} \quad \dots(3)$$

Unter der Annahme einer glatten kugelförmigen Erdoberfläche ($s = \text{const}$) ist das Gleichungssystem (1) bis (3) von verschiedenen Verfassern behandelt worden. Allerdings hat man meist noch andere vereinfachende Annahmen gemacht, um es auf das Gleichungssystem, das für die Gezeitenbewegung eines Wasserozeans ($g = \text{const}$) gilt, zurückzuführen. So nahmen MARGULES ([9],[10] vgl. auch [11]) und nach ihm LETTAU [12] eine isotherme Atmosphäre und isotherme Zustandsänderungen an. BARTELS ([15], vgl. auch eine Korrektur in [16] p. 315) zeigte eine Analogie zwischen den Gezeiten der Atmosphäre und des Meeres bei beliebiger Temperaturverteilung und adiabatischen Zustandsänderungen auf. Diese sind wegen der grossen geographischen Ausdehnung der Wellen den wirklichen Verhältnissen besser angepasst als isotherme Zustandsänderungen. Allerdings gilt diese Analogie nur streng, wenn sich die Atmosphäre im konvektiven Gleichgewicht befindet. Für eine solche autobarotrope Atmosphäre gelten die Rechnungen von V. BJERKNES ([17],[18]) und HAURWITZ [19]. LAMB, TAYLOR, PEKERIS, WEEKES und WILKES ([20] bis [28]) und auf anderem Wege SOLBERG [29] suchten sich noch von dieser Beschränkung zu lösen. Ihre Rechnungen werden aber zu umfangreich, um sie auch noch auf den Fall variabler Erdoberfläche zu übertragen. Daher setze ich für diese Rechnungen eine autobarotrope Atmosphäre voraus.¹⁾ Auf alle Fälle kann man an Hand dieser Rechnungen den Einfluss des Gebirges auf die Gezeiten der Atmosphäre qualitativ studieren.

Die Annahme des autobarotropen Zustandes bedeutet, dass $T(z, \varphi, \lambda, t) = T_0(z)$. Aus der Gasgleichung und der statischen Grundgleichung folgt dann

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad \dots(4)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho_0(z-\zeta) \\ p(z) &= p_0(z-\zeta) \end{aligned} \quad \dots(5)$$

¹⁾Hält man an dem Begriff der äquivalenten Höhe auch bei einer anders geschichteten Atmosphäre fest, so kann man in den folgenden Gleichungen H durch die äquivalente Höhe ersetzen.

wobei ζ nicht mehr von z sondern nur noch von t , λ und ϕ abhängt. Da die Änderungen von ϱ und p gegen den Ruhezustand als klein angenommen werden, so kann man entwickeln:

$$\begin{aligned}\varrho(z) &= \varrho_0(z) - \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} \zeta \\ p(z) &= p_0(z) - \frac{\partial p_0}{\partial z} \zeta = p_0(z) + g \varrho_0 \zeta\end{aligned}\quad \dots(6)$$

Diese Ausdrücke werden in (1) eingesetzt.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2 \omega v \cos \phi = - \frac{g}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \quad \dots(7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2 \omega u \cos \phi = - \frac{g}{a \sin \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{1}{a \sin \phi} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} \quad \dots(8)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2) wird

$$- \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} (\varrho_0 u \sin \phi) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varrho_0 v) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} (\varrho_0 w) = 0 \quad \dots(9)$$

Aus (7) und (8) ersieht man, dass u und v unabhängig von z sind. Deshalb kann man die Kontinuitätsgleichung (9) von der Erdoberfläche ($z = -s$) bis zur oberen Grenze der Atmosphäre ($z \rightarrow \infty$) integrieren. Da $\lim_{z \rightarrow \infty} \varrho_0 = 0$ ist, ergibt sich

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \frac{1}{a \sin \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} (u \sin \phi) + \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right\} + u \frac{\partial s}{a \partial \phi} + v \frac{\partial s}{a \sin \phi \partial \lambda} = 0 \quad \dots(10)$$

mit $H = \frac{p_0(-s)}{g \varrho_0(-s)} =$ Skalenhöhe. ... (11)

Die entsprechende Gleichung für einen Wasserozean ist

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{1}{a \sin \phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi} (u \sin \phi) + \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right\} + u \frac{\partial h}{a \partial \phi} + v \frac{\partial h}{a \sin \phi \partial \lambda} = 0 \quad \dots(12)$$

wobei ζ jetzt die Erhebung der freien Oberfläche und h die Tiefe des Ozeans unter der ruhenden Oberfläche bedeutet.¹⁾ Sowohl beim Meere als auch bei der Atmosphäre ist durch Verwendung der statischen Grundgleichung das Problem auf eine zweidimensionale Bewegung zurückgeführt, da w aus den Gleichungen verschwunden ist. Wenn die Bezugsfläche so gewählt werden kann, dass $\frac{s}{H} \ll 1$ ist, so entspricht (10) fast der Kontinuitätsgleichung eines Meeres der Tiefe $h = H \cdot (1 + \frac{s}{H})$, aber die Analogie ist bei variabler Tiefe ($s \neq 0$) nicht mehr völlig. Eine solche wäre ja auch nicht zu erwarten; denn wenn die Gebirge des Untergrundes etwa die Höhe H erreichten ($\frac{s}{H} = -1$), so wäre doch der Einfluss im Wasserozean der Tiefe $h = H \cdot (1 + \frac{s}{H})$ und im Luftozean mit $H = \frac{p_0(-s)}{g \varrho_0(-s)}$ ein ganz verschiedener.

3. Operatoren im Hilbertraum.

Das Gezeitenproblem ist mathematisch ein Eigenwertproblem. Die klassische Berechnung der Gezeiten eines Meeres (LAPLACE), das eine rotierende Kugel mit konstanter Tiefe bedeckt, beruhte auf dem Ansatz einer Potenzreihe mit unbestimmten Koeffizienten. Zur Bestimmung der Koeffizienten erhält man eine Differenzgleichung zweiter Ordnung. Aus dieser kann man mit Hilfe eines unendlichen Kettenbruches die Eigenwerte berechnen. In derselben Weise berechnete auch MARGULES [10] die Gezeiten einer isothermen Atmosphäre. HOUGH ([30], vgl. auch [31]) verbesser-

¹⁾ Beim Wasserozean ist ζ eine viel anschaulichere Grösse als beim Luftozean. In beiden Fällen bestimmt ζ den zeitlich und örtlich veränderlichen Bestandteil des Bodendruckes (vgl. Gl. 6).

te das Kettenbruchverfahren, indem er eine Kugelfunktionsentwicklung statt der Potenzreihenentwicklung ansetzte. Er zeigte auch, dass man mit der gleichen Methode noch den Fall veränderlicher Tiefe behandeln kann, wenn

$$h = a + b \sin^2 \vartheta.$$

Wenn h aber einem allgemeineren Gesetz genügt, so wird die zugehörige Differenzengleichung von höherer als 2. Ordnung, und es lässt sich keine Kettenbruchgleichung mehr bilden. In verschieden gestalteten Meeresteilen und Kanälen hingegen konnte HIDAHA ([71] bis [73]) für einige spezielle Tiefengesetze mit der gleichen Methode Lösungen angeben.

Für beliebig berandete Meere bietet sich vor allem die Integralgleichungsmethode zur Lösung der Gezeitengleichungen an. Mit Hilfe der Greenschen Funktion geht man von den Differentialgleichungen zu einer Integralgleichung zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen über. Diese Behandlungsweise hat den Vorzug, dass die Randbedingungen gleich mit in die Bestimmungsgleichung hereingezogen werden. In dieser Weise wurde das Problem von POINCARÉ [35] und OSEEN [39] in Angriff genommen. Zur Erlangung numerischer Resultate wurde diese Methode allerdings nicht verwandt.

In einer Reihe von Arbeiten ([34], [44] (1950), [58], [59]) wird von den Bewegungsgleichungen zu derjenigen Variationsaufgabe übergegangen, deren Eulergleichungen mit den Bewegungsgleichungen identisch sind, und diese behandelt. Eine wirklich numerische Berechnung der Gezeiten beliebig berandeter Meere und Meeresteile wurde von DOODSON ([55], [56]) und vor allem von HANSEN [60], [61] mit Hilfe eines Differenzenverfahrens durchgeführt.

Für die Lösung der vorliegenden Aufgabe erschien mir von den Verfahren zur Lösung von Eigenwertproblemen die Störungsrechnung¹⁾ am geeignetsten, handelt es sich doch um eine vermutlich kleine Abänderung, die das Kettengebirge an den bekannten Perioden und Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen der atmosphärischen Eigenschwingungen über einer glatten Kugel bewirkt. Die Störungsrechnung wurde schon von ERTEL [65] auf Gezeitenprobleme angewandt. Er benutzte sie zur Berechnung der Seiches in Seen unregelmässiger Gestalt, indem er von den bekannten Lösungen für einen abgeschlossenen Kanal ausging. Zur Anwendung ist erforderlich, dass in der Gleichung des Problems der Eigenwert nur linear auftritt. Dies wird durch die folgende operatorenmässige Darstellung der Bewegungsgleichungen erreicht.

Vor der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen berechnet man zweckmässig die freien Schwingungen, oder mathematisch ausgedrückt: Man löst das homogene Gleichungssystem vor dem inhomogenen. Man setzt in (7) und (8) also $\Omega \equiv 0$. Damit man überhaupt Schwingungen erhält, müssen u, v und ζ periodische Funktionen der Zeit sein. Sie seien von der Zeit abhängig durch den Faktor $e^{i\sigma t}$. Wird nun die Kontinuitätsgleichung (10) noch mit $e^{\frac{1}{2}i\sigma t}$ multipliziert, so kann man (7), (8) und (10) schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma \frac{1}{g} u &= \frac{1}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} - 1 \frac{2\omega}{g} v \cos \vartheta \\ \sigma \frac{1}{g} v &= \frac{1}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + 1 \frac{2\omega}{g} u \cos \vartheta \\ \sigma \frac{1}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} &= \frac{1}{a \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (e^{\frac{1}{2}i\sigma t} u \sin \vartheta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{\frac{1}{2}i\sigma t} v) \right\} \end{aligned} \quad \dots(13)$$

¹⁾ COURANT HILBERT, "Methoden der mathematischen Physik" I. 2. Aufl. p.296-302 Berlin 1931. COLLATZ L. "Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung." p. 305-313 Leipzig 1945.

Dazu kommen noch die Randbedingungen

$$u(\lambda) = u(\lambda + 2\pi) \quad v(\lambda) = v(\lambda + 2\pi) \quad \zeta(\lambda) = \zeta(\lambda + 2\pi) \quad \dots(14)$$

u, v, ζ in den Polen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ endlich

(13) und (14) stellen ein Eigenwertproblem mit den Eigenwerten σ dar. Solche Eigenwertprobleme lassen sich besonders gut diskutieren und lösen, wenn man sich der Sprechweise eines unendlichdimensionalen Funktionen- oder Hilbertraumes bedient.

Es sei

$$e^{\frac{\sigma}{a}} u = \varphi \quad e^{\frac{\sigma}{a}} v = \psi \quad \dots(15)$$

Mit diesen Definitionen werden Vektoren \mathcal{P} eingeführt $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix}$

Die Funktionen φ , ψ und ζ sollen periodisch in λ mit der Periode 2π und über die ganze Kugel quadratisch integrierbar sein. Die Vektoren \mathcal{P} werden wie gewöhnliche Vektoren komponentenweise addiert und mit einem Skalar multipliziert. Weiter werde je zwei Vektoren \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 eine komplexe Zahl $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ zugeordnet, die skalares Produkt heiße, vermöge der Gleichung

$$(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_1^* \varphi_2 + \psi_1^* \psi_2 + \zeta_1^* \zeta_2) \sin \vartheta d\vartheta d\lambda \quad \dots(16)$$

wo φ^* = konjugiert komplexer Wert zu φ

Für dieses skalare Produkt gelten folgende Rechenregeln:

- 1) $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = (\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_1)^*$
- 2) $(\mathcal{P}, \mathcal{P}) \geq 0$ „=“ nur, wenn $\mathcal{P} \equiv 0$... (17)
- 3) $(c_1 \mathcal{P}_1 + c_2 \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}) = c_1^* (\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}) + c_2^* (\mathcal{P}_2, \mathcal{Q})$

Zur Behandlung des Problems (13), (14) werden in diesem Vektorraum folgende Operatoren definiert:

$$L\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{a \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\varphi \sin \vartheta) + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\} \end{pmatrix} \quad W\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -i \frac{2\omega}{g} \cos \vartheta e^{-\frac{\sigma}{a}} \psi \\ +i \frac{2\omega}{g} \cos \vartheta e^{-\frac{\sigma}{a}} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad N\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g} e^{-\frac{\sigma}{a}} \varphi \\ \frac{1}{g} e^{-\frac{\sigma}{a}} \psi \\ \frac{1}{H} e^{\frac{\sigma}{a}} \zeta \end{pmatrix} \quad \dots(18)$$

Diese Operatoren ordnen jedem Vektor des Vektorraumes einen anderen Vektor des Raumes zu. Alle drei Operatoren sind lineare Operatoren, d.h. es gilt für sie

$$L(c_1 \mathcal{P}_1 + c_2 \mathcal{P}_2) = c_1 L\mathcal{P}_1 + c_2 L\mathcal{P}_2 \quad \dots(19)^1$$

und ausserdem sind sie hermitesch, d.h. es gilt für alle \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 aus ihrem Definitionsbereich

$$(\mathcal{P}_1, L\mathcal{P}_2) = (L\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \quad \dots(20)^1$$

Beweis:

$$(\mathcal{P}_1, L\mathcal{P}_2) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \varphi_1^* \frac{1}{a} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \vartheta} + \psi_1^* \frac{1}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \zeta_2}{\partial \lambda} + \zeta_1^* \left(\frac{1}{a \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\varphi_2 \sin \vartheta) + \frac{\partial \psi_2}{\partial \lambda} \right] \right) \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \frac{1}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{a} \sin \vartheta \varphi \zeta \right]_0^{2\pi} d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\varphi \sin \vartheta) \zeta d\vartheta d\lambda$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi \frac{1}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \sin \vartheta d\vartheta d\lambda = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{a} \psi \zeta \right]_{-\pi}^{\pi} d\lambda - \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \zeta d\vartheta d\lambda$$

¹⁾ Die Gleichungen (19) und (20) gelten genau so für W und N wie für L.

Wegen dieser Formeln geht $(\mathcal{P}_1, L\mathcal{P}_2)$ durch partielle Integration über in

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{-1}{a \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\varphi_1^* \sin \vartheta) + \frac{\partial \psi_1^*}{\partial \lambda} \right] \zeta_2 - \frac{1}{a} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial \lambda} \zeta_2 - \frac{1}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \zeta_1^*}{\partial \lambda} \psi_2 \right\} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda = -(L\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \quad (1)$$

Für W und N ist der Beweis trivial.

N ist auch noch volldefinit, d.h. $(\mathcal{P}, N\mathcal{P}) > 0$ für alle \mathcal{P} aus dem Definitionsbereich; denn

$$(\mathcal{P}, N\mathcal{P}) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{g} e^{-\frac{z}{H}} \{ |\varphi|^2 + |\psi|^2 \} + \frac{1}{H} e^{\frac{z}{H}} |\zeta|^2 \right] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\lambda > 0 \quad \dots(21)$$

Mit diesen Definitionen kann man das Gleichungssystem (13) schreiben

$$(L + W)\mathcal{P} = \sigma N\mathcal{P} \quad \dots(22)$$

Vektoren \mathcal{P}_n , die dieser Gleichung genügen, nennt man Eigenvektoren und die zugehörigen Werte σ_n Eigenwerte. Aus der Hermitizität folgt, dass alle Eigenwerte σ_n reell sein müssen. Beweis: Es sei $L + W = A$. Dann ist auch A hermitesch und es gilt

$$\sigma_n (\mathcal{P}_n, N\mathcal{P}_n) = (\mathcal{P}_n, A\mathcal{P}_n) = (A\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n) = \sigma_n^* (N\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n) = \sigma_n^* (\mathcal{P}_n, N\mathcal{P}_n)$$

Da $(\mathcal{P}_n, N\mathcal{P}_n) \neq 0$, so ist $\sigma_n = \sigma_n^*$, w.z.b.w. ... (23)²⁾

Für zwei Eigenvektoren \mathcal{P}_n und \mathcal{P}_m , die zu verschiedenen Eigenwerten σ_n bzw. σ_m gehören, wird

$$(\mathcal{P}_n, N\mathcal{P}_m) = 0$$

Beweis:

$$0 = (\mathcal{P}_n, A\mathcal{P}_m) - (A\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m) = (\sigma_m - \sigma_n) (\mathcal{P}_n, N\mathcal{P}_m)$$

Da $\sigma_m \neq \sigma_n$ so folgt die Behauptung. Man sagt: Die Eigenvektoren sind (im verallgemeinerten Sinn) orthogonal zueinander. Da aus

$$A\mathcal{P}_n = \sigma_n N\mathcal{P}_n \quad \text{folgt} \quad A(c\mathcal{P}_n) = \sigma_n N(c\mathcal{P}_n),$$

so sind die Eigenvektoren immer nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Man kann diesen nun so wählen, dass

$$(\mathcal{P}_n, N\mathcal{P}_m) = \delta_{nm} \quad \dots(24)³⁾$$

Die Eigenvektoren sind dann orthogonal und normiert.

Für die Vektoren des Vektorraumes muss ein Entwicklungssatz gelten, wie er im eindimensionalen Funktionenraum gilt: Jeder Vektor \mathcal{P} des Vektorraumes lässt sich entwickeln nach den Eigenvektoren \mathcal{P}_n des Problems (22)⁴⁾

$$\mathcal{P} = \sum_n P_n \mathcal{P}_n \quad \dots(25)$$

1) Um dies zu erreichen, war die Multiplikation der Kontinuitätsgleichung mit $e^{\frac{z}{H}}$ und die Substitution (15) erforderlich.

2) Führt man in das Gleichungssystem (22) auf der linken Seite noch einen Reibungsoperator R ein

$$R\mathcal{P} = \begin{pmatrix} i\kappa e^{-\frac{z}{H}} \varphi \\ i\kappa e^{-\frac{z}{H}} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

so ist das Problem $(A+R)\mathcal{P} = \sigma N\mathcal{P}$ nicht mehr hermitesch, weil R nicht hermitesch ist. Es treten dann nichtreelle Eigenwerte auf, d.h. die Schwingungen sind gedämpft.

3) $\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ 1 & \text{für } n = m \end{cases}$

4) vgl. hierzu [50]

Physikalisch ist dieser Satz evident: Man kann ja irgend einen Anfangszustand in u , v und ζ herstellen, und dieser muss sich dann in freie Schwingungen bzw. Strömungen auflösen. Die Koeffizienten der Entwicklung (25) ergeben sich wegen (24) sofort durch skalare Multiplikation mit p_n zu

$$p_n = (p_n, Np) \quad \dots(26)$$

Entwickelt man nun in den einzelnen Operatoren $e^{\frac{s}{H}} = 1 + \frac{s}{H} + \frac{1}{2!} \left(\frac{s}{H}\right)^2 + \dots$ und ebenso $e^{-\frac{s}{H}}$ und bezeichnet die dadurch entstehenden Teiloperatoren mit $W_0, W_1, W_2 \dots$ bzw. N_0, N_1, N_2, \dots so wird aus (22)

$$(L+W_0+W_1+W_2+\dots)p_n = \sigma_n(N_0+N_1+N_2+\dots)p_n \quad \dots(27)$$

Das Problem

$$Lp_n = \sigma_n N_0 p_n \quad \dots(27a)$$

ist das der ruhenden Erde mit glatter Oberfläche. Die Gleichung

$$(L+W_0)p_n = \sigma_n N_0 p_n \quad \dots(27b)$$

gehört zur rotierenden Erde mit glatter Oberfläche. Die Wellen auf der nichtrotierenden Erde mit variabler Oberfläche endlich werden durch

$$Lp_n = \sigma_n(N_0+N_1+N_2+\dots)p_n \quad \dots(27c)$$

gegeben.

II. Gezeitenschwingungen auf rotierender Erde mit glatter Oberfläche.

In diesem Kapitel soll der Schritt von (27a) zu (27b) durchgeführt werden. Es ist $s(\lambda) \equiv 0$. Da jetzt in den Koeffizienten der Differentialgleichung keine Abhängigkeit von λ mehr steckt, so kann man, um die erste Gleichung von (14) zu befriedigen, ansetzen, dass u , v und ζ von λ durch den Faktor $e^{im\lambda}$ abhängen, wo m eine ganze Zahl ≥ 0 ist. Weiter sei $\cos\delta = \mu$. Dann lauten die Bewegungsgleichungen (13)

$$\begin{aligned} \sigma \frac{1}{g} u &= -\frac{1}{a} \sqrt{1-\mu^2} \frac{d\zeta}{d\mu} & -1 \frac{2\omega}{g} \mu v \\ \sigma \frac{1}{g} v &= -\frac{1}{a} \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} \zeta & +1 \frac{2\omega}{g} \mu u \\ \sigma \frac{1}{H} \zeta &= -\frac{1}{a} \frac{d}{d\mu} (\sqrt{1-\mu^2} u) - \frac{m}{a\sqrt{1-\mu^2}} v \end{aligned} \quad \dots(28)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\sigma Np = Lp + Wp \quad \dots(28a)$$

Hier sind die Operatoren etwas anders definiert als in (18), da es sich in (28) nur um gewöhnliche Differentialgleichungen handelt. Entsprechend verwendet man im Folgenden als inneres Produkt

$$(p_1, p_2) = \int_{-1}^1 (u_1^* u_2 + v_1^* v_2 + \zeta_1^* \zeta_2) d\mu$$

Zunächst sollen jetzt die Lösungen des Problems $Lp = \sigma Np$ aufgestellt werden.

1. Freie Schwingungen und Strömungen auf ruhender Erde.

Ruhende Erde bedeutet $\omega = 0$. Ist $\sigma \neq 0$, so kann man aus den beiden ersten Gleichungen von (28) u und v eliminieren und in die dritte Gleichung einsetzen. Man erhält:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu} \right] - \frac{m^2}{1-\mu^2} \zeta + \frac{\sigma^2 a^2}{gH} \zeta = 0 \quad \dots(29)$$

Setzt man $\frac{\sigma^2 a^2}{gH} = n(n+1)$, so ist dies die Differentialgleichung der Kugelflächen-

funktionen. In der Theorie dieser Funktionen¹⁾ wird gezeigt, dass ξ nur dann den Randbedingungen (14) genügt, wenn n eine ganze Zahl ist. Deshalb hat man als Lösung die diskreten Eigenwerte

$$\sigma_n^{(0)} = \pm \sqrt{n(n+1)} \cdot \sqrt{\frac{gH}{a^2}} \quad 2) \quad \text{Es sei } m' = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ m & \text{für } m > 0 \end{cases}$$

Weil $n(n+1) = (-n-1)(-n)$, kann man die Eigenwerte anordnen

$$\sigma_n^{(0)} = \text{sgn}(n) \cdot \sqrt{n(n+1)} \cdot \sqrt{\frac{gH}{a^2}} \quad n = m', \bar{m}'(m'+1), \bar{m}'(m'+2), \dots \dots (30)$$

Dann ist $\sigma_n^{(0)} = -\sigma_{-n-1}^{(0)}$. Die Eigenfunktionen sind $\xi_n^{(0)} = c P_n^m(\mu) e^{i(\sigma t + m\lambda)}$ ($c = \text{const}$). Für $m = 0$ sind das stehende Schwingungen und für $m > 0$ Wellen, die die Erdkugel umkreisen. Für positives σ laufen die Wellen nach Westen und für negatives σ nach Osten. Da $P_n^m(\mu) = P_{-n-1}^m(\mu)$, so haben die zusammengehörigen west- und ostwärtslaufenden Wellen die gleiche Gestalt. Die zugehörigen Werte von u und v kann man aus den beiden ersten Gleichungen von (28) berechnen und man erhält die normierten Eigenvektoren

$$p_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2n+1}{8}} \begin{pmatrix} \text{sgn}(n) \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \sqrt{g} \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_n^m}{d\mu} \\ \text{sgn}(n) \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \sqrt{g} \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m \\ \sqrt{H} P_n^m \end{pmatrix} \quad n = m', \bar{m}'(m'+1), \bar{m}'(m'+2), \dots \dots (31)^3$$

Ist $\sigma = 0$, so folgt aus (28) $\xi \equiv 0$. Aber u und v brauchen nicht zu verschwinden. Man kann sogar u beliebig wählen etwa

$$u_n^{(0)} = 1 \cdot m \sqrt{1-\mu^2} P_n^m(\mu) \quad n = m', (m'+1), (m'+2), \dots$$

Dann sind die Gleichungen (28) mit $\sigma = 0$ befriedigt, wenn

$$v_n^{(0)} = c \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_n^m}{d\mu}$$

Es gibt also ein System von Luftströmungen ohne Druckänderung. $\sigma = 0$ ist ein unendlichfacher Eigenwert. Die zugehörigen orthogonalen und normierten Eigenvektoren sind

$$q_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2n+1}{4}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \sqrt{g} \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} P_n^m \\ \frac{-1}{\sqrt{n(n+1)}} \sqrt{g} \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_n^m}{d\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = m', (m'+1), (m'+2), \dots \dots (32)$$

Da $p_n^{(0)}$ und $q_n^{(0)}$ zu verschiedenen Eigenwerten gehören, so gilt nach (24) für alle n und k ($p_n^{(0)} \cdot q_k^{(0)} = 0$). Auf Grund des Entwicklungssatzes kann ein beliebiger Vektor p des Vektorraumes in folgender Weise durch die Eigenvektoren dargestellt werden:

$$p = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} p_j p_j^{(0)} + \sum_{j=m'}^{\infty} q_j q_j^{(0)}$$

Der Akzent an dem ersten Summenzeichen soll andeuten, dass die Summe nur über die j zu erstrecken ist, zu denen Eigenwerte existieren. Also werden die Werte $j = 0, \pm 1, \dots, \bar{m}'(m'-1), -m'$ ausgelassen. Es ist $p_n = (p_n^{(0)}, Np)$ und $q_n = (q_n^{(0)}, Np)$.

1) z.B. HOBSON, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge 1931

2) Die zu $\omega = 0$ gehörigen Werte sollen den oberen Index (0) bekommen. Unter $\sqrt{\quad}$ soll immer der positive Wert der Wurzel verstanden werden.

3) Hier und im Folgenden wird zur Abkürzung der Faktor $e^{i(\sigma t + m\lambda)}$ häufig fortgelassen. - Dass im zonalen Fall der Eigenvektor $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fortgelassen wurde, weil er physikalisch sinnlos ist, bedeutet auch mathematisch keinen Fehler, weil er Lösung von $(L+W)p_0 = A p_0 = 0 \cdot p_0$ ist. Es wird nur in dem Teilraum aller Vektoren, die orthogonal auf p_0 stehen, gerechnet. Wenn $(p, Np) = 0$, so folgt auch $(Ap, p_0) = (p, Ap_0) = 0$. Der Teilraum ist also ein invarianter Teilraum für den Operator A .

2. Freie Schwingungen bei Rotation.

Es sollen jetzt mit Hilfe der bekannten Eigenwerte und Eigenvektoren von $L p_n^{(0)} = \sigma_n^{(0)} N p_n^{(0)}$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von $(L+W) p_n = \sigma_n N p_n$ berechnet werden. Man führt nun den Störungsparameter ϵ ein und schreibt

$$(L + \epsilon W) p_n = \sigma_n N p_n$$

$\epsilon = 0$ entspricht dann dem Fall der ruhenden Erde, dem "ungestörten" Problem, und $\epsilon = 1$ dem Fall der rotierenden Erde, dem "gestörten" Problem. Nun nimmt man bei der Störungsrechnung¹⁾ an, dass folgende Entwicklungen existieren und für $\epsilon = 1$ noch konvergieren.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_n^{(0)} + \epsilon \sigma_n^{(1)} + \epsilon^2 \sigma_n^{(2)} + \dots \\ p_n &= p_n^{(0)} + \epsilon p_n^{(1)} + \epsilon^2 p_n^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad \dots(34)$$

Auch p_n soll normiert sein, d.h.

$$\begin{aligned} 1 &= (p_n, N p_n) = ((p_n^{(0)} + \epsilon p_n^{(1)} + \dots + \epsilon^l p_n^{(l)} + \dots), N(p_n^{(0)} + \epsilon p_n^{(1)} + \dots + \epsilon^l p_n^{(l)} + \dots)) \\ &= \underbrace{(p_n^{(0)}, N p_n^{(0)})}_{=1} + \epsilon [(p_n^{(0)}, N p_n^{(1)}) + (p_n^{(1)}, N p_n^{(0)})] + \dots + \epsilon^l [(p_n^{(0)}, N p_n^{(l)}) + \dots + (p_n^{(l)}, N p_n^{(0)})] + \dots \end{aligned} \quad \dots(35)$$

Damit die Normierung für alle ϵ aus $0 \leq \epsilon \leq 1$ gilt, müssen die Koeffizienten von ϵ^l ($l = 1, 2, \dots$) verschwinden. Setzt man die Entwicklungen (34) in (33), so erhält man:

$$(L + \epsilon W)(p_n^{(0)} + \epsilon p_n^{(1)} + \dots) = (\sigma_n^{(0)} + \epsilon \sigma_n^{(1)} + \dots) N(p_n^{(0)} + \epsilon p_n^{(1)} + \dots) \quad \dots(36)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} L p_n^{(0)} - \sigma_n^{(0)} N p_n^{(0)} &= 0 \\ L p_n^{(1)} - \sigma_n^{(0)} N p_n^{(1)} - \sigma_n^{(1)} N p_n^{(0)} - W p_n^{(0)} & \\ \dots & \\ L p_n^{(l)} - \sigma_n^{(0)} N p_n^{(l)} - \sigma_n^{(l)} N p_n^{(0)} - \sigma_n^{(l-1)} N p_n^{(1)} - \dots - \sigma_n^{(1)} N p_n^{(l-1)} - W p_n^{(l-1)} & \end{aligned} \quad \dots(37)$$

Die erste dieser Gleichungen ist von selbst erfüllt. Auf Grund des Entwicklungssatzes kann man ansetzen

$$p_n^{(l)} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{jn}^{(l)} p_j^{(0)} + \sum_{j=n+1}^{\infty} q_{jn}^{(l)} q_j^{(0)} \quad \dots(38)$$

Diese Entwicklung wird in die zweite Gleichung von (37) eingetragen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jn}^{(1)} (L - \sigma_n^{(0)} N) p_j^{(0)} + \sum_{j=n+1}^{\infty} q_{jn}^{(1)} (L - \sigma_n^{(0)} N) q_j^{(0)} = \sigma_n^{(1)} N p_n^{(0)} - W p_n^{(0)} \quad \dots(39)$$

Durch skalare Multiplikation mit $p_k^{(0)}$ erhält man

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jn}^{(1)} (p_k^{(0)}, (L - \sigma_n^{(0)} N) p_j^{(0)}) + \sum_{j=n+1}^{\infty} q_{jn}^{(1)} (p_k^{(0)}, (L - \sigma_n^{(0)} N) q_j^{(0)}) = \sigma_n^{(1)} \delta_{kn} - (p_k^{(0)}, W p_n^{(0)}) \quad \dots(40a)$$

Es werde bezeichnet $d_{kn} = (p_k^{(0)}, W p_n^{(0)})$

Wegen der Hermitizität von L und N und der Orthogonalität der Eigenvektoren erhält man

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jn}^{(1)} (\sigma_k^{(0)} - \sigma_n^{(0)}) \delta_{kj} = \sigma_n^{(1)} \delta_{kn} - d_{kn} \quad \dots(41)$$

Hieraus ergibt sich für $k = n$

$$\sigma_n^{(1)} = d_{nn} \quad \dots(42a)$$

und für $k \neq n$

$$p_{kn}^{(1)} = \frac{d_{kn}}{\sigma_n^{(0)} - \sigma_k^{(0)}} \quad \dots(42b)$$

Aus der Normierungsbedingung (35) folgt 2)

$$p_{nn}^{(1)} = 0 \quad \dots(42c)$$

¹⁾ vgl. die in der Fussnote auf p. 5 angegebene Literatur

²⁾ Genau genommen folgt aus (35) nicht $p_{nn}^{(1)} = 0$, sondern $(p_n^{(0)}, N p_n^{(1)}) + (p_n^{(1)}, N p_n^{(0)}) = p_{nn}^{(1)} + (p_{nn}^{(1)})^* = 2 \operatorname{Re} p_{nn}^{(1)} = 0$. Rellich zeigte aber in Math. Annalen Bd. 117 p. 358ff., dass man ein reguläres Element $\varphi(\epsilon) = \varphi^{(0)} + \epsilon \varphi^{(1)} + \dots$ immer so normieren kann, dass $(\varphi(\epsilon), N \varphi(\epsilon)) = 1$ und $(\varphi^{(0)}, N \varphi^{(0)})$ reell für $n = 1, 2, \dots$

Durch skalare Multiplikation von (39) mit $q_k^{(0)}$ erhält man

$$q_{kn}^{(1)} = \frac{f_{kn}}{\sigma_n^{(0)}} \quad \dots(42d)$$

mit $f_{kn} = (q_k^{(0)}, W p_n^{(0)}) \quad \dots(40b)$

Genau so wie hier bei der ersten Näherung kann man auch die l -te Näherung aus den weiteren Gleichungen von (37) berechnen und erhält,

wenn $g_{kn} = (p_k^{(0)}, W q_n^{(0)}) = (W p_k^{(0)}, q_n^{(0)}) = (f_{nk})^x \quad \dots(40c)$

$$h_{kn} = (q_k^{(0)}, W q_n^{(0)}), \quad \dots(40d)$$

$$\sigma_n^{(l)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{nj} p_{jn}^{(l-1)} + \sum_{j=m'}^{\infty} g_{nj} q_{jn}^{(l-1)} - (\sigma_n^{(l-1)} p_{nn}^{(1)} + \dots + \sigma_n^{(1)} p_{nn}^{(l-1)})$$

$$p_{kn}^{(l)} = \frac{1}{\sigma_n^{(0)} \sigma_k^{(0)}} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} d_{kj} p_{jn}^{(l-1)} + \sum_{j=m'}^{\infty} g_{kj} q_{jn}^{(l-1)} - (\sigma_n^{(l-1)} p_{kn}^{(1)} + \dots + \sigma_n^{(1)} p_{kn}^{(l-1)}) \right\} \quad \text{für } k \neq n$$

$$p_{nn}^{(l)} = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (p_{jn}^{(1)})^x p_{jn}^{(l-1)} + \dots + p_{jn}^{(l-1)x} p_{jn}^{(1)} + \sum_{j=m'}^{\infty} (q_{jn}^{(1)})^x q_{jn}^{(l-1)} + \dots + q_{jn}^{(l-1)x} q_{jn}^{(1)} \right\}$$

$$q_{kn}^{(l)} = \frac{1}{\sigma_n^{(0)}} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{kj} p_{jn}^{(l-1)} + \sum_{j=m'}^{\infty} h_{kj} q_{jn}^{(l-1)} - (\sigma_n^{(l-1)} q_{kn}^{(1)} + \dots + \sigma_n^{(1)} q_{kn}^{(l-1)}) \right\}$$

Zur weiteren Rechnung benötigt man also die Grössen d_{kn} , f_{kn} und h_{kn} . Es sei zunächst k und $n > 0$

$$d_{kn} = (p_k^{(0)}, W p_n^{(0)}) = \sqrt{\frac{2n+1}{8n(n+1)}} \sqrt{\frac{2k+1}{8k(k+1)}} m \cdot 2\omega \left\{ -\int_{-1}^{+1} \mu \frac{dP_k^m}{d\mu} P_n^m d\mu - \int_{-1}^{+1} \mu P_k^m \frac{dP_n^m}{d\mu} d\mu \right\}$$

Nun folgt durch partielle Integration für $m \neq 0$

$$\int_{-1}^{+1} \mu \frac{dP_k^m}{d\mu} P_n^m d\mu = \left[\mu P_k^m P_n^m \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \mu P_k^m \frac{dP_n^m}{d\mu} d\mu - \int_{-1}^{+1} P_k^m P_n^m d\mu$$

Für $m = 0$ ist d_{kn} ohnehin gleich Null. Also ist allgemein

$$d_{kn} = 0 \text{ wenn } k \neq n$$

$$d_{nn} = \frac{m\omega}{n(n+1)}$$

Berücksichtigt man auch negative Indices, so ergibt sich:

$$d_{n,n} = d_{-n-1,-n-1} = \frac{m\omega}{n(n+1)} \quad h_{n,n} = \frac{2m\omega}{n(n+1)} \quad \dots(43a)$$

$$d_{-n-1,n} = d_{n,-n-1} = -d_{nn}$$

$$d_{k,n} = 0 \text{ sonst} \quad h_{k,n} = 0 \text{ sonst}$$

Grössere Schwierigkeiten bereitet die Berechnung von f_{kn} . Es sei zunächst wieder k und $n > 0$

$$f_{kn} = (q_k^{(0)}, W p_n^{(0)}) = \sqrt{\frac{2k+1}{2k(k+1)}} \sqrt{\frac{2n+1}{4n(n+1)}} 2\omega \left\{ -\int_{-1}^{+1} \frac{m^2}{1-\mu^2} \mu P_k^m P_n^m d\mu - \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \frac{dP_k^m}{d\mu} \mu \frac{dP_n^m}{d\mu} d\mu \right\} \dots(44)$$

Man ersieht aus dieser Formel sofort, dass $f_{kn} = f_{nk}$. Da f_{kn} sicher reell ist, so folgt aus (40c), dass $f_{kn} = g_{kn}$, d.h. die Matrix der f_{kn} ist symmetrisch und identisch mit der Matrix der g_{kn} . Nun folgt durch partielle Integration und weiter aus der Differentialgleichung der Kugelfunktionen

$$\int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \frac{dP_k^m}{d\mu} \mu \frac{dP_n^m}{d\mu} d\mu = \left[(1-\mu^2) \frac{dP_k^m}{d\mu} \mu P_n^m \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{d}{d\mu} \left[(1-\mu^2) \frac{dP_k^m}{d\mu} \right] \mu P_n^m d\mu - \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \frac{dP_k^m}{d\mu} P_n^m d\mu$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{m^2}{1-\mu^2} P_k^m \mu P_n^m d\mu + k(k+1) \int_{-1}^{+1} P_k^m \mu P_n^m d\mu - \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \frac{dP_k^m}{d\mu} P_n^m d\mu$$

Daher erhält man, wenn man in (44) die nicht normierten Kugelfunktionen

$$T_n^m = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} P_n^m$$

einführt,

$$f_{kn} = \sqrt{\frac{2k+1}{2k(k+1)} \frac{(k-m)!}{(k+m)!}} \sqrt{\frac{2n+1}{4n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} 2\omega \left\{ -k(k+1) \int_{-1}^{+1} T_k^m \mu T_n^m d\mu + \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) \frac{dT_k^m}{d\mu} T_n^m d\mu \right\} \quad \dots(45)$$

Nun gelten für die zugeordneten Kugelfunktionen folgende Formeln:

$$\mu T_k^m = \frac{1}{2k+1} \left[(k+m) T_{k-1}^m + (k-m+1) T_{k+1}^m \right] \quad \dots(46)$$

$$(1-\mu^2) \frac{d^m T_k^m}{d\mu} = \frac{1}{2k+1} \left[(k+1)(k+m) T_{k-1}^m - k(k-m+1) T_{k+1}^m \right] \quad \dots(47)^1$$

Diese Formeln werden in (45) eingesetzt. Dann ist der Klammerausdruck:

$$\left\{ \right\} = \frac{1}{2k+1} \left[(1-k)(k+1)(k+m) \int_{-1}^1 T_{k-1}^m T_n^m d\mu - (k+2)(k-m+1) \int_{-1}^1 T_{k+1}^m T_n^m d\mu \right]$$

Daher ist $f_{kn} = 0$, wenn $k \neq n-1, n+1$

$$f_{n-1,n} = -\omega \sqrt{\frac{2(n-1)(n+1)(n+m)(n-m)}{n^2(2n-1)(2n+1)}}$$

Wegen der Symmetrie muss gelten $f_{n+1,n} = f_{n,n+1}$. Man erhält daher diesen Wert, wenn man in der obigen Formel n durch $n+1$ ersetzt. Nimmt man auch die Grössen mit negativen Indices hinzu, so erhält man:

$$\begin{aligned} f_{n-1,n} &= -\omega \sqrt{\frac{2(n-1)(n+1)(n+m)(n-m)}{n^2(2n-1)(2n+1)}} \\ f_{n+1,n} &= -\omega \sqrt{\frac{2n(n+2)(n+1+m)(n+1-m)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}} \\ g_{-n-2,n} &= -f_{n+1,n} \quad \text{für } n > 0 \\ g_{-n,n} &= -f_{n-1,n} \quad \text{für } n > 0 \\ f_{kn} &= g_{kn} = 0 \quad \text{sonst} \end{aligned} \quad \dots(43b)$$

Diese Werte werden zur Berechnung der ersten Näherungen benutzt:

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{m\omega}{n(n+1)} \quad \sigma_{-n-1}^{(1)} = \sigma_n^{(1)} \quad \dots(48)$$

Im zonalen Fall ($m = 0$) verschwindet dieses Glied. Dann ist es für beide Wellen, die mit positivem σ und die mit negativem, gleichgültig nach welcher Seite sich die Erde dreht, d.h. σ_n muss eine gerade Funktion von ω sein. Genau so darf die Entwicklung von ζ nach ω nur gerade Potenzen enthalten. Wenn $m \neq 0$, so werden durch dieses Glied die westwärts wandernden Wellen, bei denen das Vorzeichen von σ gleich dem Vorzeichen von ω ist, beschleunigt und die ostwärts wandernden Wellen im gleichen Masse verzögert.

$$p_{-n-1,n}^{(1)} = \frac{-\frac{m\omega}{n(n+1)}}{2\sqrt{n(n+1)} \frac{Hg}{a^2}} \quad p_{n,-n-1}^{(1)} = -p_{-n-1,n}^{(1)}$$

Alle anderen $p_{kn}^{(1)}$ und $p_{k,-n-1}^{(1)}$ verschwinden. Bei den westwärts laufenden Wellen wird hierdurch ζ verkleinert und die Geschwindigkeitskomponenten verstärkt. Bei den ostwärts laufenden Wellen ist es genau umgekehrt.

$$\begin{aligned} q_{n-1,n}^{(1)} &= \frac{-\omega \sqrt{\frac{2(n-1)(n+1)(n+m)(n-m)}{n^2(2n-1)(2n+1)}}}{\sqrt{n(n+1)} \frac{Hg}{a^2}} & q_{n-1,-n-1}^{(1)} &= q_{n-1,n}^{(1)} \\ q_{n+1,n}^{(1)} &= \frac{-\omega \sqrt{\frac{2n(n+2)(n+1+m)(n+1-m)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)}}}{\sqrt{n(n+1)} \frac{Hg}{a^2}} & q_{n+1,-n-1}^{(1)} &= q_{n+1,n}^{(1)} \end{aligned}$$

Alle anderen $q_{kn}^{(1)}$ und $q_{k,-n-1}^{(1)}$ verschwinden. Diese Koeffizienten sind auch bei $m = 0$ vorhanden. Sie wirken ja auch nur in den Geschwindigkeitskomponenten und dienen dazu, die Ausdrücke $-i2\omega p_n^{(0)}$ und $i2\omega q_n^{(0)}$ darzustellen. Weiter ergibt sich

$$\sigma_n^{(2)} = \frac{\omega^2}{\sqrt{n(n+1)} \frac{Hg}{a^2}} \left\{ \frac{m^2}{2n^2(n+1)^2} + 2 \left(\frac{(n-1)(n+1)(n+m)(n-m)}{n^2(2n-1)(2n+1)} + \frac{n(n+2)(n+1+m)(n+1-m)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} \right) \right\} \quad \sigma_{-n-1}^{(2)} = -\sigma_n^{(2)} \quad (49)$$

Das ist im zonalen Fall die erste nicht verschwindende Näherung für $\sigma_n^{(2)}$. (abgese-

1) Herleitung der Gl. (46) und (47) bei HOBSON, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge 1931 p. 108 bzw. 289. Diese Gleichungen gelten auch für unganze k und m .
 2) $\sigma_n^{(0)} + \sigma_n^{(2)}$ ist genau der Wert, den auch HOUGH [30] als Näherungswert aus seiner Gleichung $L_n = 0$ ausrechnet.

hen von $\sigma_n^{(0)}$. Diese zweite Näherung wirkt in der gleichen Richtung wie $\sigma_n^{(0)}$ und bewirkt in allen Fällen eine Beschleunigung der Wellen. Schliesslich sei noch die dritte Näherung angegeben:

$$\sigma_n^{(3)} = \frac{4m\omega^3}{[n(n+1)]^2(2n+1)} \left\{ \frac{(n+1)^2(n+m)(n-m)}{n^2(2n-1)} + \frac{n^2(n+1+m)(n+1-m)}{(n+1)^2(2n+3)} \right\} \sigma_{-n-1}^{(3)} = \sigma_n^{(3)} \quad \dots(50)$$

Die weiteren Näherungen rechnet man numerisch besser gleich nach den angegebenen Formeln. Es handelt sich dann um Multiplikation von unendlichen Matrizen, bei denen aber in jeder Zeile immer nur einige von Null verschiedene Elemente stehen. Es ergeben sich Wellen, bei denen ζ eine gerade Funktion von μ ist, wenn $n - m$ gerade ist, andernfalls ist ζ eine ungerade Funktion.

3. Freie Strömungen bei Rotation.

Es ist $L \varphi_n^{(0)} = ON \varphi_n^{(0)} \quad n = m', m'+1, \dots \quad \dots(51)$

Null ist daher unendlichfacher Eigenwert. Man kann statt dessen auch sagen, es gibt unendlichviele Eigenwerte

$$\tau_n^{(0)} = 0 \quad n = m', m'+1, \dots$$

Aber die zugehörigen Eigenvektoren sind in keiner Weise eindeutig festgelegt. Die $\varphi_n^{(0)}$ waren ja ganz willkürlich gewählt. Genau so gut bilden irgend welche Linearkombinationen

$$\varphi_n^{\circ} = \sum_{j=m'}^{\infty} \gamma_{jn} \varphi_j^{(0)} \quad \dots(52)$$

ein System von Eigenvektoren. Wenn die φ_n° auch ein orthogonales und normiertes System werden sollen, so muss nur

$$(\varphi_n^{\circ}, N \varphi_k^{\circ}) = \sum_{j=m'}^{\infty} \gamma_{jn} \gamma_{jk} = \delta_{nk} \quad \dots(53)$$

Es müssen nun im Folgenden diejenigen φ_n° bestimmt werden, die bei einsetzender Rotation in die Eigenvektoren φ_n des gestörten Systems übergehen. Analog zu (33) wird gesetzt

$$(I + \varepsilon W) \varphi_n = \tau_n N \varphi_n \quad n = m', m'+1, \dots \quad \dots(54)$$

und

$$\tau_n = 0 + \varepsilon \tau_n^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_n^{(2)} + \dots \quad \dots(55)$$

$$\varphi_n = \varphi_n^{\circ} + \varepsilon \varphi_n^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi_n^{(2)} + \dots$$

die φ_n sollen auch normiert sein, d.h.

$$1 = (\varphi_n, N \varphi_n) = (\varphi_n^{\circ}, N \varphi_n^{\circ}) + \varepsilon [(\varphi_n^{\circ}, N \varphi_n^{(1)}) + (\varphi_n^{(1)}, N \varphi_n^{\circ})] + \dots \quad \dots(56)$$

Setzt man (55) in (54) ein, so erhält man, wenn man die Koeffizienten von ε^l

($l = 1, 2, \dots$) gleichsetzt:

$$\begin{aligned} L \varphi_n^{(1)} &= \tau_n^{(1)} \sum_{j=m'}^{\infty} \gamma_{jn} N \varphi_j^{(0)} - \sum_{j=m'}^{\infty} \gamma_{jn} W \varphi_j^{(0)} \\ L \varphi_n^{(2)} &= \tau_n^{(2)} N \varphi_n^{\circ} + \tau_n^{(1)} N \varphi_n^{(1)} - W \varphi_n^{(1)} \\ \dots \\ L \varphi_n^{(l)} &= \tau_n^{(l)} N \varphi_n^{\circ} + \tau_n^{(l-1)} N \varphi_n^{(1)} + \dots + \tau_n^{(1)} N \varphi_n^{(l-1)} - W \varphi_n^{(l-1)} \\ L \varphi_n^{(l+1)} &= \tau_n^{(l+1)} N \varphi_n^{\circ} + \tau_n^{(l)} N \varphi_n^{(1)} + \dots + \tau_n^{(1)} N \varphi_n^{(l)} - W \varphi_n^{(l)} \end{aligned} \quad \dots(57)$$

Auf Grund des Entwicklungssatzes werde gesetzt

$$\varphi_n^{(1)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{jn}^{(1)} \varphi_j^{(0)} + \sum_{j=m'}^{\infty} t_{jn}^{(1)} \varphi_j^{(0)} \quad \dots(58)$$

Diese Entwicklung wird in die erste Gleichung von (57) eingetragen

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{jn}^{(1)} L p_j^{(0)} + \sum_{j=m'}^{+\infty} t_{jn}^{(1)} L q_j^{(0)} = \tau_n^{(1)} \sum_{j=m'}^{+\infty} \gamma_{jn} N q_j^{(0)} - \sum_{j=m'}^{+\infty} \gamma_{jn} W q_j^{(0)} \quad \dots(59)$$

Durch skalare Multiplikation mit $q_k^{(0)}$ erhält man

$$0 = - \sum_{j=m'}^{+\infty} (h_{kj} - \tau_n^{(1)} \delta_{kj}) \gamma_{jn} \quad k = m', m'+1, \dots \quad \dots(60)$$

Das sind unendlich viele lineare homogene Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten γ_{jn} . In unserem Fall vereinfacht sich alles sehr, weil

$$h_{kj} = \delta_{kj} \frac{2\omega m}{k(k+1)} \quad \text{für } k \text{ und } n \geq m'$$

Es gibt nur dann eine Lösung, bei der nicht alle $\gamma_{jn} = 0$ sind, wenn $\tau_n^{(1)}$ einen der Werte h_{kk} annimmt. Setzt man

$$\tau_n^{(1)} = h_{nn} \quad \dots(61a)$$

so folgt aus (60) und (53) $\gamma_{jn} = \delta_{jn}$, d.h. es ist bereits $q_n^{(0)} = q_n^{(0)} \cdot r_{kn}^{(1)}$ erhält man durch skalare Multiplikation von (59) mit $p_k^{(0)}$:

$$r_{kn}^{(1)} = \frac{-g_{kn}}{\sigma_k^{(0)}} \quad \dots(61b)$$

Um auch die $t_{kn}^{(1)}$ berechnen zu können, muss man die zweite Gleichung von (57) benutzen. Darin wird eingesetzt

$$q_n^{(l)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{jn}^{(l)} p_j^{(0)} + \sum_{j=m'}^{+\infty} t_{jn}^{(l)} q_j^{(0)} \quad l = 1, 2, \dots \quad \dots(62)$$

und man erhält durch skalare Multiplikation mit $q_k^{(0)}$ ($k \neq n$)

$$t_{kn}^{(1)} = \frac{1}{\tau_n^{(1)} - \tau_k^{(1)}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{kj} r_{jn}^{(1)} \quad k \neq n^1) \quad \dots(61c)$$

Aus der Normierungsbedingung (56) folgt

$$t_{nn}^{(1)} = 0 \quad \dots(61d)$$

Genau so erhält man die Formeln der l -ten Näherung

$$\begin{aligned} \tau_n^{(l)} &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{nj} r_{jn}^{(l-1)} - (\tau_n^{(l-1)} t_{nn}^{(1)} + \dots + \tau_n^{(2)} t_{nn}^{(l-2)}) \\ r_{kn}^{(l)} &= \frac{-1}{\sigma_k^{(0)}} \left\{ \sum_{j=m'}^{+\infty} \delta_{kj} r_{jn}^{(l-1)} + \sum_{j=m'}^{+\infty} g_{kj} t_{jn}^{(l-1)} - (\tau_n^{(l-1)} r_{kn}^{(1)} + \dots + \tau_n^{(1)} r_{kn}^{(l-1)}) \right\} \\ t_{kn}^{(l)} &= \frac{1}{\tau_n^{(l)} - \tau_k^{(1)}} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{kj} r_{jn}^{(l)} - (\tau_n^{(l)} t_{kn}^{(1)} + \dots + \tau_n^{(2)} t_{kn}^{(l-2)}) \right\} \quad k \neq n \\ t_{nn}^{(l)} &= -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (r_{jn}^{(1)} r_{jn}^{(l-1)} + \dots + r_{jn}^{(l-1)} r_{jn}^{(1)}) + \sum_{j=m'}^{+\infty} (t_{jn}^{(1)} t_{jn}^{(l-1)} + \dots + t_{jn}^{(l-1)} t_{jn}^{(1)}) \right\} \end{aligned}$$

Für die erste Näherung erhält man folgende Ausdrücke

$$\tau_n^{(1)} = \frac{2\omega m}{n(n+1)} \quad \dots(62)$$

Aus den Strömungen der ruhenden Erde entstehen also im nichtzonalen Fall langsam westwärts wandernde Wellen.

$$\begin{aligned} r_{n-1,n}^{(1)} &= \frac{\omega \sqrt{2(n-1)(n+1)(n+m)(n-m)}}{n^2(2n-1)(2n+1)} & r_{-n,n}^{(1)} &= r_{n-1,n}^{(1)} \\ r_{n+1,n}^{(1)} &= \frac{\omega \sqrt{2n(n+2)(n+1+m)(n+1-m)}}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)} & r_{-n-2,n}^{(1)} &= r_{n+1,n}^{(1)} \end{aligned}$$

Alle anderen $r_{kn}^{(1)}$ verschwinden. Diese Koeffizienten bewirken eine Erhebung in ζ , während in den Geschwindigkeitskomponenten keine Änderung gegen die Strömung bei ruhender Erde erfolgt, denn, weil $r_{kn}^{(1)} = r_{-k-1,n}^{(1)}$, fallen die Geschwindigkeitskom-

¹⁾ Diese Formel gilt nur, wenn $\tau_n^{(1)} \neq \tau_k^{(1)}$, das ist der Fall, wenn $m \neq 0$. vgl. p. 15.

ponenten heraus. Auch die $t_{kn}^{(1)}$ Glieder verschwinden, weil

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_{kj} r_{jn}^{(1)} = 0$$

Ebenso wird

$$\tau_n^{(2)} = 0 \quad \dots(63)$$

τ_n muss ja auch eine ungerade Funktion von ω sein, denn bei entgegengesetzter Rotation muss es in seinen negativen Wert übergehen. Ebenso darf ξ in seiner Entwicklung nach ω nur ungerade Potenzen enthalten. Die weiteren Näherungen berechnet man numerisch wieder am besten unmittelbar nach den angegebenen Formeln.

Nun bleibt noch zu untersuchen, was aus den Strömungen $q_n^{(0)}$ im zonalen Fall wird. Nach Gleichung (62) würden dann ja alle $\tau_n^{(1)} = 0$. Tatsächlich spaltet der unendlichfache Eigenwert auch in diesem Fall nicht auf, sondern $\tau = 0$ bleibt auch bei rotierender Erde unendlichfacher Eigenwert. Es wird dann aus den Differentialgleichungen (28)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \sqrt{1-\mu^2} \frac{d\xi}{d\mu} - 1 \frac{2\omega}{g} \mu v &= 0 \\ 1 \frac{2\omega}{g} \mu u &= 0 \\ -\frac{1}{a} \frac{d}{d\mu} (\sqrt{1-\mu^2} u) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(64)$$

Diese Gleichungen verlangen, dass $u \equiv 0$ genau wie bei den Strömungen auf der ruhenden Erde ist. (vgl. Gl. (32)). Genau so wenig wie bei der ruhenden Erde gibt es jetzt bei den Strömungen auf der rotierenden Erde ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem, denn jedes Lösungssystem ist nur bis auf eine unitäre Transformation, d.h. eine solche, wie sie durch die Gleichungen (52) und (53) angegeben wird, bestimmt. Zur Aufstellung eines solchen Lösungssystems scheint es mir nicht zweckmässig zu sein, Kugelfunktionen zu benutzen, denn aus (64) folgt

$$v = -\frac{1}{2\omega} \frac{g}{a} \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} \frac{d\xi}{d\mu}$$

Würde man etwa $\xi = \alpha P_n(\mu)$ setzen, so dürfte man nur gerade Kugelfunktionen zulassen, weil sonst v am Äquator unendlich würde. Es gibt aber auch ungerade Lösungen in μ , nur muss

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\frac{d\xi}{d\mu}}{\mu} < \infty$$

Ein Lösungssystem ist

$$q_n^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ -(n+1) \sqrt{\frac{g}{a^2}} \sqrt{1-\mu^2} \mu^{n-1} \\ 2\omega \sqrt{\frac{a^2}{g}} \mu^{n+1} \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots(65)$$

Nur ist dieses System noch nicht orthogonal und normiert. Aber nach dem Orthogonalisierungsverfahren von Erhard SCHMIDT¹⁾ kann man daraus ein orthogonales, normiertes Vektorensystem q_n herstellen²⁾, wobei man es dann noch so einrichten kann, dass alle Vektoren orthogonal auf p_0 stehen (vgl. Fussnote 3 auf p. 9)

1) vgl. z.B. COLLATZ, „Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung.“ Leipzig 1945 p. 227 ff.

2) Der Unterschied gegen das System der Kugelfunktionen besteht darin, dass hier bei der Orthogonalisierung der Polynome in μ das Polynom ersten Grades ausgeschlossen wird.

4. Erzwungene Schwingungen.

Nachdem die freien Schwingungen berechnet sind, ist es leicht die erzwungenen Schwingungen zu behandeln. Ist $\bar{\xi} = -\frac{\Omega}{g}$ von der Zeit und von λ durch den Faktor $e^{i(\sigma t + m\lambda)}$ abhängig, so kann man die Bewegungsgleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \sqrt{1-\mu^2} \frac{d\zeta}{d\mu} - i \frac{2\omega}{g} \mu v - \sigma \frac{1}{g} u &= -\frac{1}{a} \sqrt{1-\mu^2} \frac{d\bar{\xi}}{d\mu} \\ -\frac{1}{a} \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} \zeta + i \frac{2\omega}{g} \mu u - \sigma \frac{1}{g} v &= -\frac{1}{a} \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} \bar{\xi} \\ -\frac{1}{a} \frac{d}{d\mu} (\sqrt{1-\mu^2} u) - \frac{m}{a \sqrt{1-\mu^2}} v - \sigma \frac{1}{H} \zeta &= 0 \end{aligned} \quad \dots(66)$$

oder in Vektorschreibweise

$$(L + W)\mathcal{P} - \sigma N\mathcal{P} = \mathcal{r} \quad \text{mit} \quad \mathcal{r} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \sqrt{1-\mu^2} \frac{d\bar{\xi}}{d\mu} \\ -\frac{1}{a} \frac{m}{\sqrt{1-\mu^2}} \bar{\xi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man entwickelt \mathcal{P} nach den Eigenvektoren \mathcal{P}_j und \mathcal{Q}_j des Systems mit Rotation:

$$\mathcal{P} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} p_j \mathcal{P}_j + \sum_{j=m}^{\infty} q_j \mathcal{Q}_j \quad \dots(67)$$

Setzt man diese Entwicklung in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} p_j (\sigma_j - \sigma) N \mathcal{P}_j + \sum_{j=m}^{\infty} q_j (\tau_j - \sigma) N \mathcal{Q}_j = \mathcal{r}$$

Skalare Multiplikation mit \mathcal{P}_k bzw \mathcal{Q}_k liefert die Koeffizienten

$$p_k = \frac{(\mathcal{P}_k, \mathcal{r})}{\sigma_k - \sigma} \quad q_k = \frac{(\mathcal{Q}_k, \mathcal{r})}{\tau_k - \sigma} \quad \dots(68)$$

Da das Störpotential gewöhnlich in einer Entwicklung nach Kugelfunktionen vorliegt, so genügt es, den Fall zu behandeln, in dem $\bar{\xi} = P_n^m(\mu)$. Für diesen Fall muss man $(\mathcal{P}_k, \mathcal{r})$ und $(\mathcal{Q}_k, \mathcal{r})$ berechnen. Die Störungsrechnung liefert Entwicklungen

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &= \dots p_{k-2, k} \mathcal{P}_{k-2}^{(o)} + p_{k, k} \mathcal{P}_k^{(o)} + p_{k+2, k} \mathcal{P}_{k+2}^{(o)} + \dots + \dots + q_{k-1, k} \mathcal{Q}_{k-1}^{(o)} + q_{k+1, k} \mathcal{Q}_{k+1}^{(o)} + \dots \\ \mathcal{Q}_k &= \dots + t_{k, k} \mathcal{Q}_k^{(o)} + \dots + \dots + r_{k-1, k} (\mathcal{P}_{k-1}^{(o)} + \mathcal{P}_{-k}^{(o)}) + r_{k+1, k} (\mathcal{P}_{k+1}^{(o)} + \mathcal{P}_{-k-2}^{(o)}) + \dots \end{aligned}$$

Daher ist

$$(\mathcal{P}_k, \mathcal{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} p_{jk}^x (\mathcal{P}_j^{(o)}, \mathcal{r}) + \sum_{j=m}^{\infty} q_{jk}^x (\mathcal{Q}_j^{(o)}, \mathcal{r}) \quad (\mathcal{Q}_k, \mathcal{r}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r_{jk}^x (\mathcal{P}_j^{(o)}, \mathcal{r}) + \sum_{j=m}^{\infty} t_{jk}^x (\mathcal{Q}_j^{(o)}, \mathcal{r}) \quad \dots(69)$$

Man benötigt daher die Ausdrücke

$$(\mathcal{P}_j^{(o)}, \mathcal{r}) = \sqrt{\frac{2j+1}{8j(j+1)}} \sqrt{\frac{g}{a^2}} \left\{ \int_{-1}^1 (1-\mu^2) \frac{dP_j^m}{d\mu} \frac{dP_n^m}{d\mu} d\mu + \int_{-1}^1 \frac{m^2}{1-\mu^2} P_j^m P_n^m d\mu \right\} = \sqrt{\frac{2j+1}{8j(j+1)}} \sqrt{\frac{g}{a^2}} j(j+1) \int_{-1}^1 P_j^m P_n^m d\mu$$

also ist $(\mathcal{P}_j^{(o)}, \mathcal{r}) = 0$, wenn $j \neq n$ und $-n-1$

$$(\mathcal{P}_n^{(o)}, \mathcal{r}) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}} \sqrt{\frac{g}{a^2}} = \sigma_n^{(o)} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)H}} \quad (\mathcal{P}_{-n-1}^{(o)}, \mathcal{r}) = \sigma_{-n-1}^{(o)} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)H}}$$

Weiter ist

$$(\mathcal{Q}_j^{(o)}, \mathcal{r}) = \sqrt{\frac{2j+1}{4j(j+1)}} \sqrt{\frac{g}{a^2}} m \left\{ \int_{-1}^1 P_j^m \frac{dP_n^m}{d\mu} d\mu + \int_{-1}^1 \frac{dP_j^m}{d\mu} P_n^m d\mu \right\} = 0$$

Die Gleichungen (69) vereinfachen sich daher zu

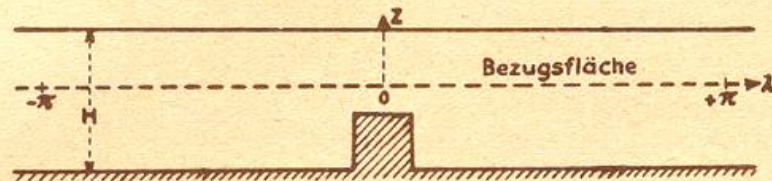
$$(\mathcal{P}_k, \mathcal{r}) = (p_{n, k}^x - p_{-n-1, k}^x) \sigma_n^{(o)} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)H}} \quad (\mathcal{Q}_k, \mathcal{r}) = (r_{n, k}^x - r_{-n-1, k}^x) \sigma_n^{(o)} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)H}} \quad \dots(70)$$

Es wird also durch einen solchen Gezeitenterm $\bar{\xi} = P_n^m(\mu) e^{i(\sigma t + m\lambda)}$ nicht nur eine Schwingung angeregt, sondern alle Schwingungen für die $(\mathcal{P}_k, \mathcal{r}) \neq 0$. Wenn die Erregerfrequenz σ gleich einer der Eigenfrequenzen ist, so genügt es schon, wenn die zugehörige Eigenschwingung die gleiche Eigenschaft der Symmetrie oder Antisymmetrie zum Äquator hat wie die Erregung, um Resonanz zu bewirken. Es braucht sonst gar

nicht der gleiche Typ vorzuliegen. Dies liegt eben daran, dass die Schwingungen bei rotierender Erde sich aus einer unendlichen Reihe von einfachen harmonischen Schwingungen bei ruhender Erde zusammensetzen. Schliesslich kann durch das Zusammenwirken von $p_k^{(0)}$ und $q_k^{(0)}$ Gliedern, die ja im allgemeinen beide angeregt werden, eine Phasenverschiebung gegen die erregende Schwingung entstehen.

III. Der Einfluss der amerikanischen Kettengebirge auf die Gezeitenschwingungen der Atmosphäre.

In diesem Kapitel soll der Schritt von (27b) zu (27) vollzogen werden. Von den vorhandenen Gebirgen soll nur das amerikanische Kettengebirge berücksichtigt werden und dieses durch die Schale eines Kugelkeils¹⁾ mit einem Winkel von 30° und der konstanten Höhe $0,4 H$ (entsprechend $3,2 \text{ km}$ bei $H = 8 \text{ km}$) angenähert werden.



Da nun über die Lage der Bezugsfläche gar nichts vorausgesetzt war, kann man sie mit dem glatten Erdboden zusammenfallen lassen. Der Anfangsmeridian werde in die Mitte des Gebirges gelegt, so dass

$$\frac{s}{H} = \begin{cases} -0,4 & \text{für } -15^\circ < \lambda < +15^\circ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \dots(71)$$

Die Funktion $\frac{s}{H}$ ist zwar jetzt unstetig. Die Unstetigkeit wird aber dadurch beseitigt, dass von der harmonischen Entwicklung von $\frac{s}{H}$ nur endlich viele Glieder berücksichtigt werden. Es zeigt sich bei der Rechnung, dass die höheren Glieder für die hier betrachteten Schwingungen keine Rolle spielen. Die ganzen Rechnungen ändern sich auch nicht wesentlich, wenn man ein anderes Profil, etwa ein aus Parabelstücken zusammengesetztes, zu Grunde legt, nur ist die Rechnung für das rechteckige Profil einfacher.

1. Freie Schwingungen bei eindimensionaler Strömung.

Wie in der Theorie der Meeresgezeiten so kann man sich auch bei den Gezeiten der Atmosphäre schon einen guten Überblick verschaffen, wenn man die Gezeiten berechnet, die in einem "Kanal" entstehen würden, der die Erde längs eines Breitenkreises umschliesst. Zu diesem Zweck wird in (13) $u \equiv 0$ gesetzt und auch die Rotation vernachlässigt ($\omega = 0$). Eliminiert man aus den beiden noch verbleibenden Gleichungen v und setzt $\gamma = -\frac{\sigma^2 a^2 \sin^2 \vartheta}{gH}$, so erhält man

$$\frac{d}{d\lambda} \left(e^{\frac{1}{2}\lambda} \frac{d\zeta}{d\lambda} \right) = \gamma e^{\frac{1}{2}\lambda} \zeta \quad \dots(72)$$

Dies ist mit der Randbedingung

$$\zeta(\lambda) = \zeta(\lambda + 2\pi)$$

ein Eigenwertproblem mit den Eigenwerten γ . Statt des Vektorraumes kann man jetzt einen eindimensionalen Funktionenraum benutzen. Die Elemente sind die periodischen

¹⁾ weniger exakt ein Stück Apfelsinenschale

von $-\pi$ bis $+\pi$ quadratisch integrierbaren Funktionen. Das skalare Produkt wird erklärt durch

$$(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{-\pi}^{+\pi} \zeta_1^* \zeta_2 d\lambda$$

Die zu (72) gehörigen Operatoren sind

$$A\zeta = \frac{d}{d\lambda} \left(e^{\frac{s}{H}} \frac{d\zeta}{d\lambda} \right) \quad \text{und} \quad N\zeta = e^{\frac{s}{H}} \zeta$$

Beide sind wieder hermitesch, wie man durch partielle Integration leicht zeigen kann und N ist auch wieder volldefinit (vgl. p.7). Mit diesen Operatoren kann man (72) schreiben

$$A\zeta = \gamma N\zeta \quad \dots(72a)$$

Alle Folgerungen, die auf p.7 f. für das Problem (22) gezogen waren, gelten auch für diese Gleichung.

Entwickelt man in (72) $e^{\frac{s}{H}}$

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 + \frac{s}{H} + \frac{1}{2!} \left(\frac{s}{H}\right)^2 + \dots\right) \frac{d\zeta}{d\lambda} \right] = \gamma \left(1 + \frac{s}{H} + \frac{1}{2!} \left(\frac{s}{H}\right)^2 + \dots\right) \zeta \quad \dots(72b)$$

und führt ein

$$A_n \zeta = \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{s}{H}\right)^n \frac{d\zeta}{d\lambda} \right] \quad N_n \zeta = \frac{1}{n!} \left(\frac{s}{H}\right)^n \zeta \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

so wird (72):

$$(A_0 + A_1 + A_2 + \dots) \zeta = \gamma (1 + N_1 + N_2 + \dots) \zeta \quad \dots(72c)$$

Die Gleichung

$$A_0 \zeta_n^{(0)} = \frac{d^2 \zeta_n^{(0)}}{d\lambda^2} = \gamma_n^{(0)} \zeta_n^{(0)} \quad \dots(73)$$

stellt das eindimensionale Problem mit glatter Erdoberfläche $s \equiv 0$ dar. Es handelt sich dabei um die gewöhnliche Schwingungsgleichung. Wegen der Randbedingung der Periodizität ist

$$\gamma_n^{(0)} = -n^2 \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots(74)$$

Diese Eigenwerte sind alle doppelt¹⁾, d.h. zu jedem Eigenwert gehören 2 Eigenfunktionen $\zeta_n^{(0)}$ und $\underline{\zeta}_n^{(0)}$. Diese lauten normiert:

$$\begin{aligned} \zeta_n^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\lambda \\ \underline{\zeta}_n^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\lambda \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots(75)$$

Der Entwicklungssatz besagt jetzt nichts anderes als das Fourierretheorem. Jede Funktion ζ des oben angegebenen Funktionenraumes kann nach den Eigenfunktionen $\zeta_n^{(0)}$ und $\underline{\zeta}_n^{(0)}$ entwickelt werden:

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \zeta_n^{(0)} + \underline{c}_n \underline{\zeta}_n^{(0)}) \quad \dots(76)$$

wobei $c_n = (\zeta_n^{(0)}, \zeta)$ und $\underline{c}_n = (\underline{\zeta}_n^{(0)}, \zeta)$

Zur Durchführung der Störungsrechnung wird wieder der Störungsparameter ε eingeführt

$$(A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots) \zeta_n = \gamma_n (1 + \varepsilon N_1 + \varepsilon^2 N_2 + \dots) \zeta_n \quad \dots(77)$$

und angesetzt

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \gamma_n^{(0)} + \varepsilon \gamma_n^{(1)} + \varepsilon^2 \gamma_n^{(2)} + \dots \\ \zeta_n &= \zeta_n^{(0)} + \varepsilon \zeta_n^{(1)} + \varepsilon^2 \zeta_n^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad \dots(78)$$

¹⁾ Der einfache Eigenwert $\gamma_0^{(0)} = 0$ mit der Eigenfunktion $\zeta_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ist wieder ausgelassen, weil er physikalisch keine Bedeutung hat (vgl. Fussnote 3 auf p.9).

Gleichsetzen der Koeffizienten von ϵ^l ($l = 0, 1, 2 \dots$) auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} A_0 \zeta_n^{(0)} - \gamma_n^{(0)} \zeta_n^{(0)} &= 0 \\ A_0 \zeta_n^{(1)} - \gamma_n^{(0)} \zeta_n^{(1)} &= \gamma_n^{(1)} \zeta_n^{(0)} - (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(0)} \\ A_0 \zeta_n^{(2)} - \gamma_n^{(0)} \zeta_n^{(2)} &= \gamma_n^{(2)} \zeta_n^{(0)} - (A_2 - \gamma_n^{(0)} N_1 - \gamma_n^{(0)} N_2) \zeta_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)} \zeta_n^{(1)} - (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(1)} \\ &\dots \end{aligned} \quad \dots(79)$$

Die erste Gleichung von (79) ist von selbst erfüllt. Da aber nun die Eigenwerte $\gamma_n^{(0)}$ alle doppelt sind, so sind genau so gut

$$\begin{aligned} \zeta_n^\oplus &= r_n \zeta_n^{(0)} + s_n \zeta_n^{(1)} \\ \zeta_n^\ominus &= \underline{r}_n \zeta_n^{(0)} + \underline{s}_n \zeta_n^{(1)} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} |r_n|^2 + |s_n|^2 &= |r_n|^2 + |s_n|^2 = 1 \\ r_n^x \underline{r}_n + s_n^x \underline{s}_n &= 0 \end{aligned} \quad \dots(80)$$

orthogonale normierte Lösungen. Weil man nicht vorher entscheiden kann, welche Lösung des ungestörten Problems in die des gestörten übergeht, so muss man in (79) statt $\zeta_n^{(0)}$ die allgemeine Lösung (80) eintragen. Auf Grund des Entwicklungssatzes wird angesetzt

$$\zeta_n^{(l)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jn}^{(l)} \zeta_j^\oplus + b_{jn}^{(l)} \zeta_j^\ominus \quad l = 1, 2, \dots \quad \dots(81)$$

und in die zweite Gleichung von (79) eingesetzt. Skalare Multiplikation mit $\zeta_n^{(0)}$ bzw. $\zeta_n^{(1)}$ ergibt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_n^{(1)} r_n - (\zeta_n^{(0)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(0)}) r_n - (\zeta_n^{(0)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(1)}) s_n \\ 0 &= \gamma_n^{(1)} s_n - (\zeta_n^{(1)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(0)}) r_n - (\zeta_n^{(1)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(1)}) s_n \end{aligned} \quad \dots(82)$$

Es sei

$$\begin{aligned} d_{kn}^{(0)} &= (\zeta_k^{(0)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(0)}) & \underline{d}_{kn}^{(0)} &= (\zeta_k^{(0)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(1)}) \\ \underline{d}_{kn}^{(0)} &= (\zeta_k^{(1)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(0)}) & \underline{d}_{kn}^{(1)} &= (\zeta_k^{(1)}, (A_1 - \gamma_n^{(0)} N_1) \zeta_n^{(1)}) \end{aligned} \quad \dots(83)$$

Damit das homogene Gleichungssystem (82) für r_n und s_n eine von $r_n = s_n = 0$ verschiedene Lösung hat, muss die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_{nn}^{(0)} - \gamma_n^{(1)} & \underline{d}_{nn}^{(0)} \\ \underline{d}_{nn}^{(0)} & \underline{d}_{nn}^{(1)} - \gamma_n^{(1)} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(84)$$

Das ist eine quadratische Gleichung für $\gamma_n^{(1)}$. Ihre Wurzeln seien $\gamma_n^{(1)}$ und $\underline{\gamma}_n^{(1)}$. Sind diese voneinander verschieden, so lassen sich aus (82) und (80) eindeutig r_n, s_n bzw. $\underline{r}_n, \underline{s}_n$ berechnen. Forthin wird immer mit den so bestimmten Grössen ζ_n^\oplus und ζ_n^\ominus weitergerechnet und auch in (83) ζ_k^\oplus statt $\zeta_k^{(0)}$ bzw. ζ_k^\ominus statt $\zeta_k^{(1)}$ eingesetzt und entsprechend $\underline{d}_{kn}^\oplus, \underline{d}_{kn}^\ominus$ usw. geschrieben. Aus (82) und (80) folgt:

$$d_{nn}^\oplus = \gamma_n^{(1)} \quad \underline{d}_{nn}^\oplus = \underline{\gamma}_n^{(1)} \quad d_{nn}^\ominus = \underline{d}_{nn}^\ominus = 0 \quad \dots(85)$$

Genau wie auf p. 10 ergeben sich die weiteren Formeln der Störungsrechnung:

$$\begin{aligned} a_{kn}^{(1)} &= \frac{-d_{kn}^\oplus}{\gamma_k^{(0)} - \gamma_n^{(0)}} & b_{kn}^{(1)} &= \frac{-d_{kn}^\ominus}{\gamma_k^{(0)} - \gamma_n^{(0)}} \quad k \neq n \\ \underline{a}_{kn}^{(1)} &= \frac{-\underline{d}_{kn}^\oplus}{\gamma_k^{(1)} - \gamma_n^{(0)}} & \underline{b}_{kn}^{(1)} &= \frac{-\underline{d}_{kn}^\ominus}{\gamma_k^{(1)} - \gamma_n^{(0)}} \\ a_{nn}^{(1)} &= -\frac{1}{2} (\zeta_n^\oplus, N_1 \zeta_n^\oplus) & b_{nn}^{(1)} &= \frac{1}{\gamma_n^{(0)} - \gamma_n^{(1)}} \left\{ \sum_{j \neq n} (a_{jn}^{(1)} \underline{d}_{nj}^\oplus + b_{jn}^{(1)} \underline{d}_{nj}^\ominus) + \underline{d}_{nn}^{(1)} \right\} \\ \underline{a}_{nn}^{(1)} &= \frac{1}{\gamma_n^{(1)} - \gamma_n^{(1)}} \left\{ \sum_{j \neq n} (\underline{a}_{jn}^{(1)} \underline{d}_{nj}^\oplus + \underline{b}_{jn}^{(1)} \underline{d}_{nj}^\ominus) + \underline{d}_{nn}^{(1)} \right\} & \underline{b}_{nn}^{(1)} &= -\frac{1}{2} (\zeta_n^\ominus, N_1 \zeta_n^\ominus) \end{aligned} \quad \dots(86)$$

wobei

$$d_{kn}^{(1)} = (\zeta_k^{\oplus}, (A_2 - \gamma_n^{(1)} N_1 - \gamma_n^{(0)} N_2) \zeta_n^{\oplus}) \quad \dots(87)$$

und entsprechende Ausdrücke für $d_{kn}^{(1)}$ usw. In der zweiten Näherung gilt

$$\gamma_n^{(2)} = d_{nn}^{(1)} + \sum_{j \neq n} (a_{jn}^{(1)} d_{nj}^{\oplus} + b_{jn}^{(1)} d_{nj}^{\ominus}) \quad \gamma_n^{(2)} = d_{nn}^{(1)} + \sum_{j \neq n} (a_{jn}^{(1)} d_{nj}^{\oplus} + b_{jn}^{(1)} d_{nj}^{\ominus}) \quad \dots(88)$$

Alle diese Formeln gelten nur unter der Voraussetzung, dass (84) zwei verschiedene Wurzeln $\gamma_n^{(1)}$ und $\gamma_n^{(2)}$ hat. Anderenfalls müssten die weiteren Gleichungen von (80) herangezogen werden. Zur Anwendung der Störungsrechnung auf das Kanalproblem ist die Berechnung der Grössen $d_{kn}^{(0)}$, $d_{kn}^{(1)}$ usw. erforderlich:

$$d_{kn}^{(0)} = f_{kn} - \gamma_n^{(0)} g_{kn} \quad \text{wo} \quad f_{kn} = (\zeta_k^{(0)}, A_1 \zeta_n^{(0)}), \quad g_{kn} = (\zeta_k^{(0)}, N_1 \zeta_n^{(0)})$$

Nun ergibt sich durch partielle Integration

$$f_{kn} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos k\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{s}{H} \frac{d \cos n\lambda}{d\lambda} \right) d\lambda = \frac{kn}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{s}{H} \{ \cos(k+n)\lambda - \cos(k-n)\lambda \} d\lambda$$

Es wird jetzt angenommen, dass von $\frac{s}{H}$ eine harmonische Analyse vorliegt:

$$\frac{s}{H} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu\lambda + b_{\nu} \sin \nu\lambda$$

Definiert man darüber hinaus auch für negative Indices:

$$a_{-\nu} = a_{\nu} \quad b_{-\nu} = -b_{\nu} \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots$$

und setzt schliesslich noch $b_0 = 0$, so kann man schreiben

$$f_{kn} = \frac{kn}{2} (a_{k+n} - a_{k-n})$$

Genau so kann man f_{kn} usw. und auch g_{kn} ausdrücken. Mit $\gamma_n^{(0)} = -n^2$ erhält man schliesslich:

$$\begin{aligned} d_{kn}^{(0)} &= \frac{1}{2} \{ kn(a_{k+n} - a_{k-n}) + n^2(a_{k+n} + a_{k-n}) \} \\ d_{kn}^{(0)} &= \frac{1}{2} \{ -kn(a_{k+n} + a_{k-n}) - n^2(a_{k+n} - a_{k-n}) \} \\ d_{kn}^{(0)} &= \frac{1}{2} \{ kn(b_{k+n} - b_{k-n}) + n^2(b_{k+n} + b_{k-n}) \} \\ d_{kn}^{(0)} &= \frac{1}{2} \{ kn(b_{k+n} + b_{k-n}) + n^2(b_{k+n} - b_{k-n}) \} \end{aligned} \quad \dots(89)$$

$\frac{s}{H}$ ist in unserem Fall nach (71) eine gerade Funktion von λ . Deshalb kommen in der Entwicklung nur cos-Glieder vor:

$$\frac{s}{H} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos \nu\lambda$$

Mit den Koeffizienten

$$a_{\nu} = -\frac{0,4}{\pi} \int_{-15^{\circ}}^{+15^{\circ}} \cos \nu\lambda d\lambda = -\frac{0,8}{\nu\pi} \sin(\nu 15^{\circ})$$

Mit diesen Werten wird die Matrix der $d_{kn}^{(0)}$ berechnet. Weil alle $b_{\nu} \equiv 0$, so ist

$d_{kn}^{(0)} = d_{kn}^{(0)} = 0$ für alle k und n . Insbesondere ist also auch $d_{nn}^{(0)} = d_{nn}^{(0)} = 0$ und da - mit

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(1)} &= d_{nn}^{(0)} = -\gamma_n^{(0)} a_{2n} \\ \gamma_n^{(1)} &= d_{nn}^{(0)} = +\gamma_n^{(0)} a_{2n} \end{aligned} \quad \dots(90)$$

Wenn $a_{2n} \neq 0$, wie in dem für die Gezeiten wichtigen Fall $n = 2$, so spaltet γ_n also auf, und es gilt $\zeta_n^{\oplus} = \zeta_n^{(0)}$ und $\zeta_n^{\ominus} = \zeta_n^{(0)}$. Zum Vergleich mit den Beobachtungen interessiert vor allem die Änderung der Resonanztiefe H . Bezeichnet man den für den Kanal ohne Hindernis ausgerechneten Wert der Resonanztiefe mit $H_n^{(0)}$ und den aus der

ersten Näherung für den Kanal mit Hindernis berechneten mit H_n , so ist

$$H_2 \approx H_2^{(0)} (1+a_4) = H_2 (1+0,055) \quad \dots(91)$$

wobei sich das obere Vorzeichen auf γ_2 und das untere auf $\underline{\gamma}_2$ bezieht. Die Resonanztiefe spaltet auf. In der Nachbarschaft der Resonanztiefe des ungestörten Problems gibt es jetzt zwei, eine die kleiner ist als H_2 und eine die grösser ist. Den Beobachtungen entsprechend, käme nur der grössere Wert also $\underline{\gamma}_2$ als Resonanzstelle in Frage.

Die aus (86) berechneten Entwicklungskoeffizienten für die ersten drei Eigenschwingungen sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Alle $b_{kn}^{(1)}$ und $a_{kn}^{(1)}$ verschwinden, so dass ξ_n und $\underline{\xi}_n$ ihre Eigenschaft der Geradheit bzw. Ungeradheit behalten. Überhaupt sind die Abweichungen vom ungestörten Zustand bei diesen Eigenfunktionen niedriger Ordnung äusserst gering.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1,0159\underline{\xi}_1^{(0)} - 0,0191\underline{\xi}_2^{(0)} - 0,0058\underline{\xi}_3^{(0)} - 0,0022\underline{\xi}_4^{(0)} - 0,0007\underline{\xi}_5^{(0)} - 0,0000\underline{\xi}_6^{(0)} + 0,0004\underline{\xi}_7^{(0)} + 0,0005\underline{\xi}_8^{(0)} \\ \underline{\xi}_1 &= 0,9841\underline{\xi}_1^{(0)} + 0,0411\underline{\xi}_2^{(0)} + 0,0217\underline{\xi}_3^{(0)} + 0,0142\underline{\xi}_4^{(0)} + 0,0099\underline{\xi}_5^{(0)} + 0,0070\underline{\xi}_6^{(0)} + 0,0050\underline{\xi}_7^{(0)} + 0,0032\underline{\xi}_8^{(0)} \\ \xi_2 &= 0,0822\underline{\xi}_1^{(0)} + 1,0138\underline{\xi}_2^{(0)} - 0,0360\underline{\xi}_3^{(0)} - 0,0107\underline{\xi}_4^{(0)} - 0,0031\underline{\xi}_5^{(0)} - 0,0000\underline{\xi}_6^{(0)} + 0,0014\underline{\xi}_7^{(0)} + 0,0021\underline{\xi}_8^{(0)} \\ \underline{\xi}_2 &= -0,0382\underline{\xi}_1^{(0)} + 0,9862\underline{\xi}_2^{(0)} + 0,0624\underline{\xi}_3^{(0)} + 0,0319\underline{\xi}_4^{(0)} + 0,0203\underline{\xi}_5^{(0)} + 0,0138\underline{\xi}_6^{(0)} + 0,0095\underline{\xi}_7^{(0)} + 0,0064\underline{\xi}_8^{(0)} \\ \xi_3 &= 0,0651\underline{\xi}_1^{(0)} + 0,0936\underline{\xi}_2^{(0)} + 1,0107\underline{\xi}_3^{(0)} - 0,0386\underline{\xi}_4^{(0)} - 0,0088\underline{\xi}_5^{(0)} - 0,0001\underline{\xi}_6^{(0)} + 0,0034\underline{\xi}_7^{(0)} + 0,0049\underline{\xi}_8^{(0)} \\ \underline{\xi}_3 &= -0,0174\underline{\xi}_1^{(0)} - 0,0540\underline{\xi}_2^{(0)} + 0,9893\underline{\xi}_3^{(0)} + 0,0669\underline{\xi}_4^{(0)} + 0,0327\underline{\xi}_5^{(0)} + 0,0201\underline{\xi}_6^{(0)} + 0,0131\underline{\xi}_7^{(0)} + 0,0086\underline{\xi}_8^{(0)} \end{aligned}$$

Tabelle 1

Die Störglieder zweiter Ordnung ergeben sich zu

$$\gamma_2^{(2)} = +0,055 \qquad \underline{\gamma}_2^{(2)} = -0,033$$

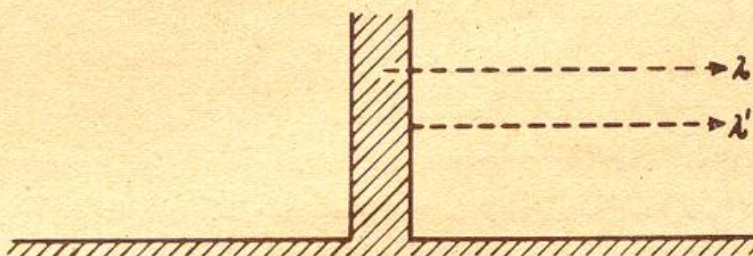
Zusammenfassend sind also die Eigenwerte der zweiten Eigenschwingung

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \gamma_2^{(0)} + \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} = -4,00 - 0,22 + 0,06 = -4,16 \\ \underline{\gamma}_2 &= \underline{\gamma}_2^{(0)} + \underline{\gamma}_2^{(1)} + \underline{\gamma}_2^{(2)} = -4,00 + 0,22 - 0,03 = -3,81 \end{aligned} \quad \dots(92)$$

Das Störglied zweiter Ordnung bewirkt, dass $|\gamma_2|$ nicht ganz so stark vergrössert wie $|\underline{\gamma}_2|$ verkleinert wird.

2. Endlicher Kanal als Grenzfall.

Die Ergebnisse dieser Rechnungen werden verständlicher, wenn man den Grenzfall betrachtet, bei dem die Gebirge bis zur oberen Grenze der Atmosphäre angewachsen sind. Dadurch wird der Kanal endlich. In diesem Fall kann man die Gleichungen des Problems wieder streng lösen: Es werde ein neues Koordinatensystem mit λ' eingeführt. Die Zählung von λ' beginne am Ostrand der Scheidewand (also bei $\lambda = 15^\circ$) und die Einheit sei so gewählt, dass am Westrande ($\lambda = -15^\circ$) $\lambda' = 360^\circ$ wird



Die Transformationsformeln lauten

$$\lambda = \frac{11}{12} \lambda' + 15^\circ \quad \dots(93)$$

$$\lambda' = \frac{12}{11} \lambda - \frac{12}{11} 15^\circ$$

Mit $u \equiv 0$, $\omega = 0$ und $s \equiv 0$ erhält man aus (13) die Differentialgleichungen für die freien Schwingungen

$$\sigma \frac{1}{g} v = \frac{1}{a'} \frac{12}{11} \frac{d\zeta}{d\lambda'}$$

$$\sigma \frac{1}{H} = \frac{1}{a'} \frac{12}{11} \frac{dv}{d\lambda'}$$

wo $a' = a \sin \delta$ gesetzt ist. Elimination von v ergibt:

$$\left(\frac{12}{11}\right)^2 \frac{d^2 \zeta}{d\lambda'^2} = \gamma \zeta \quad \dots(94)$$

An der Wand müssen die Luftteilchen in Ruhe sein, daher hat man die Randbedingung

$$\frac{d\zeta}{d\lambda'} = 0 \quad \text{für } \lambda' = 0^\circ \text{ und } 360^\circ \quad \dots(95)$$

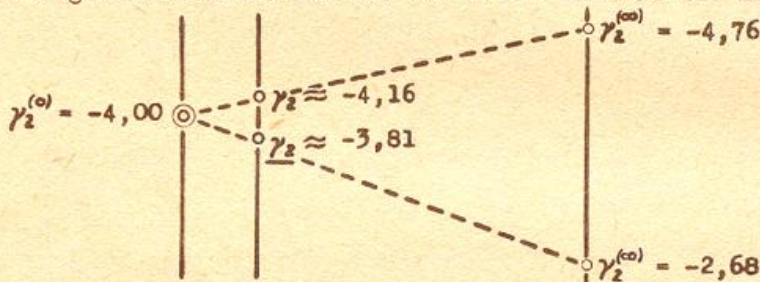
Zu (94) und (95) gehören die einfachen Eigenwerte

$$\gamma_n^{(\infty)} = -\left(\frac{12}{11}n\right)^2 \quad \underline{\gamma}_n^{(\infty)} = -\left(\frac{12}{11} \frac{2n-1}{2}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots(96a)$$

mit den zugehörigen Eigenfunktionen

$$\zeta_n^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\lambda' \quad \underline{\zeta}_n^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{2n-1}{2} \lambda' \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots(96b)$$

Der obere Index (∞) soll andeuten, dass dies die Grenzwerte sind, gegen die die Eigenwerte und Eigenfunktionen streben. Für $n = 2$ hat man die numerischen Werte



Es ist also auch im Grenzwert $\underline{\gamma}_2^{(\infty)}$ weiter von $\gamma_2^{(o)}$ entfernt als $\gamma_2^{(\infty)}$ und daher die Unsymmetrie des Störgliedes zweiter Ordnung verständlich. Ist $H_2^{(\infty)}$ die zu $\underline{\gamma}_2^{(\infty)}$ gehörige Resonanztiefe im Grenzfall, so gilt

$$H_2^{(\infty)} = \frac{4}{2,68} H_2^{(o)} = 1,492 H_2^{(o)}$$

Um nun auch noch die Eigenfunktionen im Grenzfall mit den durch die Störungsrechnung gelieferten Funktionen ζ_2 und $\underline{\zeta}_2$ vergleichen zu können, sollen $\zeta_2^{(\infty)}$ und $\underline{\zeta}_2^{(\infty)}$ nach $\zeta_n^{(o)}$ bzw. $\underline{\zeta}_n^{(o)}$ entwickelt werden. Dazu muss man den Grenzfunktionen in den Intervallen $-15^\circ < \lambda < +15^\circ$ den Wert 1 bzw. Null erteilen. $\zeta_2^{(\infty)}$ ist dann eine gerade und $\underline{\zeta}_2^{(\infty)}$ eine ungerade Funktion von λ , so dass man ansetzen kann

$$\zeta_2^{(\infty)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu 2}^{(\infty)} \zeta_{\nu}^{(o)} \quad \underline{\zeta}_2^{(\infty)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu 2}^{(\infty)} \underline{\zeta}_{\nu}^{(o)}$$

Die Koeffizienten ergeben sich zu

$$a_{\nu 2}^{(\infty)} = (\zeta_{\nu}^{(o)}, \zeta_2^{(\infty)}) = \frac{2}{\pi} \frac{\nu \sin(\nu 15^\circ)}{\left(\frac{24}{11}\right)^2 - \nu^2} + \frac{2}{\nu\pi} \sin(\nu 15^\circ)$$

$$b_{\nu 2}^{(\infty)} = (\underline{\zeta}_{\nu}^{(o)}, \underline{\zeta}_2^{(\infty)}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\nu \cos(\nu 15^\circ)}{\left(\frac{48}{11}\right)^2 - \nu^2}$$

$$\zeta_2^{(\infty)} = 0,209 \zeta_1^{(o)} + 0,996 \zeta_2^{(o)} - 0,169 \zeta_3^{(o)} - 0,059 \zeta_4^{(o)} - 0,028 \zeta_5^{(o)} - 0,016 \zeta_6^{(o)} - 0,012 \zeta_7^{(o)} - 0,006 \zeta_8^{(o)} \quad \dots(96c)$$

$$\underline{\zeta}_2^{(\infty)} = -0,367 \zeta_1^{(o)} + 0,835 \zeta_2^{(o)} + 0,214 \zeta_3^{(o)} + 0,095 \zeta_4^{(o)} + 0,037 \zeta_5^{(o)} - 0,025 \zeta_7^{(o)} - 0,041 \zeta_8^{(o)}$$

Tabelle 2

Diese Zahlen sind vergleichbar mit denen der Tabelle 1, obwohl die Normierungen hier und dort nicht dieselben sind. Man kann aber so aus dem Grenzfall ersehen, in welcher Richtung die Abänderung der Eigenfunktionen erfolgen wird. Dies soll noch einmal durch Abb. 1 veranschaulicht werden. Aus dieser Abbildung ersieht man auch, dass nicht nur der Eigenwert $\gamma_2^{(\infty)}$ durch die Störung stärker beeinflusst wird als $\gamma_2^{(0)}$ sondern auch die Eigenfunktion $\xi_2^{(\infty)}$ wird stärker abgewandelt als $\xi_2^{(0)}$.

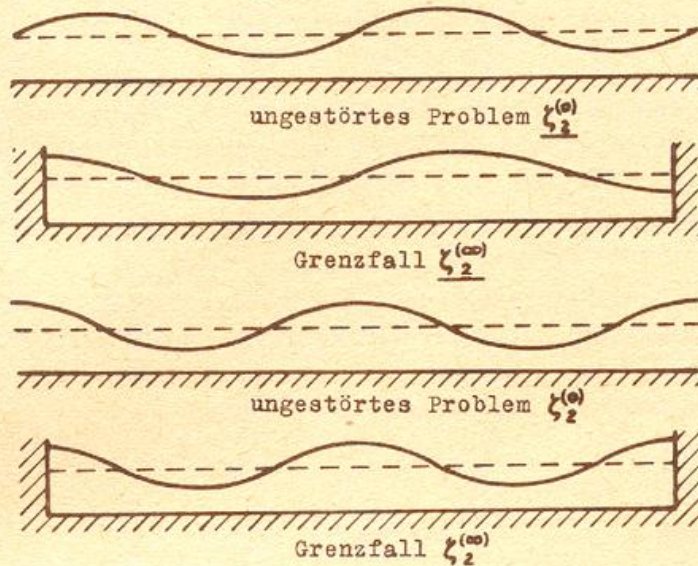


Abb. 1

3. Erzwungene Schwingungen.

Setzt man wieder $\bar{\xi} = -\frac{\sigma a}{g}$ und nimmt an, dass $\bar{\xi}$ von der Zeit abhängig ist durch den Faktor $e^{i\sigma t}$, so erhält man aus (8) und (10) mit den Vernachlässigungen der eindimensionalen Behandlung

$$\sigma \frac{1}{g} v = \frac{1}{a'} \frac{d(\xi - \bar{\xi})}{d\lambda}$$

$$\sigma \frac{1}{H} e^{\frac{H}{a}} \xi = \frac{1}{a'} \frac{d}{d\lambda} (e^{\frac{H}{a}} v)$$

Setzt man nun noch $\xi - \bar{\xi} = \xi'$ und eliminiert v aus den beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{d}{d\lambda} (e^{\frac{H}{a}} \frac{d\xi'}{d\lambda}) = -\frac{\sigma^2 a'^2}{gH} e^{\frac{H}{a}} (\xi' + \bar{\xi})$$

oder in Operatorenschreibweise

$$A \xi' - \gamma N \xi' = \gamma N \bar{\xi} \quad \dots(97)$$

Zur Lösung dieser inhomogenen Gleichung setzt man auf Grund des Entwicklungssatzes an:

$$\xi' = \sum_{\nu=1}^{\infty} (c_{\nu} \xi_{\nu} + \underline{c}_{\nu} \underline{\xi}_{\nu}) \quad \dots(98)$$

Trägt man (98) in (97) ein, so erhält man durch skalare Multiplikation mit ξ_n bzw. $\underline{\xi}_n$

$$c_n = \frac{\gamma}{\gamma_n - \gamma} (\xi_n, N \bar{\xi}) \quad \dots(99)$$

$$\underline{c}_n = \frac{\gamma}{\gamma_n - \gamma} (\underline{\xi}_n, N \bar{\xi})$$

Für die Gezeiten der Atmosphäre ist der Fall wichtig, dass $\bar{\xi}$ eine nach Westen

laufende halbtägige Welle ist

$$\bar{\zeta} = (\zeta_2^{(0)} + i \zeta_2^{(0)}) e^{i2t} \quad \dots(100)$$

Da die Abweichungen der gestörten Eigenfunktionen von den ungestörten sehr klein sind, so kann man näherungsweise setzen

$$\bar{\zeta} = (\zeta_2 + i \zeta_2) e^{i2t}$$

Dann verschwinden alle Entwicklungskoeffizienten ausser

$$c_2 = \frac{\gamma}{\gamma_2 - \gamma} \quad c_2 = \frac{\gamma}{\gamma_2 - \gamma} \quad \dots(101)$$

Diese Koeffizienten werden sehr gross, wenn γ in der Nähe von γ_2 oder $\underline{\gamma_2}$ liegt. Da diese beiden jedoch nicht mehr zusammenfallen, so werden die beiden stehenden Wellen, die zusammen die laufende bilden, nicht in gleichem Masse verstärkt. Man erhält daher bei der Zusammensetzung keine normale laufende Welle, sondern eine solche mit ab- und anschwellender Amplitude.

Um ein mit den Beobachtungen vergleichbares Zahlenbeispiel zu bekommen, wird γ in folgender Weise bestimmt: Wegen der beobachteten Vergrösserung der Resonanzhöhe liegt γ in der Nähe von $\underline{\gamma_2}$. Die Gezeiten sind direkt, also $|\gamma| < |\underline{\gamma_2}|$. Schliesslich ist die beobachtete Resonanzvergrösserung etwa 60fach ($c_2 = 1/60$). Hieraus ergibt sich:

$$\gamma = \frac{60}{61} \underline{\gamma_2} = -3,75$$

Die andere stehende Welle bekommt dann den Koeffizienten

$$c_2 = 9,15$$

Sie wird also nur neunfach vergrössert. Zusammen ist

$$\zeta' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (9,15 \cos(2\lambda) + 60i \sin(2\lambda)) e^{i2t}$$

Für die numerischen Rechnungen wird der Realteil von $\bar{\zeta}$ und ζ' benutzt:

$$\text{Re } \zeta' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (9,15 \cos(2\lambda) \cos(2t) - 60 \sin(2\lambda) \sin(2t))$$

Die Luftdruckwelle an einem Ort λ ist von der Form

$$c \sin(2t + \varepsilon') = c \sin[2(t + \lambda) + \varepsilon]$$

Der Phasenwinkel $\varepsilon' = \varepsilon'(\lambda)$ nach Weltzeit ergibt sich aus

$$\text{tg } \varepsilon' = -\frac{9,15 \cos(2\lambda)}{60 \sin(2\lambda)} = -0,152 \text{ctg}(2\lambda)$$

Weiter kann man dann den Phasenwinkel $\varepsilon(\lambda)$ nach Ortszeit berechnen aus

$$\varepsilon(\lambda) = \varepsilon'(\lambda) - 2\lambda$$

Die Amplitude $c = c(\lambda)$ beträgt

$$c(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(9,15 \cos(2\lambda))^2 + (60 \sin(2\lambda))^2}$$

Das Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 2 dargestellt. Die Pfeile bezeichnen darin den jeweiligen Stand der Sonne. Während eines Umlaufes wächst die Amplitude viermal von 9,15 auf 60 und klingt wieder ab. Durch diese Veränderungen der Amplitude werden auch die Phasenwinkel ε variabel: Beim Anschwellen wird das Maximum an einem Ort erst erreicht, nachdem der Kamm den Ort passiert hat ($\varepsilon > 90^\circ$) und beim Abklingen ist es umgekehrt ($\varepsilon < 90^\circ$). Dieses ist am deutlichsten aus den Periodenuhren¹⁾ in Abb. 3 zu ersehen: Zwischen Ostrand ($\lambda = 15^\circ$) und Westrand ($\lambda = -15^\circ$)

¹⁾ Von jeder Periodenuhr ist immer nur der Zeiger gezeichnet. Der Mittelpunkt jeder Uhr liegt in dem λ -Wert, für den die Uhr gilt.

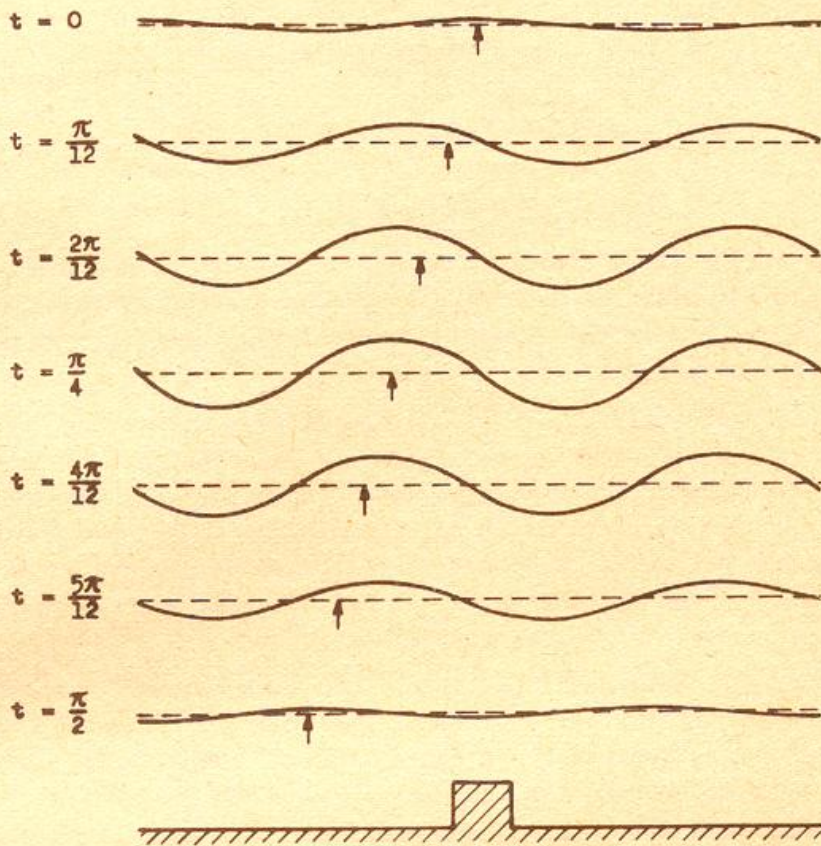
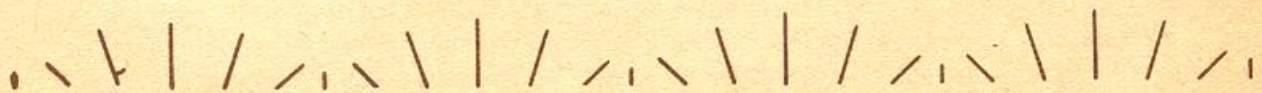


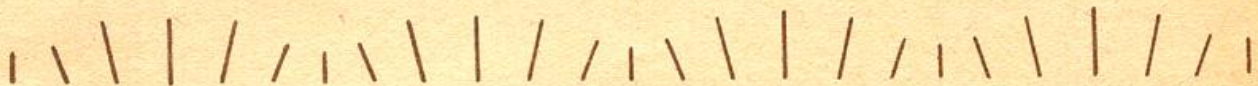
Abb. 2

Erzwungene halbsonnentägige wandernde Welle.

des Gebirges ändert sich der Phasenwinkel von $135^{\circ},2$ auf $44^{\circ},8$. Das ist zwar erheblich mehr, als bei den sonnentägigen Wellen beobachtet wird (vgl. p.2), liegt aber in der richtigen Richtung.



Periodenuhren für die wandernde halbsonnentägige Welle

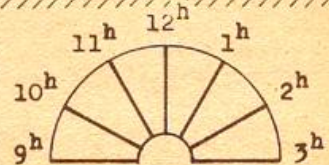


Periodenuhren für die wandernde halbmondentägige Welle
(in 5-mal so grossem Masstab wie oben)



Abb. 3

Schema der Periodenuhren
Relative Einheiten der
Amplituden



In dem unteren Teil der Abb. 3 sind die entsprechenden Periodenuhren für die halbmondentägige Welle gezeichnet. Da

$$1 \text{ Montag} = 1,035 \text{ Sonntag}$$

so gilt

$$\gamma_1 = \frac{1}{(1,035)^2} \gamma_0 = -3,50$$

Mit diesen Werten wird

$$o_2 = 5,30 \quad \underline{o_2} = 1,11,30$$

Die Amplituden sind erheblich kleiner geworden, da γ weiter von den Resonanzstellen entfernt ist. (In der Abb. ist deshalb ein anderer Masstab gewählt) Die örtlichen Unterschiede in Amplituden und Phasen sind nicht mehr so gross. An der Ostseite ist $\epsilon = 111^\circ$ und an der Westseite ist $\epsilon = 69^\circ$.

Bei den Beobachtungen (vgl. p. 2) ist die Amplitudenveränderung beim Mond am ausgeprägtesten und die Phasenänderung bei der Sonne, während nach der Theorie beides bei der Sonne am stärksten und beim Mond etwas schwächer sein müsste. Prof. Bartels erklärt diese Unstimmigkeit durch die Rückwirkung der halbmondentägigen Gezeiten des Meeres und der festen Erde auf die Gezeiten der Lufthülle mit gleicher Periode, während bei den halbsonnentägigen Wellen keine bemerkenswerte Bewegung der Unterlage mit gleicher Periode stattfindet.

Dieses Zahlenbeispiel entspricht qualitativ den Beobachtungen. Quantitativ ist die Vergrößerung von H zu klein (5,5 statt 15%) und die Phasenänderung zu gross (90° statt 20°). Eine Vergrößerung von a_4 würde H vergrössern, aber auch die Phasenänderung noch grösser machen. Die Betrachtung des Grenzfalles legt es nahe, daran zu denken, dass die Verhältnisse sich günstiger gestalten, wenn man höhere Näherungen bei der Störungsrechnung erfassen könnte; denn $\gamma_2^{(oo)}$ ist viel weiter von $\gamma_2^{(o)}$ entfernt als $\gamma_2^{(oo)}$. Entsprechendes wird wohl auch bei $\underline{\gamma_2}$ und γ_2 durch die höheren Näherungen bewirkt werden, wie ja schon $\gamma_2^{(2)}$ zeigt. So ergibt sich eine Vergrößerung von H gegen $H^{(o)}$, ohne dass sich die beiden Resonanzstellen noch weiter auseinander schieben und damit die Phasenänderung vergrössern.

4. Grenzfall auf der Kugel.

Um die Abänderung der Ergebnisse der Kanaltheorie bei den Schwingungen auf der Kugel zu studieren, betrachtet man am einfachsten den Grenzfall eines Lufozeans, der von den beiden Meridianen $\lambda = \pm 15^\circ$ begrenzt wird: Setzt man in den Gleichungen (13) zu diesem Zweck $s \equiv 0$ und zunächst $\omega = 0$, so erhält man bei Elimination von u und v

$$-\frac{\sigma^2 a^2}{gH} \zeta = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda^2} \right\} \quad \dots (102)$$

Genau wie auf p. 22 wird eine neue λ' -Zählung eingeführt, die am Ostrand der Scheidewand beginnt und für $\lambda = -15^\circ$ den Wert $\lambda' = 360^\circ$ ergibt. Dann wird aus (102)

$$\gamma \zeta = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{12}{11} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \lambda'^2}$$

wobei jetzt

$$\gamma = -\frac{\sigma^2 a^2}{gH}$$

v muss an den beiden Meridianen $\lambda = \pm 15^\circ$ verschwinden. Da

$$\sigma \frac{1}{g} v = \frac{1}{a \sin^2 \vartheta} \frac{12}{11} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda'}$$

so heisst die Randbedingung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda'} = 0 \text{ für } \lambda' = 0^\circ \text{ und } 360^\circ \quad \dots(103)$$

Macht man zur Lösung von (102), (103) einen Separationsansatz

$$\zeta = \Lambda(\lambda') \cdot \Theta(\vartheta)$$

so ergeben sich für Λ und Θ die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{d^2 \Lambda}{d\lambda'^2} = -\sigma^2 \Lambda \quad \dots(104)$$

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \gamma \Theta = \frac{(\frac{12}{11} \sigma)^2}{\sin^2 \vartheta} \Theta \quad \dots(105)$$

wobei σ^2 eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet. Aus (104) und (103) folgt

$$\Lambda = \cos(\sigma \lambda') \quad \text{wobei } \sigma = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

Teilt man nun wieder auf

$$\Lambda_m = \cos(m \lambda') \quad \Lambda_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2} \lambda'\right) \quad \text{mit } m = 1, 2, \dots$$

und setzt $m' = \frac{12}{11} \sigma$ und $n'(n'+1) = -\gamma$ dann ist (105) die Differentialgleichung der Kugelfunktionen

$$\Theta = P_{n'}^{m'}(\vartheta)$$

Ihre Lösungen sind nur dann in den Polen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ endlich, wenn $n' - m'$ ganz. Diese Forderung bestimmt die möglichen Werte von n' und damit die Eigenwerte γ_n des Problems. Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich folgende Matrix:

m'	n'				
0	1	2	3	4	0 1)
0,545	0,545	1,545	2,545	3,545	<u>1</u>
1,091	1,091	2,091	3,091	4,091	1
1,636		1,636	2,636	3,636	<u>2</u>
2,182		2,182	3,182	4,182	2
2,727			2,727	3,727	<u>3</u>
3,273			3,273	4,273	3
	1	2	3	4	n
					m

In dieser Tabelle sind die für die Gezeiten der Atmosphäre in Frage kommenden Werte eingerahmt.

Für Sektormeere auf rotierender Kugel sind eine ganze Reihe Berechnungen angestellt worden, aber den Verhältnissen der Ozeane entsprechend für schmalere Sektoren. Jetzt können wir aber von den Ergebnissen des zweiten Kapitels Gebrauch machen. Bei der glatten Erdoberfläche bleibt bei den freien Schwingungen die Phase in λ völlig unbestimmt. Man kann daher über diese so verfügen, wie es oben für die ruhende Erde geschehen ist, und erhält dann als Lösungen Kugelflächenfunktionen von unganzer Ordnung und unganzem Grad. Alle Reihenentwicklungen werden nach diesen Kugelfunktionen vorgenommen. Es ist also immer n' statt n und m' statt m in den Formeln zu setzen. Das geht auch; denn die Formeln (46), (47) gelten auch im

1) Die zonalen Schwingungen sind völlig unabhängig vom Öffnungswinkel des Sektormeeres. Lässt man diesen immer kleiner werden, so erhält man einen Kanal, der aber einen veränderlichen Querschnitt hat. Für diesen gilt auch $\gamma_n = -n(n+1)$, wie man auch direkt zeigen kann.

Fall unganzer n und m . Infolgedessen gelten alle abgeleiteten Formeln auch für den Grenzfall.

Für die numerische Rechnung wurde die dritte Näherung und im zonalen Fall die vierte Näherung verwandt. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 3.

Wellentyp: W_2^0 . Eigenwert σ_2 in Vielfachen von ω als Funktion von H

H in km	bei ruhender Erde mit glatter Oberfl.	bei rotier. Erde mit glatter Oberfl.
6,00	1,289	1,778
7,00	1,392	1,861
8,00	1,490	1,941
8,76	1,558	2,000
9,00	1,578	2,017

Wellentyp: W_2^2 . Eigenwert σ_2 in Vielfachen von ω als Funktion von H

H in km	bei ruhender Erde mit glatter Oberfl.	bei rotier. Erde mit glatter Oberfl.	bei rotier. Erde im Grenzfall
6,00	1,289	1,913	1,886
7,00	1,392	1,993	1,934
7,12	1,404	2,000	1,941
8,00	1,490	2,065	1,987
8,29	1,516	2,085	2,000
9,00	1,578	2,145	2,040

Wellentyp: W_4^3 . Eigenwert σ_4 in Vielfachen von ω als Funktion von H

H in km	bei ruhender Erde mit glatter Oberfl.	bei rotier. Erde mit glatter Oberfl.	bei rotier. Erde im Grenzfall
6,00	2,358	2,762	2,653
7,00	2,545	2,934	2,810
7,45	2,616	3,000	2,875
8,00	2,713	3,085	2,950
8,39	2,788	3,148	3,000
9,00	2,885	3,245	3,087

Tabelle 3

Die wirkliche Resonanztiefe muss zwischen der der glatten Oberfläche und der des Grenzfalles liegen. Das ist für W_2^2 zwischen 7,12 und 8,29 km, für W_4^3 zwischen 7,45 und 8,39 km. Für Z_2 beträgt sie 8,76 km. Es liegt also noch keine Übereinstimmung der Resonanztiefen vor. Aber die Vermutung wird bestätigt, dass die amerikanischen Kettengebirge auf die wandernden Wellen W_2^2 und W_4^3 verzögernd einwirken. Auch die beobachteten örtlichen Phasen- und Amplitudenveränderungen stimmen qualitativ mit der Theorie überein. Quantitativ ist der Einfluss der Kettengebirge auf die Periode stärker und auf Amplitude und Phase schwächer als nach der Theorie zu erwarten wäre. Diese Unterschiede

können auf der Theorie zu Grunde gelegten Annahme einer autobarotropen Atmosphäre sowie den vereinfachenden Annahmen über die Gestalt des Erdkörpers beruhen.

Zum Schluss möchte ich Herrn Prof. Bartels vielmals danken für die Anregung zu dieser Arbeit und für die freundliche Unterstützung bei der Ausführung derselben.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s . ¹⁾

1. Beobachtungsergebnisse der Gezeitenschwingungen der Atmosphäre.

[1] BARTELS, J. "Sonnen- und mondentägige Luftdruckschwankungen." in Hann-Süring, Lehrbuch der Meteorologie 5. Aufl. I, 276-306. Leipzig 1939. [2] BARTELS, J. "Gezeitenschwingungen der Atmosphäre." in Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik 25, I, 163-210. Leipzig 1928. [3] CHAPMAN, S., PRAMANIK, K., and TOPPING, J. "The world wide oscillations of the atmosphere." Gerlands Beitr. Geophys. 33, 246-260 (1931). [4] CHAPMAN, S. "The Lunar Tide in the Earth's Atmosphere." Proc. Roy. Soc. London A 151, 105-117 (1935). [5] CHAPMAN, S. "Tides in the Air." Union Géodésique et Géophysique Internationale, 7. Assemblée Générale Washington, Septembre 1939, Procès-verbaux des séances de l'Association de Météorologie II, 3-40 Bergen 1940. [6] CHAPMAN, S., and TSCHU, K.K. "The lunar tide at twenty-seven stations widely distributed over the globe." Proc. Roy. Soc. London A 195, 310-323 (1948). [7] KLEINSCHMIDT, E. "Über die Ursache der halbtägigen Barometerschwankung und über die mondtägige Wind- und Luftdruckschwankung auf Berggipfeln." Beitr. Phys. fr. Atm. 10, 151-168 (1922).

2. Theorie der Gezeitenschwingungen der Atmosphäre.

[8] WÜNSCHE, W. "Über die Existenz langsamer Luftdruckschwankungen auf der rotierenden Erde." Veröff. Geophys. Inst. Leipzig (2) 11, 153-199 (1938). [9] MARGULES, M. "Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft." Sitzber. Ak. Wien Math. Nat. Kl. Abt. IIa 99, 204-227 (1890). [10] MARGULES, M. "Luftbewegungen in einer rotierenden Sphäroidschale." Sitzber. Ak. Wien Math. Nat. Kl. Abt. IIa 101, 597-626 (1892); 102, 11-56; 1369-1421 (1893). [11] TRABERT, W. "Die Theorie der täglichen Luftdruckschwankung von Margules und die tägliche Oscillation der Luftmassen." Meteorol. Z. 20, 481-501; 544-563 (1903). [12] LETTAU, H. "Theoretische Ableitung und physikalischer Nachweis einer 36tägigen Luftdruckwelle." Veröff. Geophys. Inst. Leipzig (2) 2, 107-167 (1931). [13] CHAPMAN, S. "The semidiurnal oscillation of the atmosphere." Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 50, 165-195 (1924). [14] JEFFREYS, H. "On the dynamics of geostrophic winds." Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 52, 85-104 (1926). [15] BARTELS, J. "Über die atmosphärischen Gezeiten." Abhandl. Preuss. Meteorol. Inst. 8 Nr. 9, 1-51 Berlin 1927. [16] KOSCHMIEDER, H. "Dynamische Meteorologie." 2. Aufl. 384 S. Leipzig 1941. [17] BJERKNES, V. "On quasi static wave motion in barotropic fluid strata." Geofys. Publ. 3 No. 3, 1-24 Kristiana 1923. [18] BJERKNES, V. und J.: SOLBERG, H.; BERGERON, T. "Physikalische Hydrodynamik." 797 S. Berlin 1933. [19] HAURWITZ, B. "The Oscillations of the Atmosphere." Gerlands Beitr. Geophys. 51, 195-233 (1937). [20] LAMB, H. "On atmospheric oscillations." Proc. Roy. Soc. London A 84, 551-572 (1911). [21] LAMB, H. "Hydrodynamics."

¹⁾ Die nicht unmittelbar zum Thema gehörige benutzte Literatur (Math. Lehrbücher und dgl.) ist in Fussnoten angegeben.

6th ed. 738 pages New York 1945. [22] TAYLOR, G.I. "Waves and tides in the atmosphere." Proc. Roy. Soc. London A 126, 169-183 (1930). [23] TAYLOR, G.I. "The Resonance Theory of semidiurnal atmospheric oscillations." Memoires Roy. Meteorol. Soc. 4, 41-52 (1932). [24] TAYLOR, G.I. "The oscillations of the atmosphere." Proc. Roy. Soc. London A 156, 318-326 (1936). [25] PEKERIS, C.L. "Atmospheric oscillations." Proc. Roy. Soc. London A 158, 650-671 (1937). [26] PEKERIS, C.L. "The propagation of a pulse in the atmosphere." Proc. Roy. Soc. London A 171, 434-449 (1939). [27] WEEKES, K., and WILKES, M.V. "Atmospheric oscillations and the resonance theory." Proc. Roy. Soc. London A 192, 80-99 (1947). [28] WILKES, M.V. "Oscillations of the earth's atmosphere." 76 pages Cambridge 1949. [29] SOLBERG, H. "Schwingungen und Wellenbewegungen in einer Atmosphäre mit nach oben abnehmender Temperatur." Astrophys. Norvegia 2, 123-172 (1936).

3. Theorie der Gezeitenschwingungen des Meeres.

[30] HOUGH, S.S. "On the application of harmonic Analysis to the Dynamical theory of the Tides." Philos. Trans. Roy. Soc. London A 189, 201-257 (1897); 191, 139-185 (1898). [31] DARWIN, G.H. und HOUGH, S.S. "Bewegung der Hydrosphäre." Encykl. math. Wissensch. Bd. 6 I B, 3-83 (1908) Leipzig 1925. [32] LOVE, A.E.H. "Notes on the dynamical theory of the tides." Proc. London Math. Soc. (2) 12, 309-314 (1913). [33] JEFFREYS, H. "On the Dynamical Theory of the Tides." Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 1, 244-246 (1925). [34] LOVE, A.E.H. "The application of the method of W. Ritz to the theory of the tides." Proc. 5th Intern. Congress of Math. Cambridge 1913 vol 2, 202-208. [35] POINCARÉ, H. "Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Flutbewegung des Meeres." Math. Vorlesungen an der Univ. Göttingen IV, 11-19 (1910). [36] BRILLOUIN, M. "Marées dynamiques d'un océan compris entre deux parallèles. Loi de profondeur quelconque en latitude et en longitude." Comptes Rendus 189, 5 - 9; 957-961; 1216-1220 (1929). [37] BRILLOUIN, M. "Marées dynamiques avec continents. Loi de profondeur quelconque et attraction du bourrelet." Comptes Rendus 190, 778-781; 840-843; (1930). [38] BRILLOUIN, M. "Les latitudes critiques." Comptes Rendus 194, 801-804 (1932). [39] OSEEN, C.W. "Contributions à la théorie analytique des marées." Arkiv Mat. Astron. Fys. 25 A Nr. 24, 1-39 (1937); 28 A Nr. 10, 1-43 (1942). [40] SOLBERG, H. "Über die freien Schwingungen einer homogenen Flüssigkeitsschicht auf der rotierenden Erde I." Astrophys. Norvegia 1, 237-340 (1936). [41] THORAE, H. "Die Gezeiten in neuer Beleuchtung. (Besonders nach H. Solberg)." Ann. Hydrogr. 64, 381-386 (1936). [42] GOLDSBROUGH, G.R. "The dynamical theory of the tides in a Polar Basin." Proc. London Math. Soc. (2) 14, 31-66 (1915). [43] GOLDSBROUGH, G.R. "The dynamical theory of the tides in a Zonal Ocean." Proc. London Math. Soc. (2) 14, 207-229 (1915). [44] GOLDSBROUGH, G.R. "The tides in oceans on a rotating globe." Proc. Roy. Soc. London A 117, 692-718 (1928); 122, 228-245 (1929); 126, 1-15 (1929) zusammen mit D.C. COLBORNE; 140, 241-253 (1933); 200, 191-200 (1950). [45] COLBORNE, D.C. "The diurnal tide in an ocean bounded by two meridians." Proc. Roy. Soc. London A 131, 38-52 (1931). [46] GOLDSBROUGH, G.R. "The tidal oscillations in rectangular basins." Proc. Roy. Soc. London A 132, 689-701 (1931). [47] TAYLOR, G.I. "Tidal oscillations in Gulfs and Rectangular Basins." Proc. London Math. Soc. (2) 20, 148-181 (1920). [48] PROUDMAN, J. "Limiting forms of long period tides." Proc. London Math. Soc. (2) 13, 273-306 (1914). [49] PROUDMAN, J. and MERCER F.E. "On the Oscillations of a rotating mechanical system of infinite freedom." Proc. London Math. Soc. (2) 27, 1-38 (1928); 28, 102-120 (1928). [50] PROUDMAN, J. and MERCER F.E. "On a general Expansion in the theory of the Tides." Proc. London Math. Soc. (2) 29, 527-536 (1929). [51] PROUDMAN, J. "On the Dynamical Equations of the Tides." Proc. London Math. Soc. (2) 18, 1-68 (1920); 34, 293-304 (1932). [52] PROUDMAN, J. "Note on the free tidal oscillations of a Sea with slow Rotation." Proc. London Math. Soc. (2) 35, 75-82 (1933). [53] PROUDMAN, J. and DOODSON, A.T. "On the Tides in an Ocean bounded by two Meridians on a non-rotating Earth." Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 1, 468-483 (1927). [54] PROUDMAN, J. "The Forced Tides in an Ocean bounded by a Complete Meridian on a Nonrotating Earth." Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 2, 209-213 (1929). [55] PROUDMAN, J. and DOODSON, A.T. "Tides in Oceans bounded by Meridians." Philos. Trans. Roy. Soc. London A 235, 273-342 (1936); 237, 311-373 (1938); 238, 477-512 (1940). [56] DOODSON, A.T. "Application of Numerical Methods of Integration to Tidal Dynamics." Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 1, 541-557 (1927). [57] LORD RAYLEIGH, "Notes concerning tidal oscillations upon a rotating globe." Proc. Roy. Soc. London A 82, 448-464 (1909). [58] HYLLERAAS, E.A. "Über die Schwingungen eines stabil geschichteten, durch Meridiane begrenzten Meeres." Astrophys. Norvegia 3 139-164 (1939); 247-271 (1941) zusammen mit W. ROMBERG. [59] HYLLERAAS, E.A. "On the theory of tidal oscillations in oceans with solid boundaries." Geofys. Publ. 13 No. 10, Oslo (1943/44). [60] HANSEN, W. "Neuere Ergebnisse der Gezeitenforschung." Naturwiss. 35, 265-269 (1948). [61] HANSEN, W. "Die Ermittlung der Gezeiten beliebig gestalteter Meeresgebiete mit Hilfe des Randwertverfahrens." Deutsche Hydrogr. Z. 1, 157-163 (1948).

4. Gezeitenschwingungen bei variabler Wassertiefe.

- [62] THORADE, H. "Fort schreitende Wellen bei veränderlicher Wassertiefe." Mitt. Math. Ges. Hamburg 6, 203-225 (1926). [63] THORADE, H. "Flutwellen auf unebenem Grunde." Ann. Hydrogr. 54, 217-222 (1926). [64] THORADE, H. "Probleme der Wasserwellen." Probleme der Kosmischen Physik Bd. 13 und 14, 219 S. Hamburg 1931. [65] ERTEL, H. "Eine neue Methode zur Berechnung der Eigenschwingungen von Wassermassen und Seen unregelmässiger Gestalt." Sitzber. Preuss. Ak. Wiss. Phys. math. Kl. Jahrg. 1933, 746-750. [66] GOLDSBROUGH, G.R. "The effect on the tides of variation in the depth of the sea." Proc. London Math. Soc. (2) 15, 64-71 (1916). [67] PROUDMAN, J. "Tides in a channel." Philos. Mag. 49, 465-475 (1925). [68] PROUDMAN, J. "Note on the Distribution of Tides in a Bassin possessing a Line of Symmetry." Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 2, 98-101 (1928). [69] PROUDMAN, J. "On the Curvature of Cotidal Lines across a Channel." Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 2, 111-119 (1928). [70] GRACE, S.F. "Tides in a channel." Monthly Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl. 2, 302-310 (1935). [71] HIDAKA, K. "Sur l'Integration de l'Equation de Chrystal pour les Seiches des deux Lacs Ecosais, Earn et Traig." Mem. Imp. Marine Obs. Japan 4 227-240 (1931). [72] HIDAKA, K. "Problems of Water Oscillations in Various Types of Basins and Canals." I: M (=Mem. Imp. Marine Obs. Japan) 4, 99-220 (1931), Berichtigung: G (=Geophys. Mag.) 8, 199-203 (1934); II: M 4, 273-283 (1931); III: M 4, 285-315 (1931); IV: M 5, 15-23 (1932); V: M 5, 63-67 (1932); VII: G 8, 195-197 (1934); VIII: M 6, 267-326 (1935); IX: M 5, 327-358 (1935); X: G 10, 67-70 (1936); XI: M 6, 259-277 (1937); XII: G 11, 51-74 (1937); XIII: G 11, 161-163 (1937). [73] HIDAKA, K. "Seiches due to a Submarine Bank." Mem. Imp. Marine Obs. Japan 6, 1-8 (1935).

I n h a l t

	Seite
I. Einleitung und Aufstellung der Bewegungsgleichungen	1
1. Beobachtungsergebnisse. Problemstellung	1
2. Analogie zwischen den Gezeiten des Meeres und der Atmosphäre	2
3. Operatoren im Hilbertraum.	4
II. Gezeitenschwingungen auf rotierender Erde mit glatter Oberfläche	8
1. Freie Schwingungen und Strömungen auf ruhender Erde	8
2. Freie Schwingungen bei Rotation	10
3. Freie Strömungen bei Rotation	13
4. Erzwungene Schwingungen	16
III. Der Einfluss der amerikanischen Kettengebirge auf die Gezeitenschwingun - gen der Atmosphäre.	17
1. Freie Schwingungen bei eindimensionaler Strömung	17
2. Endlicher Kanal als Grenzfall	21
3. Erzwungene Schwingungen	23
4. Grenzfall auf der Kugel	26
Literaturverzeichnis	29