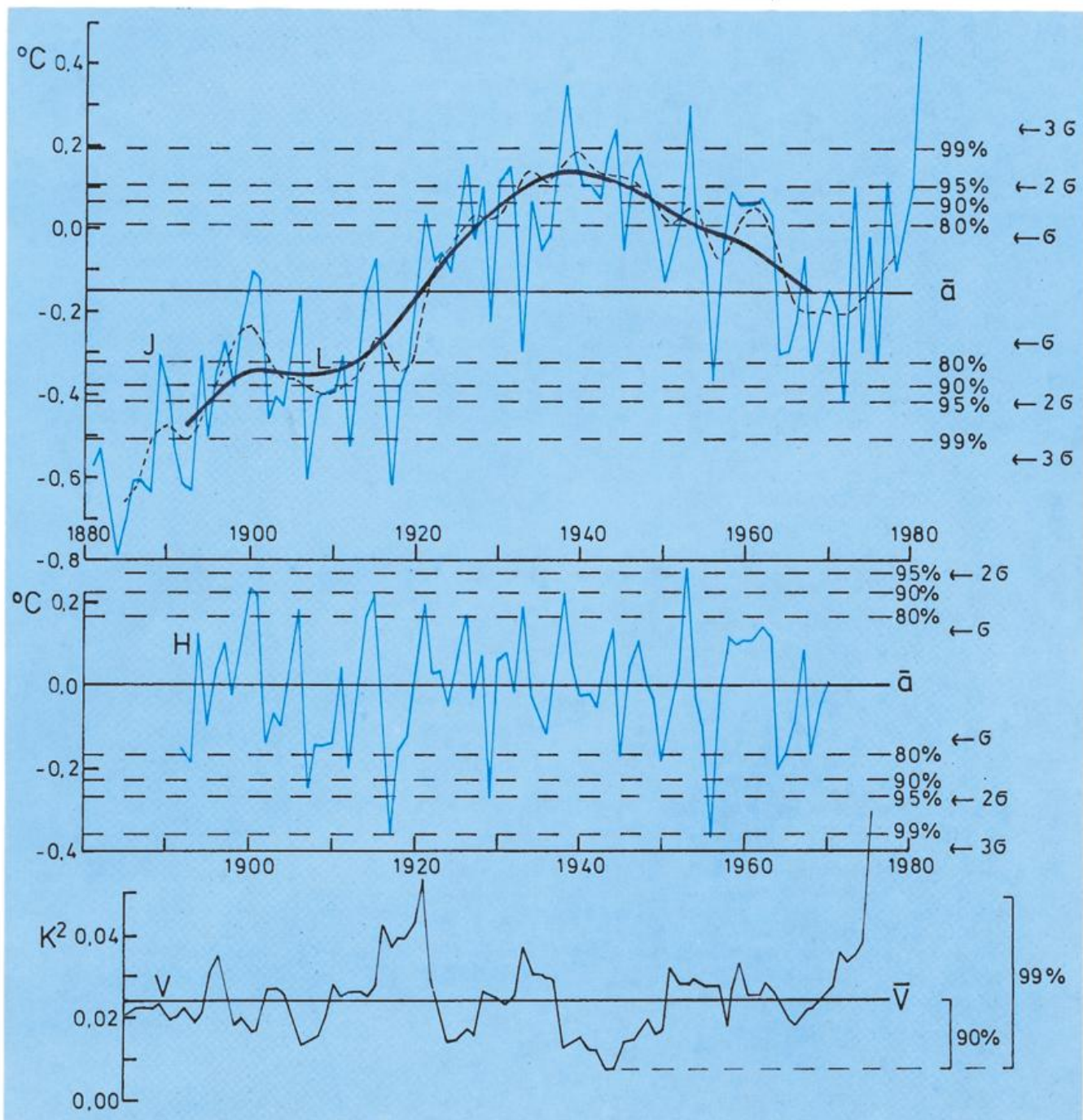


Statistische Methoden der Klimatologie



Herausgeber

Deutscher Wetterdienst

Hauptschriftleiter

M. Schlegel

Frankfurter Straße 135

6050 Offenbach am Main

Redaktionsausschuß

A. Baumgartner (München)

F. Fiedler (Karlsruhe)

H.-W. Georgii (Frankfurt)

H. Hinzpeter (Hamburg)

E. Lingelbach (Offenbach)

H. Reiser (Offenbach)

R. Simonis (Offenbach)

S. Uhlig (Traben-Trarbach)

F. Wippermann (Darmstadt)

Zum Titelbild

Das Bild zeigt von oben nach unten: Jährliche Abweichungen 1881—1981 der nordhemisphärischen Mitteltemperatur vom Mittelwert 1946—1981, obere blaue Kurve, mit Tießpaßfilterungen ($T > 30$ Jahre, dick gezeichnete Kurve, $T > 10$ Jahre, gestrichelte Kurve) und Signifikanzbereichen; Hochpaßfilterung ($T \leq 30$ Jahre) der Jahresdaten, mittlere blaue Kurve, ebenfalls mit Signifikanzbereichen; übergreifende zehnjährige Varianzwerte der Jahresdaten, untere Kurve. (Erklärung und Literatur s. Beiträge 2, 5 und 6.)

promet erscheint im Selbstverlag des Deutschen Wetterdienstes — Zentralamt — Frankfurter Straße 135, 6050 Offenbach am Main. Bezugspreis pro Jahrgang (4 Hefte) DM 32,—, Einzelheft DM 8,50.

Für den Inhalt der Arbeiten sind die Autoren verantwortlich. Alle Rechte bleiben vorbehalten.

Druck: Schön & Wetzel GmbH, Offenbacher Landstraße 368, 6000 Frankfurt (Main).

ISSN 0340-4552

Meteorologische Fortbildung

13. Jahrgang, Heft 1/2, 1983

Thema des Heftes:

Statistische Methoden der Klimatologie

(Fachliche Redaktion: C.-D. Schönwiese, Frankfurt am Main)

Beiträge	Seite
Zur Einführung	1
1 M. PAESLER Homogenisierung	3
2 C.-D. SCHÖNWIESE Stichprobenbeschreibung	7
3 G. BERZ Verteilungen	11
4 C.-D. SCHÖNWIESE Schätzverfahren	16
5 C.-D. SCHÖNWIESE Testverfahren	17
6 C.-D. SCHÖNWIESE Zeitreihenfilterung	19
7 C.-D. SCHÖNWIESE Zeitreihenkorrelation	23
8 C.-D. SCHÖNWIESE Varianzspektrum	26
9 H. FLEER Das Kreuzspektrum	30
10 L. HOFFMANN Faktorenanalyse	34
11 H. FECHNER Empirische Orthogonalfunktionen	41
12 TH. DAHLEM und P. WENDLING Die Monte-Carlo-Methode	47

Berichtigungen zu Promet 1/2 '83
(Statistische Methoden der Klimatologie)

Seite

- 3 Bibliographie, *PANOFISKY ... : Setze 1958 (statt 1965)
- 8 Gl. (3): Setze $f_{\hat{a}} = \dots$
Gl. (7): Setze $\dots a_i'^2$
- 10 Legende zu Abb. 2: Setze ... Mittelvektor $\bar{v}$...
- 13 Gl. (5): Setze im Nenner des ersten Bruches σ (statt δ)
2. Zeile vor Gl. (6): Setze $(x-\mu)/\sigma$
- 14 Gl. (7): Setze im Zähler des ersten Bruches a (statt α)
- 18 Gl. (3): Setze für den Laufindex unter dem Summenzeichen i (statt λ)
- 24 Gl. (8): Ergänze im ersten Term ($\bar{r} - \dots$)
linke Spalte, letzte Zeile: Ergänze $\dots 0.505^2 \cdot 100\%$...
- 25 Gl. (15): Setze den Betragsstrich des rechten Terms unter das Wurzelzeichen (vor dem Bruch)
- 26 Gl. (4): Setze oberhalb des Integralzeichens $+\infty$
nach Gl. (10): Vertausche im Text $f_{\min}$ und $f_{\max}$
- 31 Gl. (6): Setze für den letzten Term $SQ_{xy}^2(h)$
Gl. (8): Ergänze das Gleichheitszeichen nach $K_{xy}^2(h)$
- 32 Linke Spalte, 3. Zeile v. u.: Setze jeweils 0.19 (statt 1.9)
- 35 Gl. (11): Setze den letzten Term auf gleiche Höhe
Gl. (12): Ergänze: $F' =$ transponierte Matrix
1. Zeile nach Gl. (13): ... transponierte ... (statt transportierte)
2. Zeile von Gl. (15) muß heißen: $A \frac{1}{n-1} FF'A' = A \cdot C \cdot A'$
1. Zeile nach Gl. (15) muß heißen: Der Ausdruck $C = \frac{1}{n-1} FF'$ ist analog zu Gl. (13)...
- 42 Gl. (10): Setze am Anfang eckige und runde Klammer; letzte zwei Zeilen vor Abschn. 3: Wurzelzeichen bezieht sich jeweils nur auf [UU] bzw. [VV]
- 43 1. Formel in Abschn. 3.3 muß lauten:
$$[c] = 1/T \sum_{t=1}^T c_t$$

vorletzte Zeile vor Abschn. 3.5: $\dots \delta^2(c) \dots$
letzte Zeile vor Abschn. 3.5: $\dots [c_1 c_2] / (\delta(c_1) \delta(c_2)) \dots$
- 48 Gl. (1) u. (2), 3. Zeile muß jeweils heißen: $0 : x \geq 1$
Abschn. 2.2, 1. Satz muß heißen: $\dots [0,1] -$ gleichverteilt ...
Abschn. 2.2, vorletzte Zeile muß heißen: $f_1(x) \dots$
Gl. (6) muß heißen: $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1 \dots$
- 49 Gl. (7) muß heißen: $F(x) = y;$
Gl. (8) muß heißen: $y_n = F_1(x_n)$
Gl. (9) muß heißen: $x_n = F_1^{-1}(y_n)$
nach Gl. (9) setze: $\dots [0,1) \dots$
Gl. (10) muß heißen: $Z_k = (-6 + \sum_{n=(12k-11)}^{12k} x_n)_k$ ($k = 1, 2, 3 \dots$)
Zeile nach Gl. (11) muß heißen: $0 < x_1 < 1$
Gl. (15) muß heißen: $\sigma^2 = E[(X - E[X])^2]$
Gl. (16) muß heißen: $\epsilon = |\bar{X} - E[X]| < 3 \cdot \frac{\sigma(X)}{\sqrt{N}}$
- 50 Gl. (24): es muß heißen: $0 : x < a$

Thema dieses Heftes:

Statistische Methoden der Klimatologie

Zur Einführung

Die Statistik ist die methodische Wissenschaft zur Erfassung zufälliger und zufallsartiger Massenerscheinungen. Diese Definition ist unter denen, die in den Lehrbüchern zur Auswahl stehen, sicherlich eine der treffendsten; und doch wird sie vielen, die von der Statistik kein genaues — oder was schlimmer ist: ein schiefes Bild haben, nicht viel weiterhelfen. Daher, und weil in diesem Promet-Heft erstmals ausführlich von statistischer Methodik die Rede ist, soll auf die Definition und Eigenart der Statistik etwas näher eingegangen werden.

In der obigen Definition heißt es zunächst, daß die Statistik eine *methodische Wissenschaft* sei. Dies bedeutet, daß eine Sammlung allgemeiner Methoden angeboten wird, die es erlaubt, etwas zu wissen; oder genauer: die es verschiedenen Spezialwissenschaften erlaubt, ihr Wissen zu vermehren. Grundlage dieses Wissens sind *Daten*, die günstigenfalls auf exakten und hinreichend genauen Messungen beruhen (Meßdaten). Und zwar werden durch die statistische Methodik Aspekte des Wissens und darüber hinaus Entscheidungshilfen zugänglich, welche die Betrachtung der Daten allein nicht erlaubt.

Da wir jeden Vorgang prinzipiell in Ursache, Wirkung und Funktion (die den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung beschreibt) gliedern können, lassen sich diese Daten als *Wirkungsdaten* auffassen. Dies bedeutet, daß die Statistik von der *realen Wirkung* der Vorgänge ausgeht und in einem ersten Schritt die verschiedenen Aspekte der Wirklichkeit zu erfassen sucht (s. Beiträge 2 „Stichprobenbeschreibung“, 6 „Zeitreihen-Filterung“, 8 „Varianzspektrum“ und 11 „Empirische Orthogonalfunktionen“). Dies steht in diametralem Gegensatz zum Konzept des (überwiegend) deterministischen Modells, dessen Ergebnisse nicht real sind, sondern eine mehr oder weniger gute Approximation der Wirklichkeit darstellen.

Auf der anderen Seite hat man mit dieser Art von Modell jedoch die Ursachen in der Hand, ganz im Gegensatz zur Statistik, die erst in einem zweiten oder dritten Schritt zu Aussagen über *mögliche Ursachen* kommen kann (s. Beiträge 7 „Zeitreihen-Korrelation“, 9 „Kreuzspektrum und Kohärenz“ sowie 10 „Faktorenanalyse“) und sich dabei, bei aller prinzipiellen Gefährlichkeit unsachgemäßen statistischen Vorgehens, in besonders gefährliches Fahrwasser begibt, falls die statistischen Voraussetzungen und Kontrollen sowie die Berücksichtigung des deterministischen Hintergrundes außer Acht bleiben.

Die Begriffe *Zufall* und *Zufallsartigkeit* werden selbst unter den Statistikern nicht einheitlich gesehen. Viele Autoren bezeichnen alle Vorgänge, die nicht zwingend (determiniert, im günstigsten Fall mittels einer mathematischen Funktion, welche die Berechnung einer eindeutigen und sicheren Wirkung gestattet) bei gleichen Randbedingungen zur gleichen Wirkung führen, als zufällig. Andere verweisen darauf, daß sich selbst scheinbar reine Zufallsvorgänge in durchaus determinierte Einzelvorgänge auflösen lassen und sich nur wegen des vielfältigen und insgesamt unüberschaubaren Zusammenwirkens eine zufallsartige Wirkung einstellt.

Diese zufällige oder zufallsartige Wirkung wird allerdings erst durch die *Wiederholung* von Vorgängen gleicher Ausgangssituation offenbar, dadurch nämlich, daß im Gegensatz zum determinierten Vorgang trotz gleicher Randbedingungen *unterschiedliche Wirkungen* (Daten) auftreten. Daraus resultiert ja auch der für die Statistik so fundamentale Aspekt der (Häufigkeits-), „Verteilungen“ (s. Beitrag 3). Und dies erklärt auch, warum in der Statistik nie ein Einzelvorgang (der hinsichtlich der Wirkung nur einen Datenwert liefern würde), sondern stets wiederholte Vorgänge, sog. *Massenerscheinungen*, analysiert werden.

Wir wollen uns hier in der Weise festlegen (ohne Anspruch auf eine endgültige Einsicht), daß alle Vorgänge mit gleich wahrscheinlichen unterschiedlichen Wirkungen (führt zur Gleichverteilung der Population der Massenerscheinung) als *zufällig* (stochastisch) bezeichnet werden (gilt nur für nicht zusammengesetzte elementare Vorgänge) und alle Vorgänge mit nicht gleich wahrscheinlichen aber nach wie vor unterschiedlichen Wirkungen als *zufallsartig*. Dabei wird im letzteren Fall offengelassen, ob sich dank wissenschaftlicher Erkenntnis aus einem zufallsartigen Vorgang später vielleicht einmal Determinismen herauschälen lassen.

Der oben genannte erste Schritt der statistischen Methodik, in dem an Hand der vorliegenden Daten die Aspekte der Wirklichkeit zufälliger und zufallsartiger Massenerscheinungen durchleuchtet werden, bezieht sich in den weitaus meisten Fällen auf *Stichproben*. Diese stellen jeweils eine mehr oder weniger willkürliche und begrenzte *Auswahl* (Teil der Wirkungsdaten) eines weit umfassenderen und i.a. unbekannten Kollektivs dar, das den *gesamten* Vorgang darstellt (alle möglichen Wirkungsdaten hierzu): die *Population* oder *Grundgesamtheit*.

Es liegt nahe, daß man in einem zweiten Schritt der statistischen Analyse versucht, Aussagen über diese Population zu erhalten. Eine wichtige Aussage hierzu ist der *Schluß auf die Populations-Verteilung* (s. Beitrag 3), ausgehend von der empirischen Stichproben-Verteilung (s. Beitrag 2) oder einer „Monte-Carlo-Statistik“ (s. Beitrag 12). Über die statistische Signifikanz eines solchen Schlusses, zugleich eine Art „statistisches Modell“ kann im ersten Fall ein geeignetes „Testverfahren“ (s. Beitrag 4) entscheiden. Diese Testverfahren, die in der statistischen Theorie in großer Zahl entwickelt worden sind, erlauben aber auch Entscheidungen im

Fall vieler anderer Hypothesen über Stichproben und Populationen. Eine klassisch gewordene Definition der Statistik (WALD, 1950) nimmt auf diese Methodik Bezug: „Statistik ist eine Zusammenfassung von Methoden, die uns erlauben, vernünftige optimale Entscheidungen im Falle von Ungewißheiten zu treffen.“ Die Datenreduktion nach dem Gesichtspunkt der „statistischen Wesentlichkeit“ (s. Beitrag 11) läßt sich ebenfalls hier einordnen.

Auch die in der Statistik so problematische *Vorhersage* künftiger Ereignisse (Wirkungen, Daten; dritter Schritt) ist eine solche Entscheidung. Da bei statistischen (zufälligen bzw. zufallsartigen) Vorgängen stets mehrere Wirkungen möglich sind, kann eine statistische Vorhersage niemals sicher sein. Im Gegensatz zur nicht statistisch abgesicherten Empirik läßt sich eine statistische Vorhersage i. a. jedoch mit einer *definitiven Wahrscheinlichkeit* verknüpfen. Freilich wären sichere Aussagen wertvoller; man sollte jedoch zugeben, daß sie — gerade in der Meteorologie — häufig nicht möglich sind und in solchen Fällen Wahrscheinlichkeitsaussagen immer noch wertvoller als gar keine Aussagen sind.

Die Bedingungen statistischer Vorhersagen sind allerdings kritisch zu prüfen und ihre Eigenarten genau zu beachten. Zu diesen Eigenarten gehört auch die Tatsache, daß statistische Vorhersagen nie für Einzelvorgänge (Einzelwerte), sondern stets nur für *Werteintervalle* von Massenerscheinungen möglich sind, und zwar gleich, ob es sich dabei um Werteintervalle einer Häufigkeitsverteilung (s. Beitrag 4 „Schätzverfahren“) oder Regressionsbeziehungen handelt, die aus Korrelationen (s. Beitrag 7) hergeleitet sind. Eine wichtige Vorbedingung hierzu ist die *Stationarität* der Vorgänge, d. h. die Konvergenz der Momente (Mittelwert, Varianz usw.) bei Stichprobenerweiterung und Konstanz der Momente ab einem bestimmten Stichprobenumfang (bei Festlegung eines bestimmten Genauigkeitsgrades der Momente, s. Beitrag 2).

Nun sind einige Besonderheiten der statistischen Methodik möglicherweise verständlich geworden; die folgenden Beiträge werden diese Einsichten Schritt für Schritt vertiefen. Das vorliegende Promet-Heft nimmt jedoch speziellen Bezug auf die *Klimatologie*, und der Leser hat einen Anspruch darauf, zu erfahren, warum dies geschieht.

Auf die in den letzten wenigen Jahrzehnten enorm gestiegene Bedeutung der Klimatologie ist bereits in früheren Promet-Heften hingewiesen worden (4'73, 4'77, 2/3'78, 4'79, 1/2'80, 3'80, 4'80). Die Anwendung statistischer Methoden in der Klimatologie hat damit nicht ganz Schritt gehalten, im Gegensatz zu den Wirtschaftswissenschaften, der Geophysik und vielen anderen Wissensgebieten. Dabei ist die Klimatologie für die statistische Methodik besonders prädestiniert, da

- die Ursachen vieler Vorgänge deterministisch nicht geklärt sind,
- Modellierungen auch in absehbarer Zukunft nur für Teilaspekte der Klimatologie erfolgreich erscheinen und im übrigen prinzipiell der Verifizierung durch statistische Befunde bedürfen,
- besonders viele Daten anfallen, und zwar auf Grund der vorliegenden vieljährigen Beobachtungen, neuen Meßkampagnen und nicht zuletzt der stürmisch anwachsenden paläoklimatologischen Datenerfassung.

Dazu kommt, daß besonders im klimatologischen Teilbereich der Meteorologie (aber nicht nur dort) Stichproben-Daten in Form von *Zeitreihen* (Datenwerte bezüglich äquidistanter Zeitpunkte oder -intervalle) auftreten, auf die eine ganze Reihe moderner statistischer Methoden der Zeitreihenanalyse angewendet werden können.

Der *Beurteilung der Ausgangsdaten* hinsichtlich systematischer Fehler, Genauigkeit und Homogenität *vor der weiteren statistischen Analyse* wird oft zu wenig Aufmerksamkeit entgegengebracht. Das kann sowohl zu fehlerhaften Interpretationen statistischer Ergebnisse als auch zu überzogener Kritik (z. B. Leugnung von Klimaschwankungen in moderner Zeit) führen. Objektive Kritik mit Augenmaß ist hier gefordert, was freilich oft durch fehlende Genauigkeitsangaben bei publizierten Datensätzen erschwert wird. Im Rahmen der statistischen Zeitreihenanalyse ist die „Homogenisierung“ (s. Beitrag 1) der Datensätze eine besonders wichtige Voraussetzung. Auf die sich rasch entwickelnde Datenverarbeitungstechnik, derzeit insbesondere im kleineren (Taschenrechner) und mittleren Bereich (Tischrechner), und die dadurch zur Verfügung stehende Hilfe bei der statistischen Arbeit soll hier nur am Rande hingewiesen werden.

Klimatologisch-statistische Bearbeitungen, gleich ob im sog. Routinedienst oder in der wissenschaftlichen Forschung, haben an Bedeutung gewonnen, jedoch noch nicht im eigentlich möglichen und erforderlichen Ausmaß. In Klimaprogrammen wird neben Meßkampagnen und theoretischen Approximationen der statistischen Analyse, die ja wesentliche Einblicke in die Wirklichkeit und Entscheidungshilfen bietet, nicht immer der notwendige Stellenwert eingeräumt. Messung — Statistik — Theorie (Modell), das ist das Dreiein, auf dem die Klimatologie beruhen sollte und das ihr ein erfolgreiches Weiterführen in den Anwendungsbereich (Impaktstudien) ermöglicht.

Wenn dieses Heft Einblicke in die statistischen Methoden der Klimatologie, Verständnis für statistische Denkweisen und Anhalt für kritische und statistisch einwandfreie Bearbeitung klimatologischer Daten erbringen sollte, wäre sein Zweck erfüllt. Eine kurze Auswahl zur Bibliographie allgemeiner statistischer Lehrbücher folgt dieser Einführung. Die Einzelbeiträge geben vorwiegend spezielle Literaturhinweise an.

Dem Deutschen Wetterdienst, dem Hauptschriftleiter und den Autoren sei für die bereitwillige und fruchtbare Zusammenarbeit bestens gedankt.

C.-D. SCHÖNWIESE, Frankfurt

Bibliographie allgemeiner Einführungen in die Statistik (Auswahl)

Die mit * gekennzeichneten Bücher stellen unter den Gesichtspunkten einer ersten Einführung und guter didaktischer Darstellung eine engere subjektive Auswahl des Verfassers dar.

*BAHRENBERG, G.; GIESE, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendung in der Geographie. Stuttgart: Teubner 1975.

BOSCH, K.: Elementare Einführung in die angewandte Statistik. Braunschweig: Vieweg 1981.

BRANDT, S.: Datenanalyse. Mannheim: Bibliogr. Inst. 1981.

CREUTZ, G.; EHLERS, R.: Statistische Formelsammlung. Thun, Frankfurt: Deutsch 1976.

ESSENWANGER, E.: Applied Statistics in Atmospheric Science. P. A. Amsterdam: Elsevier 1976.

FLIRI, H.: Statistik und Diagramm. Braunschweig: Westermann 1969.

HASELOFF, O. W.; HOFFMANN, H.-J.: Kleines Lehrbuch der Statistik. Berlin: De Gruyter 1970.

*HENGST, M.: Einführung in die mathematische Statistik und ihre Anwendung. Mannheim: Bibliogr. Inst. 1967.

*KREYSZIG, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht 1979.

LINDER, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure. Basel: Birkhäuser 1964.

MARSAL, D.: Statistische Methoden für Erdwissenschaftler. Stuttgart: Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung 1979.

*PANOFISKY, H. A.; BRIER, G. W.: Some Applications of Statistics to Meteorology. University Park (USA): Pennsylvania State Univ. 1965.

*SACHS, L.: Angewandte Statistik. Berlin: Springer 1974.

SACHS, L.: Statistische Methoden. Ein Soforthelfer. Berlin: Springer 1970.

SNEYERS, R.: Sur l'analyse statistique des séries d'observations. Geneva: WMO 1975 = WMO Techn. Note No. 143 (Publ. No. 415).

*SPIEGEL, M. R.: Statistik (Übers. aus Engl.) New York: Mc Graw Hill 1976.

SWOBODA, H.: Knaurs Buch der modernen Statistik. München: Knaur 1974.

TAUBENHEIM, J.: Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten. Leipzig: Akad. Verlagsges. Geest u. Pertig 1969.

THOM, H. C. S.: Some methods of climatological analysis. Geneva: WMO 1966 = WMO Techn. Note No. 81 (Publ. No. 199).

WALLIS, W. A.; ROBERTS, H. V.: Methoden der Statistik (Übers. aus Engl.). Freiburg: Rowohlt 1968.

WEBER, E.: Grundriß der biologischen Statistik. Anwendungen der mathematischen Statistik in Naturwissenschaft und Technik. Stuttgart: Fischer 1972.

In Vorbereitung: SCHÖNWIESE, C. D.: Praktische Statistik (für Meteorologen, und Geowissenschaftler). Berlin, Stuttgart: Borntraeger (voraussichtlich 1984).

1 M. PAESLER, München Homogenisierung

1 Einleitung

Die klimatologische Bearbeitung von Beobachtungsdaten hat das Ziel, die charakteristischen Merkmale des Klimas einer Station herauszufinden und mit denen anderer Stationen zu vergleichen. Ein solcher Vergleich setzt natürlich die klimatologische Vergleichbarkeit des Beobachtungsmaterials voraus. Bei längeren Beobachtungsreihen ist diese Vergleichbarkeit kaum gegeben, weil sich im Laufe der Jahrzehnte die Beobachtungsverfahren, Meßgeräte, Aufstellungsorte usw. meist wiederholt geändert haben. Aus dem 18. und 19. Jahrhundert stehen aus diesem Grunde nur wenige meteorologische Meßreihen zur Verfügung, die eine direkte Beurteilung der klimatischen Verhältnisse erlauben. Gerade diese alten Aufzeichnungen sind aber besonders wertvoll; denn um die Frage möglicher langfristiger Klimaveränderungen diskutieren zu können, ist man auf lange, in sich homogene Beobachtungsreihen meteorologischer Elemente angewiesen.

2 Begriffsbestimmung

Homogen nennt man eine Reihe von Beobachtungsdaten meteorologischer Elemente dann, wenn deren Schwankungen nur durch meteorologische Einflüsse an der betreffenden Station hervorgerufen werden (5). Im statistischen Sinn ist eine solche Datenreihe eine Stichprobe einer einzigen Population (11). Die Analyse meteorologischer Beobachtungen zeigt aber, daß häufig eine sprunghafte, zuweilen auch eine allmähliche systematische Veränderung der gemessenen Werte beobachtet werden kann, die sich nicht auf meteorologische Einflüsse zurückführen läßt bzw. nicht auf diese allein. Solche Einflüsse, die eine Reihe inhomogen machen, sind z. B. Veränderungen des Mikroklimas durch Errichtung von Gebäuden in der Nähe des Beobachtungsortes, Wachstum benachbarter Bäume (beides ändert den Strahlungs- und Wärmehaushalt sowie die Windverhältnisse), Teerung von Straßen, großräumiges Wachstum einer Stadt; Austausch eines Instrumentes

gegen ein anderes, Änderung der Aufstellung oder der Beobachtungsmethodik, Änderung der Instrumentenangaben oder Instrumentenkorrektur, subjektive Änderung der Instrumentenablesung bei Beobachterwechsel (1).

Die Möglichkeiten, die zur Inhomogenität einer Datenreihe führen, sind offenbar derart zahlreich, daß eine wirklich homogene Beobachtungsreihe, gleich welchen Elements, eine große Seltenheit ist. Eine der wenigen bekannten, bereits seit über 200 Jahren ununterbrochen fortgeführten und als annähernd homogen geltenden Reihen ist z. B. die Temperaturreihe des Hohenpeißenbergs, die im Jahre 1781 begonnen und zur Homogenisierung der Münchner Temperaturreihe benützt wurde (7).

Bei der Bearbeitung einer vielleicht mehrfach unterbrochenen, ggf. auch an mehrmals verlegten Beobachtungsstandorten gewonnenen längeren Reihe muß zunächst versucht werden, möglichst lange homogene Teilreihen zu erhalten. Steht eine genügend lange homogene Vergleichsreihe zur Verfügung, die auch heute noch weitergeführt wird, so kann mit Hilfe dieser Vergleichsreihe erreicht werden, daß die einzelnen in sich homogenen Teilreihen durch Anbringung geeigneter Korrekturwerte untereinander vergleichbar werden und an diese Vergleichsreihe angeschlossen werden können. Vor der wissenschaftlichen Bearbeitung muß somit sichergestellt sein, daß die zu analysierende Reihe — ggf. auch aus Teilreihen zusammengesetzt — fehlerfrei, homogen und in sinnvoller Weise auf eine Referenzreihe bezogen ist.

Die Prüfung der Homogenität von Beobachtungsreihen ist eine der wichtigsten Aufgaben der klimatologischen Bearbeitung, ja deren Voraussetzung. Die Feststellung der Homogenität ist jedoch für verschiedene meteorologische Elemente von recht unterschiedlicher Schwierigkeit.

3 Auffinden von Inhomogenitäten

3.1 Absolutwertbetrachtung

Da die Klimaelemente immer lang- und kurzperiodischen, besonders aber auch aperiodischen meteorologischen Schwankungen ausgesetzt sind, scheint es, von besonders krassen und daher seltenen Fällen abgesehen, im allgemeinen unmöglich zu sein, in der Reihe der Elemente einer einzelnen Station eine Inhomogenität festzustellen. Nur in denjenigen Fällen, in denen die zeitlichen meteorologischen Schwankungen, z. B. von Jahr zu Jahr, gering sind, einzelne Werte der Reihe jedoch stark herausfallen, ist die Inhomogenität leicht festzustellen. So sind beispielsweise die mittleren monatlichen Windgeschwindigkeiten gewöhnlich geringeren Schwankungen von Jahr zu Jahr unterworfen als die Veränderungen der Windgeschwindigkeit, die durch veränderte Aufstellungsbedingungen auftreten können.

In den Fällen, in denen die zeitlichen meteorologischen Schwankungen ausgeprägter sind als diejenigen, die durch Inhomogenität hervorgerufen werden, ist diese Inhomogenität auf Grund der Daten nur einer Station i. a. nicht aufzufinden. In einem solchen Fall ist es jedoch oft möglich, einer Inhomogenität dadurch auf die Spur zu kommen, daß man beispielsweise nicht die Monatswerte, sondern Jahres- oder Jahreszeitenwerte analysiert, welche geringere jährliche Schwankungen aufweisen als die Monatsmittelwerte. Außerdem werden sich

die in den Monatsmitteln vorhandenen Unstetigkeiten in den Fällen, in denen die Jahreswerte aus den Monatswerten durch Aufsummierung gebildet werden, ebenfalls aufsummieren. Mit diesem Verfahren kann es auch gelingen, Inhomogenitäten in der Anzahl der besonderen Tage (Nebeltage, Gewittertage u. ä.) oder in der Anzahl der Sonnenscheinstunden aufzudecken.

3.2 Differenzen- und Quotientenmethode

Das Verfahren der Absolutwertbetrachtung gibt gewöhnlich keine endgültige Auskunft über die Inhomogenität der Reihen einiger meteorologischer Elemente, wie z. B. des Luftdrucks, der Lufttemperatur oder der Niederschlagsmenge, da sogar die Schwankungen der Jahreswerte dieser Elemente sehr groß sind. Außerdem kann die Lufttemperatur bei einer inhomogenen Reihe während des Sommers und Winters Änderungen mit umgekehrtem Vorzeichen aufweisen, wodurch in den Jahreswerten eine Kompensation eintritt. Bei solchen meteorologischen Elementen ist es daher nicht möglich, die Homogenität an Hand der Absolutwerte zu prüfen. Für die Feststellung der Inhomogenität dieser Reihen verwendet man deshalb die Methode der Differenzen wie bei der Temperatur oder der Quotienten wie beim Niederschlag.

Atmosphärische Vorgänge verlaufen an Orten, die nicht sehr weit voneinander entfernt sind, nicht isoliert, sondern sind mehr oder weniger eng miteinander korreliert. Witterungs- und Klimaänderungen treten daher i. a. regional auf und rufen gleichsinnige Schwankungen der klimatischen Elemente bei benachbarten Orten hervor (8). Die Güte der räumlichen Korrelation ist jedoch von Fall zu Fall durch Repräsentanzanalysen zu prüfen. Wenn auch die Werte der meteorologischen Elemente erheblichen zeitlichen Schwankungen unterworfen sind, so stimmen sie doch an benachbarten Stationen (räumlich) im wesentlichen überein. Die Differenzen oder Quotienten der entsprechenden Beobachtungswerte eines Elements schwanken daher sehr viel weniger als die Werte selbst. Wenn die Reihe einer dieser Stationen inhomogen ist, so ist wegen der geringen Differenzen- oder Quotientenschwankungen der betreffenden Werte zweier Stationen der Sprung in der Reihe der Zahlenwerte, bedingt durch die Inhomogenität der Reihe, meist sogleich klar zu erkennen.

Erst der Nachweis der Quasikonstanz z. B. der Temperaturdifferenzen zweier klimatisch ähnlicher, nicht zu weit voneinander entfernt liegender Orte läßt es zu, die relative Homogenität einer Reihe in Bezug auf eine zweite zu definieren: Eine Temperaturreihe ist bezüglich einer zweiten synchronen relativ homogen, wenn die Differenzen der Mitteltemperaturen homologer Zeitabschnitte eine Zahlenreihe darstellen, die den Zufallsgesetzen gehorcht (5). Die Begründung dieser Feststellung ist recht trivial: Da Witterungsereignisse die Temperaturdifferenzen nicht wesentlich beeinflussen sollen, darf keine systematische Einwirkung in der Zahlenreihe zu erkennen sein. Ist eine solche aber vorhanden, so kann sie nur auf eine künstliche, mit dem Klima nicht zusammenhängende Störung zurückgeführt werden. Für andere klimatische Elemente muß statt der Differenz der Quotient betrachtet werden, z. B. beim Niederschlag.

Diese Methode verliert ihre Berechtigung natürlich dann, wenn die Veränderlichkeit der Differenzen gleich der Verän-

derlichkeit der Werte selbst wird, z. B. bei zwei zu weit voneinander entfernten Stationen. Wichtiger als die enge Nachbarschaft zweier Stationen sind aber gleiche oder möglichst ähnliche klimatische Verhältnisse (Repräsentanz). So wird es sinnvoller sein, eine Flachlandstation mit einer anderen, vielleicht 100 km entfernten, aber auf gleicher Höhe und in ähnlicher Umgebung liegenden, zu vergleichen, als mit einer Gipfelstation, die vielleicht nur wenige Kilometer entfernt, aber 1000 m höher ist (10).

Die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenzen ist auch einer jahreszeitlichen Schwankung unterworfen. Bei größeren Höhenunterschieden kann die Differenzveränderlichkeit im Winter auf den mehrfachen Wert der Sommerveränderlichkeit ansteigen, was bei der Häufung von Inversionswetterlagen in der kalten Jahreszeit eigentlich selbstverständlich erscheint. Ein Vergleich zwischen einer Berg- und einer Talstation kann daher im Sommer sinnvoll sein, während in den Wintermonaten die Differenzenveränderlichkeit größer wird als die Elementveränderlichkeit, wodurch ein Vergleich natürlich sinnlos wird. Ähnliche Schwierigkeiten treten auch beim Vergleich von küstennahen mit küstenfernen Stationen auf, bei denen die Schwankungen der Elemente zwar gleich, die Amplituden aber verschieden sind.

4 Homogenitätskriterien

Da Differenzen- oder Quotientenreihen zweier relativ homogener Reihen nur den Zufallsgesetzen gehorchen sollten, lassen sich mathematisch-statistische Methoden ableiten, dies zu überprüfen.

4.1 Vorzeichenfolge

Als Kriterium für die Homogenität kann die zeitliche Aufeinanderfolge der Vorzeichen der Abweichung dienen. Bildet man aus der Reihe Δ_i der Datendifferenzen zweier Stationen die mittlere Differenz $\bar{\Delta}$, so erhält man die Reihe der Abweichungen $\epsilon_i = \Delta_i - \bar{\Delta}$, wobei $\sum \epsilon_i$ notwendigerweise null ergibt.

Es ist nun sehr unwahrscheinlich, daß in einer längeren Reihe mehrere negative Vorzeichen hintereinander auftreten, um dann von einer längeren Reihe positiver abgelöst zu werden. Diese Überlegung scheint zwar gefühlsmäßig richtig zu sein; es muß aber statistisch untersucht werden, bei wieviel gleichen aufeinanderfolgenden Vorzeichen eine systematische Einwirkung wahrscheinlich ist. Diese Frage hat SCHMIDT (9) wie folgt beantwortet: Die Wahrscheinlichkeit W für das Auftreten einer Gruppe von n Größen mit gleichem Vorzeichen ist für den einfachsten Fall gleich vieler positiver und negativer Abweichungen

$$W = (1/2)^{n+1} \quad (1)$$

Sind im ganzen N Abweichungen vorhanden, so ist die mathematische Erwartung E für ein n -Tupel gleichen Vorzeichens gleich der Wahrscheinlichkeit, multipliziert mit der Anzahl der möglichen Fälle:

$$E = N \cdot (1/2)^{n+1} \quad (2)$$

mit einem mittleren Fehler von $\pm \sqrt{E}$.

4.2 Helmertsches Kriterium

Im Kriterium von HELMERT (4) wird ebenfalls die Vorzeichenfolge berücksichtigt. Hier wird jedoch von der These ausgegangen, daß die Anzahl der Folgen gleicher Vorzeichen f ($++$ oder $--$) im Fall homogener Reihen ungefähr gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel w ($+-$ oder $-+$) sein sollte. Bei Zufallsverteilung der Differenzen zwischen den Werten der beiden Beobachtungsreihen und bei gerader Gesamtzahl der Beobachtungen ist dann

$$f - w = \pm 1. \quad (3)$$

Bei einem mittleren Fehler von $\pm \sqrt{n-1}$ ergibt sich damit für große Zahlen näherungsweise $f - w = 0$, ansonsten gilt

$$-\sqrt{n-1} \leq f - w \leq +\sqrt{n-1}. \quad (4)$$

4.3 Abbesches Kriterium

Ein weiteres Kriterium wurde 1863 von ABBE für physikalische Untersuchungen angegeben. Es erfaßt die Folge der Vorzeichen ebenso wie die Abweichung vom Mittelwert und ist daher den beiden anderen überlegen (3).

Die doppelte Summe der Quadrate der Abweichungen vom Mittelwert dividiert durch die Summe der Quadrate der Differenzen zweier aufeinanderfolgenden Abweichungen muß da-

nach zwischen den Grenzen $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ liegen, wo-

bei n wieder die Anzahl der Beobachtungen bedeutet. Zu berechnen sind daher die Werte

$$A = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_n^2 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \quad (5)$$

und

$$B = (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + \dots + (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)^2 + (\epsilon_n - \epsilon_1)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\epsilon_i - \epsilon_{i+1})^2 + (\epsilon_n - \epsilon_1)^2. \quad (6)$$

Werden die einzelnen Summanden von B quadriert, so ergibt sich

$$(\epsilon_1^2 - 2\epsilon_1\epsilon_{i+1} + \epsilon_{i+1}^2) + (\epsilon_{i+1}^2 - 2\epsilon_{i+1}\epsilon_{i+2} + \epsilon_{i+2}^2) + \dots \quad (7)$$

Die Quadrate kommen also jeweils zweimal vor. Bei Zufallsverteilung der Differenzen wird die Summe der Glieder $2\epsilon_i\epsilon_{i+1} = 0$, da positive und negative Abweichungen gleich große Summen ergeben müssen. Besteht Homogenität, muß das Verhältnis der Quadratsummen gleich eins sein; zuvor ist allerdings noch A zu verdoppeln oder B zu halbieren.

Als Kriterium für Homogenität ergibt sich somit nach CONRAD (2)

$$\frac{A}{B/2} = \frac{2A}{B} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (8)$$

Das Mitnehmen der letzten Differenz $(\epsilon_n - \epsilon_1)$ ist allerdings bei klimatologischen (nicht zyklischen) Meßreihen nicht von Nutzen, und kann daher weggelassen werden.

Es wird nunmehr

$$A' = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_n^2 - \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_n^2}{2} \quad (9)$$

und

$$B' = (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + \dots + (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)^2 \quad (10)$$

Dabei ist

$$A' - \frac{B'}{2} = 0 = \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \dots + \epsilon_{n-1}\epsilon_n \quad (11)$$

Die Summe der Produkte wird bei Zufallsverteilungen der Vorzeichen und unendlich großem n gleich null sein.

Bei Stichproben ($n < \infty$) ist sie aber mit dem Fehler $1 \pm \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

behaftet, so daß für homogene Reihen gilt:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{2A'}{B'} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \quad (12)$$

5 Reduktion von Reihen

5.1 Reduktionstheorie

Eine Reduktion meteorologischer Größen ist deswegen sinnvoll, weil benachbarte Stationen i. a. gut miteinander korreliert sind. So sind i. a. die Differenzen der Temperaturmonatsmittel benachbarter Stationen nahezu konstant, ebenso die Quotienten der Niederschlagsmonatssummen.

Es sei x_i die Reihe der Werte der Standard-Station, y_i seien die Werte einer zweiten Station, dann kann man folgende einfache lineare Beziehung ansetzen, wobei es sich nicht um einen funktionalen sondern stochastischen Zusammenhang handelt:

$$E(y_i) = a + b x_i \quad (13)$$

Zur Vereinfachung kann man auch schreiben: $y_i = a + b x_i$, wobei a und b Konstanten sind. Dabei ist geometrisch a der Abschnitt auf der y -Achse und b die Steigung der Beziehungsgeraden. Bildet man nun das Mittel über die n bekannten Beobachtungspaare, so erhält man:

$$\sum_{i=1}^n y_i = n a + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (14)$$

$$\text{und} \quad \bar{y} = a + b \cdot \bar{x} \quad (15)$$

Bei einer Reihe von Temperaturmitteln ist $b = 1$; damit wird $\bar{y} = a + \bar{x}$ oder $a = \bar{y} - \bar{x}$ und es ergibt sich die erwartete konstante Differenz a . Zur Ermittlung weiterer y_i -Werte wird $y_i = (\bar{y} - \bar{x}) + x_i$ und das langjährige Mittel über N Werte $\bar{y} = (\bar{y} - \bar{x}) + \bar{x}$. (16)

Bei der Niederschlagsmenge ist $a = 0$, da die Beziehungsgrade durch den Nullpunkt geht. Es wird also $y_i = b \cdot x_i$ und daraus als Mittel über n Beobachtungen $\bar{y} = b \bar{x}$. Mit $b = \bar{y} / \bar{x}$ erhält man den konstanten mittleren Quotienten. Analog zu den Betrachtungen über die Mitteltemperaturen wird dann $y_i = (\bar{y} / \bar{x}) x_i$ und das langjährige Mittel über N Werte

$$\bar{y} = (\bar{y} / \bar{x}) \cdot \bar{x} \quad (17)$$

Bei der Betrachtung anderer klimatologischer Werte können auch andere Werte für a oder b auftreten als 0 (wie beim Niederschlag) oder 1 (bei der Temperatur), eventuell auch eine Kombination verschiedener a - und b -Werte. So hat z. B. MÜLLER-ANNEN (6) Kältesummen homogenisiert, wo für den Fall $b = 1$ gilt: $a = 0$; d. h. beide Stationen haben gleiche Kältesummen bzw. sind gleich. Ist die Standard-Station kälter ($b < 1$), wird a negativ und umgekehrt; es besteht also ein Zusammenhang $a = k (b-1)$, wobei k eine zu bestimmende Konstante ist.

5.2 Reduktion auf lange Periode

Bei den Berechnungen der konstanten Differenzen bzw. Quotienten wurde vorausgesetzt, daß sowohl an der Standard-Station A als auch an der Vergleichsstation B in der gleichen Anzahl von n Jahren Messungen durchgeführt wurden, so daß Homogenitätsbetrachtungen mit Hilfe leicht zu ermitteln-

der Sprünge angestellt werden können. Es ist aber oft nötig, die Daten einer Station auf die Standardstationen zu reduzieren, deren Beobachtungen teilweise außerhalb der Periode von n Jahren mit Parallelbeobachtungen liegen.

Sei also N die Gesamtzahl der Beobachtungsjahre der Station A, M die Anzahl der Jahre, in denen B beobachtete und n die Zahl der Jahre mit Parallelmessungen, so beträgt die Gesamtlänge der Periode $N + M - n$. Bei konstanter mittlerer Differenz $\bar{D}_n$ während n Jahren kann man schreiben:

$$\bar{A}_n - \bar{B}_n = \bar{D}_n \quad (18)$$

Wäre die Periode von A so lang wie die von B, so würde gelten:

$$\bar{A}_M - \bar{B}_M = \bar{D}_M \quad (19)$$

und bei Annahme konstanter Differenzen $\bar{D}_M = \bar{D}_n$

$$\bar{A}_M - \bar{B}_M = \bar{D}_n \quad (20)$$

Je nachdem, welche Station man als Ausgangsstation nimmt, kann damit eine N Jahre lange Reihe um $M-n$ Jahre verlängert werden, oder umgekehrt die Reihe mit M Jahren um $N-n$; man wird auf jeden Fall zwei Reihen der gleichen Länge $N + M - n$ erhalten. Dieses Verfahren wird bei Homogenisierungen angewandt, wenn von einem Gebiet mehrere verschiedenen lange Teilreihen vorhanden sind, die sich überlappen und so auf eine einzige reduziert werden können. Als Ausgangsreihe nimmt man dabei zweckmäßigerweise die jüngste, die augenblicklich noch durch weitere Beobachtungen fortgesetzt wird, um nicht ständig die neu angestellten Messungen wieder reduzieren zu müssen, vorausgesetzt natürlich, es handelt sich um eine repräsentative Station.

Es ist dabei leicht einzusehen, daß die Verlängerung einer Periode umso genauer wird, je größer die Zahl n der Jahre ist, in denen an beiden Stationen Parallelmessungen durchgeführt wurden, da sich bei einer größeren Zahl von Jahren extreme Schwankungen der Differenzen eher herausmitteln und nicht so sehr ins Gewicht fallen. Absolute Genauigkeit wird natürlich nie zu erreichen sein; dazu wäre es nötig, daß die Differenzen d_i tatsächlich alle gleich der mittleren Differenz sind. Immerhin wird man die Genauigkeit der rechnerisch ermittelten Monatsmittel erheblich steigern können, wenn man nicht nur einen einzigen, vom Jahresmittel abgeleiteten Korrekturwert für alle Monate verwendet, sondern für jeden Monat, ggf. auch für noch kürzere Zeiträume, eine spezielle Korrektur errechnet, möglichst auch noch getrennt nach Tagen ähnlicher Himmelsbedeckung bzw. ähnlich großer Temperaturschwankungen.

Diese verfeinerten Verfahren mögen zwar für die Messungen der heutigen Zeit noch einigermaßen vernünftig erscheinen, sind jedoch nicht nur wegen des benötigten Arbeitsaufwands für ältere und entsprechend ungenaue Beobachtungen aus früheren Jahrhunderten wenig sinnvoll. Hier wird es meist genügen, für jeden Monat einen getrennten Korrekturwert zu ermitteln.

Sollte in einer von zwei miteinander verglichenen Reihen ein Wert, z. B. ein Tagesmittel oder ein Terminwert oder ein gesamtes Monats- oder Jahresmittel fehlen, so läßt sich dieses mit Hilfe der Methode der Reduktion auf eine einheitliche Periode leicht interpolieren, indem man die gefundene mittlere Differenz an den Wert des Vergleichsorts anbringt und so den interpolierten Wert erhält. Dabei wird der wahrscheinliche

Fehler eines so reduzierten Jahresmittels kleiner sein, als der eines Monatsmittels und dieser wiederum kleiner, als der Mittelwert für einen beliebigen Tag, da erwartet werden kann, daß die Abweichungen von einer mittleren, als konstant angenommenen Differenz bei größeren Zeiträumen immer kleiner werden. Entsprechendes gilt natürlich immer auch für die Quotienten bei der Bearbeitung von Niederschlagsreihen.

Interpolationen dieser Art sind selbstverständlich nur dann möglich, wenn an beiden Stationen zumindest während der n Jahre gleichzeitig beobachtet wurde. Fehlt in den M Jahren der Reihe von B dagegen ein Wert aus einer Zeit, als an der Station A noch nicht beobachtet wurde, so wird man zur Interpolation noch eine dritte Reihe hinzuziehen müssen, was erstens die Vervollständigung der Reihe B und dann auch die Rückberechnung der Reihe A ermöglicht.

6 Schlußbetrachtung

Die Reduktionstheorie eröffnet die Möglichkeit, mit Hilfe von Vergleichsstationen sowohl ausgefallene Beobachtungen zu ergänzen und damit eine Reihe erst brauchbar zu machen, als auch die Reihe eines Ortes zu verlängern, sofern eine Vergleichsreihe zur Verfügung steht, die eine Prüfung der relativen Homogenität ermöglicht. Man muß allerdings davor warnen, kritiklos die verschiedensten Werte aller möglichen Reihen in Bearbeitung zu nehmen und eine Homogenisierung mit anschließender Reduktion zu versuchen. Auf die Problematik eines Vergleichs der Monatsmittel von Berg- und Talstationen bzw. Küsten- und Binnenlandstationen wurde schon hingewiesen, noch problematischer, wenn nicht gar unmöglich ist es, nicht nur Mittel- oder Summenwerte, sondern einzelne Extrema zu reduzieren.

Generell sollte vor jeder Reduktion untersucht werden, ob sie auch zweckmäßig ist; dies ist nach ALISSOW u. a. (1) dann der Fall, wenn sich der reduzierte Wert von dem unbekannten 'wahren' Wert weniger unterscheidet als der Wert, der durch unmittelbare Ausrechnung aus der vorhandenen Beobachtungsreihe abgeleitet wurde.

Literatur

- (1) ALISSOW, B. P.; DROSDOW, O. A.; RUBINSTEIN, E. S.: Lehrbuch der Klimatologie. Berlin: VEB Dt. Verlag d. Wiss. 1956.
- (2) CONRAD, V.: Bemerkungen zur Homogenität meteorologischer Reihen. Ann. Hydr. 55 (1927) S. 92—93.
- (3) CONRAD, V.; SCHREIER, O.: Die Anwendung des Abbeschen Kriteriums auf geophysikalische Beobachtungsreihen. Gerl. Beitr. Geophys. 17 (1927) S. 372—378.
- (4) HELMERT, F. R.: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 3. Aufl. Leipzig, Berlin 1924.
- (5) KÖPPEN, W.; GEIGER, R.: Handbuch der Klimatologie. Bd. I. Allgemeine Klimalehre. Berlin: Borntraeger 1936.
- (6) MÜLLER-ANNEN, H.: Die Kälte der Winter im Norddeutschen Raum. T. 1. Einzelveröff. Seewetteramt Nr. 44 (1964).
- (7) PAESLER, M.: Die Temperaturmessungen in München 1781—1968. Wiss. Mitt. Meteorol. Inst. München Nr. 19 (1970).
- (8) RUBINSTEIN, E.: Die Differenz der mittleren Monats-temperatur zweier benachbarter Stationen als eine meteorologische Konstante. Meteorol. Z. 39 (1922) S. 348—353.
- (9) SCHMIDT, A.: Über die Frage nach der Häufigkeit von Monatsfolgen gleichsinniger Temperaturabweichungen. Meteorol. Z. 38 (1921) S. 50—53.
- (10) TENTER, K.: Die Anwendbarkeit der Differenzenmethode zwischen Berg- und Talstationen. Diplomarbeit Meteorol. Inst. München, 1967.
- (11) THOM, H. C. S.: Some methods of climatological analysis. Geneva: WMO 1966 = WMO Tech. Note No. 81 (Publ. No. 199).

2 C.-D. SCHÖNWIESE, Frankfurt Stichprobenbeschreibung

1 Grundlagen

Grundlage der statistisch-klimatologischen Analyse sind meist Stichprobendaten, die sich auf eine bestimmte klimatologische Größe wie z. B. Lufttemperatur, Niederschlagsmenge oder Windgeschwindigkeit beziehen. Dies schließt auch Datentypen ein, die als ursächlich für das Klima angesehen werden (z. B. extraterrestrische Sonnenstrahlung, CO_2 -Gehalt der Atmosphäre, orographische Daten). Die Einzelheiten, die Problematik und der physikochemische Hintergrund der Daten sollte zwar vor der statistischen Analyse möglichst klar sein, ist aber nicht Gegenstand der eigentlichen Statistik.

Eine Stichprobe (im folgenden mit SP abgekürzt) ist eine nicht zu kleine (Richtwert für den Umfang: $n \geq 30$ Werte; $n < 30$ wird in der Statistik häufig als „kleine SP“

bezeichnet), aber begrenzte Auswahl von Daten, die dem zugehörigen größeren Kollektiv, der Grundgesamtheit oder Population (im folgenden mit GG abgekürzt), entstammt. Die GG enthält die Menge aller möglichen Daten eines spezifizierten Vorgangs, während die SP eine Teilmenge davon ist. „Zugehörig“ bedeutet, daß es sich bei SP und GG um den selben Vorgang handelt bzw. um die selben Randbedingungen.

SP-Beschreibungen sind nur dann sinnvoll, wenn die GG im Gegensatz zur SP unbekannt und somit nur die letztere zugänglich ist, zumindest im Augenblick der Analyse, und wenn die SP der vermuteten GG signifikant ähnlich ist (s. Beiträge 3—5). Manche GGs sind unendlich, d. h. umfassen unendlich viele Daten und sind damit prinzipiell unbekannt, manche

endlich und möglicherweise zu einem späteren Zeitpunkt bekannt.

Klimatologische Daten gehören i.a. zu unendlichen GGs. Häufig liegen sie in Form von Zeitreihen vor, d.h. Datenwerte bezogen auf bestimmte äquidistante Zeitpunkte (z. B. stündliche Messungen)

$$a_i(t_i); t_{i+1} - t_i = \Delta t = \text{konst.}; i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Im Gegensatz zu stochastischen Prozessen ist Stationarität praktisch nie gegeben, d.h. die Momente (Mittelwert, Varianz usw.) konvergieren nicht bzw. sind zeitlich nicht konstant. Dies muß bei der SP-Beschreibung berücksichtigt werden, z.B. durch geeignete Filter-Techniken (Beitrag 6), und erschwert sehr den Schluß auf die zugehörige GG. Oft ist es sinnvoll, sich auf bestimmte Klimazustände zu beschränken bzw. die Randbedingungen relativ eng zu definieren.

Vor der statistischen Analyse klimatologischer Daten, gleich ob Zeitreihe oder nicht, müssen folgende Fragen geklärt sein:

— Systematische Fehler, einschließlich Inhomogenität? Bei späteren Überprüfungen von Meßdaten werden systematische Fehler nicht immer offenbar. Die stillschweigende Annahme, daß die Messungen keine systematischen Fehler enthalten, ist ebenso häufig wie bedenklich, insbesondere bei älteren Messungen. (Zur Homogenisierung s. Beitrag 1.)

— Genauigkeit, d.h. Belastung mit zufälligen Fehlern? Nach der Gaußschen Fehlertheorie müssen pro SP-Wert mehrere Messungen möglichst großer Genauigkeit vorliegen, die dann i.a. numerisch ungleich sind. Die Fehlerbelastung, d.h. das Unsicherheitsintervall eines Einzelwertes beträgt

$$f_a = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \epsilon_i^2}, \quad (2)$$

wobei ϵ_i die Abweichungen vom arithmetischen Mittelwert sind, der als „Bestwert“ $\bar{a}$ der Messung 'nur' eine Fehlerbelastung von

$$f_a = \pm \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum \epsilon_i^2} \quad (3)$$

aufweist (Summierung, soweit nicht anders angegeben, jeweils über $i = 1, \dots, n$). Einzelheiten der Fehlerrechnung können aus der am Ende dieses Beitrages angegebenen Literatur entnommen werden.

Häufig liegen bei den zu bearbeitenden Daten die Ergebnisse der Fehlerrechnung nicht vor. In solchen Fällen sollte zumindest eine Genauigkeitsschätzung vorgenommen werden. Aussagen über f_a sind möglicherweise durch Geräteangaben oder besser neue Versuchsmessungen reproduzierbar. Wie die obigen Formeln zeigen, nimmt bei jeder Mittelwertbildung der Fehler um den Faktor $1/\sqrt{n}$ ab; dies gilt allerdings nur, wenn wie bei der Gaußschen Fehlertheorie von einer Normalverteilung der Daten ausgegangen werden kann (Fehlerverteilungsgesetz). In jedem Fall dürfen die Daten nicht genauer als $\pm f$ angenommen werden.

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß die oben genannten Voraussetzungen erfüllt sind, die Daten in diskreter Form und gleichem vertretbarem Genauigkeitsgrad vorliegen und alle erforderlichen Informationen (Maßeinheiten, Meßort und -zeit, Umgebung usw.) bekannt sind. Auf Zeitreihen wird häufig Bezug genommen; es kann sich jedoch auch um andere Datensätze handeln.

2 Mittelungsmaße

Die einfachste Art der SP-Beschreibung ist die Angabe mittlerer Werte. Der bereits genannte häufig verwendete arithmetische Mittelwert $\bar{a}$ kann in gewichteter (gewogener) Form

$$\bar{a}_w = \frac{1}{\sum w_i} \sum w_i a_i \quad (4)$$

verwendet werden, wobei die Gewichte w_i je nach Meßgenauigkeit, Zeitintervall, Fläche usw. (d.H. Bezug) frei wählbar sind. (Beim ungewichteten Mittel sind alle Gewichte $w_i = 1$.) Soweit keine symmetrischen eingipfeligen Verteilungen vorliegen, sollten auch Modus (= Gipfelwert, häufigster Wert) und Median (= Zentralwert) bestimmt werden (vgl. Tab. 1 und Abb. 1).

Arithmetisch über gleiche aneinandergereichte Intervalle gemittelte Zeitreihen sind wiederum Zeitreihen, deren Daten sich nun jedoch auf die Zentren dieser Intervalle beziehen (z.B. Stundenwerte → Tagesmittel → Monatsmittel usw.). Die übergreifende Mittelung ist eine (denkbar ungünstige) Art der Tiefpaßfilterung, auf die im Beitrag 6 eingegangen wird.

3 Variationsmaße

Neben den Mittelungsmaßen gehört zur SP-Beschreibung auch die Kennzeichnung der Variationen von Wert zu Wert. Die dafür üblichen Variations- oder Dispersionsmaße sind folgende:

— Variationsbreite (Schwankungsbreite, Spannweite, Extremwertbereich)

$$b = a_{\max} - a_{\min} \quad (\text{Differenz zwischen Maximum und Minimum des Datensatzes}), \quad (5)$$

— durchschnittliche Abweichung

$$d = \frac{1}{n} \sum |a_i'| \quad \text{mit } a_i' = a_i - \bar{a} \quad (6)$$

(falls die a_i -Werte Jahresmittel sind, spricht man auch von der interannuellen Variabilität),

— Standardabweichung (Streuung, Dispersion)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum a_i'^2} \quad (7)$$

und Varianz s^2 ,

— Variationskoeffizient (Variabilität, Relativstreuung)

$$v = \frac{s}{\bar{a}}, \quad \text{meist prozentual angegeben.} \quad (8)$$

Die Standardabweichung ist im Fall einer normalverteilten GG genau der Abstand zwischen Mittelwert und (rechts- bzw. linksseitigem) Wendepunkt der Verteilungskurve, wird aber auch bei nicht normalverteilten SPs bzw. GGs verwendet. Auf dem Titelbild, obere blaue Kurve, ist eine Zeitreihe dargestellt, die zugleich Intervallmittelwerte (Jahresdaten), Abweichungen von einem Mittelwert eines größeren Intervalls (1946–1960), sog. Anomalien, und räumlich gemittelte Werte (Nordhemisphäre) beinhaltet (Temperatur). Der untere Bildteil gibt übergreifende Varianzen für zehnjährige Intervalle wieder.

4 Häufigkeitsverteilung

Die Bestimmung der empirischen Häufigkeitsverteilung gehört zur SP-Beschreibung und soll hier nicht in Zusammen-

hang mit theoretischen Verteilungen (s. Beitrag 3) gesehen werden. Trotzdem versucht man, mit Hilfe der Klasseneinteilung von den SP-Zufälligkeiten weg in Richtung zu den Gegebenheiten der GG zu kommen.

Für die optimale Anzahl K der Klassen liegen verschiedene empirische Formeln vor, z. B.

— STURGES (1926): $K = 1 + 3.32 \times \log n$, (9)

— STRAUCH (1956): $K = 1 + \frac{\log n}{\log 2}$, (10)

— PANOFKY u. BRIER (1958): $K = 5 \times \log n$, (11)

wobei n wie bisher der SP-Umfang und log der dekadische Logarithmus ist. Die ersten beiden Formeln liefern fast gleiche, die dritte Formel etwas höhere Schätzwerte für K. Ist K abgeschätzt, so werden zwischen $a_{\min}$ und $a_{\max}$ K gleich große aneinander grenzende Wertintervalle festgelegt, die Klassen. Falls eine leere Klasse entsteht (ohne Datenwert, Klassenbesetzungszahl null), ist K — 1 zu wählen; prinzipiell sollte im Zweifel eher mit einer kleineren Klassenzahl gearbeitet werden. Bei $j = 1, \dots, K$ Klassen erhält man so die absoluten Häufigkeiten H_j , die auch relativ (jeweils durch ΣH_j dividiert $j = 1, \dots, K$) oder relativ prozentual ausgedrückt werden können; (vgl. Tab. 1 und Abb. 1). Die stufenweise Addition

$$H_1, H_1 + H_2, H_1 + H_2 + \dots + H_K \quad (12)$$

führt zu den kumulativen (Summen)-Häufigkeiten, die sich ebenfalls relativ oder relativ prozentual ausdrücken lassen. Die letztgenannte Darstellung, die hier mit PKH abgekürzt wird, erlaubt für jede Klassenobergrenze g die Aussage, wieviel Prozent der Werte im Bereich $\leq g$ liegen. Umgekehrt lassen sich von den Ordinatenwerten ausgehend graphisch die Dezile (10%-Stufen), Quartile (25%-Stufen) u. a. festlegen. Bei PKH = 50% liegt der Median (Abb. 1).

Tab. 1: Beispiel einer Häufigkeitsverteilung (H = absolut, KH = kumulativ) für die im Titelbild (obere blaue Kurve) dargestellten Jahresdaten 1881—1980. (Klassenzahl $K \approx 7.6 - 7$); vgl. auch Abb. 1 und Anhang.

Klasse		H	KH	Maßzahlen (Auswahl)
Unter- grenze	Ober- grenze			
—0.81	—0.65	2	2	$n = \Sigma H = KH_{\max} = 100$;
—0.64	—0.48	13	15	$\bar{a} \approx -0.16$;
—0.47	—0.31	18	33	Modus = 0.12 (Klassenmitte
—0.30	—0.14	16	49	der Klasse mit größter Häu-
—0.13	0.03	20	69	figkeit); Median ≈ -0.16
0.04	0.20	27	96	(a. Abb. 1); $s \approx 0.27$; $Sf \approx$
0.21	0.37	4	100	-0.30 ; $Ex \approx -0.86$.

$$(PKH_i = KH_i / KH_{\max} \times 100\%)$$

Die absolute oder relative (oder relative prozentuale) Häufigkeitsverteilung erlaubt zunächst eine grobe Festlegung des Verteilungstyps: Gleichverteilung (alle Werte mit ungefähr gleicher Häufigkeit), eingipfelig (unimodal, insbesondere Normalverteilung, s. Beitrag 3), zweigipfelig usw. (bimodal, trimodal usw.), nach rechts ansteigend (inversive J-Vertei-

lung) oder beidseitig ansteigend mit den geringsten Häufigkeiten in der Mitte (U-Verteilung). Die Klassenmitte mit der größten Häufigkeit, soweit festlegbar, ist der Modus (ggf. primär, sekundär usw. bei mehrgipfeligen Verteilungen).

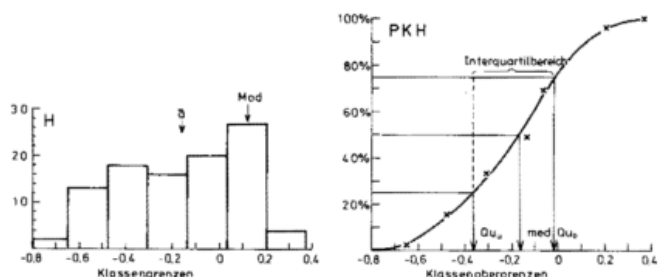


Abb. 1: Links absolute Häufigkeitsverteilung (H mit arithmetischem Mittelwert $\bar{a}$ und Modus Mod), rechts prozentuale kumulative Häufigkeitsverteilung (PKH, Kreuze und geschätzte Kurve mit Median Med sowie unterem und oberem Quartil Qu_0, Qu_{100}) des Beispiels Tab. 1 (bzw. Titelbild, obere blaue Kurve). Der Interquartilbereich $Qu_0 - Qu_{100}$ ist ein von der Normalverteilung unabhängiges Variationsmaß.

Die in der Klimatologie besonders häufige eingipfelige Verteilung muß nicht symmetrisch sein. Ist sie es, so gilt für SPs $\bar{a}$ (arithmetischer Mittelwert) = Mod (Modus) = Med (Median). Falls aber

$$\frac{1}{s} (\bar{a} - \text{Mod}) > 0 \quad (13)$$

ist, spricht man von positiver Schiefe, andernfalls (< 0) von negativer Schiefe (auch Linksteile und Rechtsteile). Niederschlagswerte und besonders sog. seltene Ereignisse (z. B. starke Windböen, Extremwerte) weisen meist positiv schiefe Verteilungen auf, in Extremfällen bis zur inversiven J-Verteilung. Beim Wolkenbedeckungsgrad findet man dagegen meist U-Verteilungen.

Der Exzeß (Wölbung, Kurtosis) wird i. a. relativ zur Normalverteilung (s. Beitrag 3) gesehen und als positiv (leptokurtisch) im Fall eines steilen Verlaufs (nicht zu verwechseln mit unterschiedlicher Standardabweichung bei Normalverteilung!) bzw. als negativ (platykurtisch) im Fall eines flacheren Verlaufs bezeichnet.

Das Konzept der Momente, und zwar

— m-tes Moment $M_m = \frac{1}{n} \Sigma a_i^m$ (14)

mit M_1 = arithmetischer Mittelwert

— m-tes zentrales Moment $ZM_m = \frac{1}{n} \Sigma (a_i - \bar{a})^m$ (15)

mit $ZM_2 \approx$ Varianz

wird häufig zur Festlegung der Maßzahlen für Schiefe und Exzeß (betreffende Momentkoeffizienten) verwendet:

$$\text{Schiefe } Sf = \frac{ZM_3}{s^3}, \quad (16)$$

$$\text{Exzeß } Ex = \frac{ZM_4}{s^4} - 3, \quad (17)$$

wobei sich in beiden Fällen für die Normalverteilung der Wert null ergibt. (Manche Autoren verzichten in (17) auf die Subtraktion, so daß der Normalverteilung $Ex = 3$ zukommt.)

Wie bereits gesagt, ist die Stationarität durch die Konvergenz bzw. Konstanz (ab $n_{\min}$ bei begrenzter Genauigkeit) der Momente definiert. Sie ist bei zufälligen (stochastischen) Prozessen gegeben, jedoch i. a. nicht bei klimatologischen.

Abweichungen von der Normalverteilung können es als sinnvoll erscheinen lassen, an Stelle des arithmetischen Mittelwertes den Median, an Stelle der Standardabweichung die durchschnittliche Abweichung vom Median oder Dezil- bzw. Quartilabstände (vgl. Abb. 2) zu verwenden. Ob eine SP-Häufigkeitsverteilung mit einer bestimmten theoretischen GG-Verteilung vereinbar ist oder signifikant davon abweicht, läßt sich durch die entsprechenden Testverfahren (s. Beitrag 5) entscheiden.

5 Vektorielle Stichproben

Vektorielle SPs sind nicht als Datenreihe, sondern als Datenmatrix

$$SP_{i,j} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

mit $i = 1, \dots, n$ Zeilen und $j = 1, \dots, m$ Spalten

gegeben (z. B. n Vektoren der Dimension m ; diese Matrix ließe sich auch als Skalarfeld bezüglich bestimmter Ortskoordinaten auffassen, wir bleiben hier aber beim Vektorenbeispiel).

An die Stelle des arithmetischen Mittelwertes tritt nun das arithmetische Mittelzentrum

$$MZ_m = \{\bar{a}_1 = \frac{1}{n} \sum a_{i1}; \bar{a}_2 = \frac{1}{n} \sum a_{i2}; \bar{a}_3 = \frac{1}{n} \sum a_{i3}; \dots; \bar{a}_m = \frac{1}{n} \sum a_{im}\}, \quad (19)$$

$$MZ_3 = \{\bar{a}_x; \bar{a}_y; \bar{a}_z\} \text{ im dreidimensionalen Fall,} \quad (20)$$

das mit dem Mittelvektor identisch ist. Es werden hierzu einfach komponentenweise die arithmetischen Mittelwerte bestimmt. Die Abbildung 2 (s. auch Tab. 2) veranschaulicht dies an einem extrem einfachen zweidimensionalen Windvektorbispiel. Den vektoriellen Median, das Medianzentrum MedZ, erhält am einfachsten graphisch durch komponentenweise Bestimmung der prozentualen kumulativen Häufigkeitsverteilungen und der Abszissenwerte für PKH = 50% (vgl. Abb. 1).

Das meist verwendete vektorielle Variationsmaß ist die Standarddistanz

$$SD = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (a_{i1}'^2 + a_{i2}'^2 + \dots + a_{im}'^2)} \quad (21)$$

$$\text{mit } a_{i1}' = a_{i1} - \bar{a}_1; a_{i2}' = a_{i2} - \bar{a}_2 \text{ usw.} \quad (22)$$

bzw. die vektorielle Varianz SD^2 . Die Größe SD kann man sich im zweidimensionalen Fall als einen Kreis und im dreidimensionalen Fall als eine Kugel vom Wert SD um MZ (bzw.

MedZ) vorstellen (s. Abb. 2). Weitere Hinweise zu SPs, die Vektoren oder Skalarfelder sind, siehe z. B. BAHRENBURG und GIESE (1975) sowie PANOFKY und BRIER (1958).

Die graphische Darstellung vektorieller Häufigkeitsverteilungen ist im zweidimensionalen Fall als Polar- oder Isoplethendiagramm möglich. Dreidimensionale Isoplethendarstellungen sind wegen des Aufwandes kaum im Gebrauch. In Tabellenform lassen sich dagegen beliebig viele Dimensionen (natürlich auch hier mit pro Dimension steigendem Aufwand) handhaben. Vielfach wird die vektorielle SP-Beschreibung dadurch umgangen, daß auf jede Komponente getrennt die skalare SP-Beschreibung angewandt wird. Dies ist allerdings nicht immer sinnvoll.

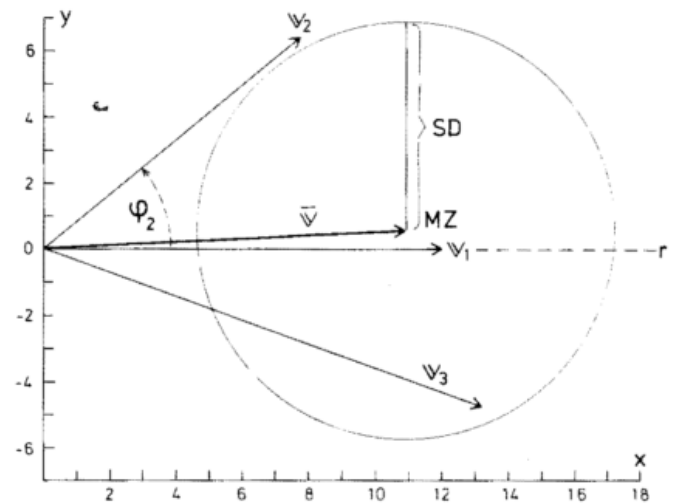


Abb. 2: Einzelvektoren v_{1-3} , Mittelvektor $\underline{v}$ und vektorielle Standardabweichung (Standarddistanz SD) des Beispiels in Tabelle 2.

Tab. 2: Beispiel zur Errechnung des Mittelvektors und der vektoriellen Standardabweichung (Standarddistanz) für die in der linken Spalte angegebenen horizontalen Winddaten; vgl. auch Abb. 2.

meteorolog.		Koordinaten				Abweichungs-	
α_i	v_i	polar		kartesisch		werte	
	(m/s)	r_i	φ_i	x_i	y_i	$x_i'^2$	$y_i'^2$
270°	12	12	0°	12	0	1.12	0.30
230°	10	10	40°	7.66	6.43	10.76	34.57
290°	14	14	340°	13.16	-4.79	4.93	28.52
Summen			→	32.82	1.64	16.81	63.39

$$MZ = \{32.82/3, 1.64/3\} \approx \{10.94, 0.55\} - \alpha = 267^\circ$$

$$v = 11 \text{ (m/s);}$$

$$SD = \sqrt{1/2(16.81 + 63.39)} \approx 6.33 \text{ (komponentenweise: } SD_x = 2.90, SD_y = 5.63)$$

Literatur

Bezüglich allgemeiner Stichprobenbeschreibung siehe Bibliographie am Schluß der Einführung. Hinweise zur Fehlerrechnung enthalten unter anderem:

- (1) BRADDICK, H. J. J.: Die Physik des experimentellen Arbeitens. Berlin: VEB Dt. Verl. d. Wiss. (1959).

- (2) BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. Zürich: Deutsch (1966).
- (3) KREYSZIG, E.: s. Bibliographie (Einführung).
- (4) WESTPHAL, H. W.: Physikalisches Praktikum. Braunschweig: Vieweg 1961.
- (5) ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik. Berlin: Springer 1963.

Anhang: Datenbasis

Damit der Leser die Beispiele des vorliegenden Beitrags sowie der Beiträge 4—6 nachvollziehen kann, sollen die Jahresanomaliedaten der nordhemisphärischen Mitteltemperatur (s. Titelbild, obere blaue Kurve) nach JONES, P. D.; WIGLEY, T. M. L.: Northern hemisphere temperatures, 1881—1979 (Clim. Monitor 9 (1980) S. 43—47 und "update tables" späterer Jahrgänge dieser Zeitschrift) aufgelistet werden. Das Titelbild ist entnommen aus: SCHÖNWIESE, C.-D.: Northern hemisphere temperature statistics and forcing (Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimat., im Druck).

Jahr	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1880		−0.57	−0.52	−0.62	−0.79	−0.71	−0.61	−0.60	−0.64	−0.30
1890	−0.37	−0.53	−0.62	−0.63	−0.30	−0.50	−0.34	−0.27	−0.38	−0.22
1900	−0.10	−0.12	−0.47	−0.40	−0.43	−0.31	−0.16	−0.59	−0.39	−0.39
1910	−0.38	−0.30	−0.53	−0.33	−0.14	−0.07	−0.31	−0.61	−0.38	−0.32
1920	−0.15	0.05	−0.08	−0.05	−0.11	0.02	0.17	−0.02	0.11	−0.22
1930	0.13	0.16	0.08	−0.29	0.08	−0.05	−0.01	0.18	0.36	0.19
1940	0.11	0.11	0.08	0.18	0.25	−0.06	0.14	0.19	0.08	0.03
1950	−0.13	−0.02	0.06	0.31	−0.01	−0.08	−0.35	−0.02	0.10	0.07
1960	0.07	0.06	0.08	0.04	−0.30	−0.28	−0.21	−0.05	−0.31	−0.19
1970	−0.14	−0.20	−0.42	0.11	−0.30	0.00	−0.32	0.13	−0.10	0.00
1980	0.08	0.48	(−0.47)							

Alle Daten in °C als Abweichung vom Mittelwert 1946—1960.

3 Verteilungen

G. BERZ, München

1 Einleitung

Die Beschreibung zufallsartiger Massenerscheinungen als Grundaufgabe der Statistik zielt stets auf eine Darstellung mit Hilfe einer möglichst geringen Zahl von Kenngrößen ab. Dadurch soll die schon erwähnte Grundgesamtheit überschaubar, ihre wesentlichen Merkmale erkennbar werden.

Alle Information über eine Grundgesamtheit, in der die Reihenfolge der Einzeldaten keine Rolle spielt — sonst muß die sog. „Erhaltungsneigung“ berücksichtigt werden —, steckt in ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion). Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit jeder einzelne Wert einer Zufallsvariablen bei einem Versuch (bei einer Messung) zu erwarten ist.

Die bekannteste Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Gaußsche Normalverteilung oder die „Glockenkurve“. Aber bei weitem nicht alle Größen — und gerade auch meteorologische nicht — verhalten sich so, daß Abweichungen vom Durchschnitt mit zunehmendem Abstand rasch an Wahrscheinlichkeit verlieren. Unter den zahlreichen schiefen,

mehrgipfligen oder sonstwie abweichenden Verteilungen gibt es sogar solche, bei denen die größten Abweichungen auch die größte Wahrscheinlichkeit aufweisen und der Mittelwert die kleinste (bekannte Beispiele: Pendellagen, Bedeckungsgrad). Trotz allem würde sich bei einer Darstellung der Verteilung aller möglichen Verteilungsformen zumindest in den Naturwissenschaften wohl wieder so etwas wie eine Glockenkurve ergeben. Die Normalverteilung ist und bleibt die Richtschnur!

Zu der kleinen Zahl grundsätzlicher Modellverteilungen, die teilweise allgemeinen wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen entstammen, gesellen sich immer mehr „praktische“ Verteilungen, die nahezu ausschließlich den Zweck verfolgen, gegebene Populationen mit möglichst wenigen Parametern möglichst gut zu beschreiben und dabei möglichst wenig Rechenzeit zu benötigen. Dabei kann es vorkommen, daß eine plötzlich zum großen Hit wird wie die Weibull-Verteilung (als Normalverteilungs-Double) und um andere (Pearson I, II, III oder IV für Extremwind- und Niederschlagsverteilungen) regelrechte Glaubenskriege entbrennen.

2 Diskrete Zufallsereignisse

Aber beginnen wir beim Einfachsten, beim Urnenmodell mit seinen schwarzen und weißen Kugeln:

Ist p der Anteil der schwarzen Kugeln an der Gesamtzahl, dann ist auch die Wahrscheinlichkeit, daß bei einmaligem Ziehen „schwarz“ erscheint, gleich p , die für „weiß“ entsprechend $1-p$.

Die Unabhängigkeit der einzelnen Ergebnisse läßt sich einfach durch Zurücklegen der gezogenen Kugeln erreichen; dann gilt für aufeinanderfolgende Ergebnisse die „Multiplikationsregel der Wahrscheinlichkeitslehre“: Wahrscheinlichkeit für „zweimal schwarz“ = $p \cdot p$, $W(sswsswws) = p^5 (1-p)^3$ etc. Kommt es nicht auf eine spezielle Reihenfolge an, sondern nur auf die Häufigkeit „ m -mal schwarz, $(n-m)$ -mal weiß“, dann erhöht sich die Zahl der Möglichkeiten nach den Regeln der

Kombinatorik um den Faktor $k = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ und es folgt die bekannte Bernoulli-Formel für die „binomiale Wahrscheinlichkeitsverteilung“:

$$W_n(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}. \quad (1)$$

In dieser Verteilung, die nur für ganzzahlige Werte von m und n definiert ist, hat, wie sich leicht denken läßt, derjenige Wert von m die höchste Wahrscheinlichkeit, für den $\frac{m}{n}$ am nächsten bei p liegt. Die Berechnung wird für große Werte von n und m recht aufwendig, selbst dann, wenn man die Stirlingsche Näherungsformel $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ benutzt. Grundsätzliche Voraussetzung ist die statistische Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse, was die Anwendbarkeit auf viele meteorologische „schwarz/weiß“- bzw. „ja/nein“-Ereignisse wie z. B. Tage mit/ohne Regen, Gewitter, Hagel oder Ähnliches in Frage stellt. Stattdessen geben die Abweichungen von der Binomialverteilung einen Hinweis auf eine evtl. vorhandene Erhaltungsneigung.

Auf viele naturwissenschaftliche Fragestellungen (Beispiele: Erdbeben, Starkregen und allgemeine Extremereignisse) ist das Konzept des „seltenen“ Ereignisses anwendbar, das die Forderung nach statistischer Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse erfüllt. Pro Beobachtungsintervall wird festgestellt, ob das Ereignis eingetreten ist oder nicht, was im allgemeinen dazu führt, daß die Zahl n der Intervalle groß und die Wahrscheinlichkeit p pro Intervall sehr klein wird (Abb. 1). Mit dem endlichen Produkt $n \cdot p$, das der mittleren Anzahl der Ereignisse pro Intervall entspricht, läßt sich aus der Bernoulli-Formel die Wahrscheinlichkeit für m Ereignisse in einem Intervall ableiten:

$$W(m) = \frac{(n \cdot p)^m}{m!} \cdot \exp(-n \cdot p), \quad (2)$$

bekannt als Poisson-Verteilung für seltene Ereignisse. Das Maximum dieser Verteilung liegt bei dem — ganzzahligen — Wert von m zwischen $n \cdot p$ und $n \cdot p - 1$.

Häufig ist nach der Verteilung der Zeitabstände τ zwischen seltenen Ereignissen gefragt, die sich aus oben zu

$$W(\tau) = \frac{\Delta\tau}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \quad (3)$$

ergibt, wenn T der mittlere Abstand zweier Ereignisse ist und $\Delta\tau$ die Länge der Beobachtungsintervalle. Diese Art der Poisson-Formel hat den Vorteil, daß sich beim Auftragen der

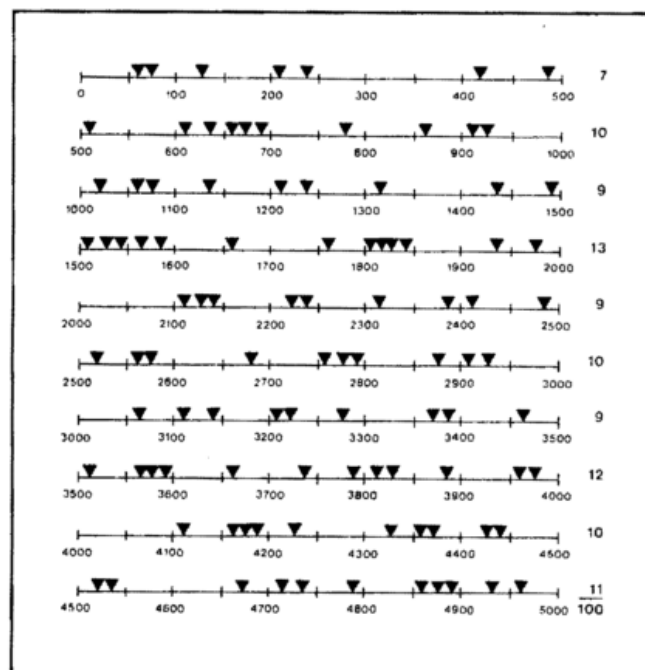


Abb. 1: Poisson-verteiltes, zufälliges Eintreten von 50-Jahre-Ereignissen in einem Zeitraum von 5000 Jahren; veranschaulicht die unsichere Ableitung von Eintrittswahrscheinlichkeiten bei kurzen Beobachtungszeiten.

Anzahl (logarithmisch) der beobachteten Fälle gegen den Zeitabstand (linear) eine Gerade ergeben sollte, die die Überprüfung der statistischen Unabhängigkeit und die Extrapolation der Beziehung sehr vereinfacht.

3 Kontinuierliche Zufallsgrößen

3.1 Verteilungsfunktion

Beobachtungen von Zufallsgrößen werden gerade in der Meteorologie und in anderen naturwissenschaftlichen Bereichen zumeist nicht in Form diskreter Ereignisse, sondern kontinuierlich veränderlicher Meßgrößen gewonnen. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsaussagen können dann nicht mehr auf einen bestimmten Wert, sondern nur noch auf einen — u. U. infinitesimalen — Wertebereich bezogen werden, z. B. durch die Verteilungsfunktion

$$F(x) = W(\xi < x)$$

für die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsgröße ξ unterhalb eines Wertes x liegt. $F(x)$ bewegt sich zwischen den Grenzen 0 für das kleinstmögliche x und 1 für das größtmögliche und entspricht somit der geläufigeren Summenhäufigkeitskurve. Die 1. Ableitung nach x wird als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x) = dF/dx$ der Zufallsgröße ξ an der Stelle x bezeichnet. Da das Integral über diese Funktion immer endlich bleibt (Maximalwert 1), muß sie mindestens 1 Maximum haben. Diese Stelle x_w , an der die Steigung 0 wird, heißt „wahrscheinlichster Wert“; gebräuchlicher ist jedoch die englische Bezeichnung „Mode“ (Modus).

3.2 Momente, Quantile

Neben dieser wichtigen Kenngröße einer Verteilung gibt es noch andere Parameter, die den Verlauf kennzeichnen, auf die also genaugenommen die gesamte Information über die

Zufallsgröße und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung komprimiert werden kann. Am wichtigsten sind die „Momente“

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx, \quad (4)$$

vor allem der „Erwartungswert“, die „Dispersion“ (Varianz), die „Schiefe“ und der „Exzeß“, die den Schwerpunkt, die Streuung, die Neigung und die „Schlankheit“ der Verteilungskurve angeben. Viele statistische Verfahren zielen auf eine näherungsweise Bestimmung dieser ersten 4 Momente ab; Momente höherer Ordnung haben keine Bedeutung (s. auch Beitrag 2).

Von großem praktischen Nutzen sind die „Quantile“, die einfach als Punkte auf der Wahrscheinlichkeitsverteilung deren Verlauf beschreiben. So gibt das 0.5-Quantil, der „Median“, die Stelle an, oberhalb bzw. unterhalb der 50% aller Werte liegen. Analoges gilt für die 0.25- und 0.75-Quantile („Quartile“), die „Dezile“, „Perzentile“ etc. . . Als Vergleichsgrößen zu Modellverteilungen werden auch die Abstände dieser Quantilpaare benutzt (s. Abb. 1 in Beitrag 2).

4 Normalverteilung

Die praktische statistische Auswertung der Beobachtungsdaten einer Zufallsgröße zielt sehr häufig auf einen Vergleich mit einer Modellverteilung ab. Das beliebteste und wohl auch bewährteste Modell ist die Gaußsche Normalverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (5)$$

die also lediglich von 2 Parametern, nämlich dem Erwartungswert μ , der hier wegen der Symmetrie mit dem Mode und dem Median zusammenfällt, und der Dispersion σ^2 , abhängt. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist ungünstigerweise nicht geschlossen integrierbar.

In der Meteorologie sind tatsächlich viele Meßgrößen normalverteilt, vor allem solche, die symmetrisch um einen Mittelwert streuen und weit genug von den Grenzen des physikalisch möglichen Wertebereichs wegliegen wie z.B. Lufttemperaturwerte, Luftdruckwerte, Niederschlagssummen in Gebieten mit durchschnittlich über 500 mm Jahresniederschlag, Windgeschwindigkeitswerte über etwa 5 m/s und ähnliches (Abb. 2).

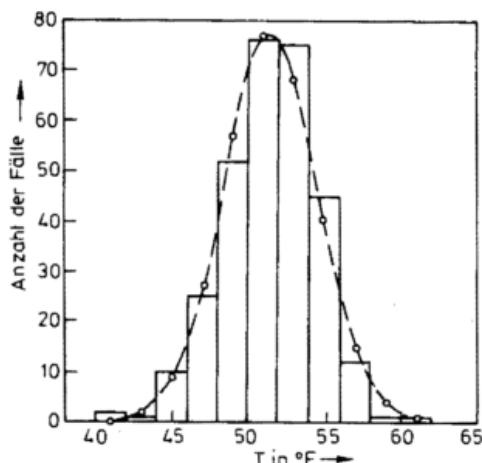


Abb. 2: Häufigkeitsverteilung der April-Temperaturen (13^h) in Scilly (gestrichelt: Gaußsche Normalverteilung), nach BROOKS und CARRUTHERS, 1953.

Die Überprüfung der Gauß-Ähnlichkeit erfolgt in der Praxis am einfachsten durch Eintragen der Summenhäufigkeiten in das Gaußsche Wahrscheinlichkeitspapier. Liegen die beobachteten Häufigkeiten auf einer Geraden, dann liegt eine Normalverteilung vor. Zufällige oder systematische Abweichungen davon lassen sich auf diese Weise ebenfalls gut beurteilen. Aus dem Wahrscheinlichkeitspapier können Schätzwerte für den Erwartungswert und die Dispersion ebenso wie für die verschiedenen Quantile unmittelbar abgelesen werden (Abb. 3).

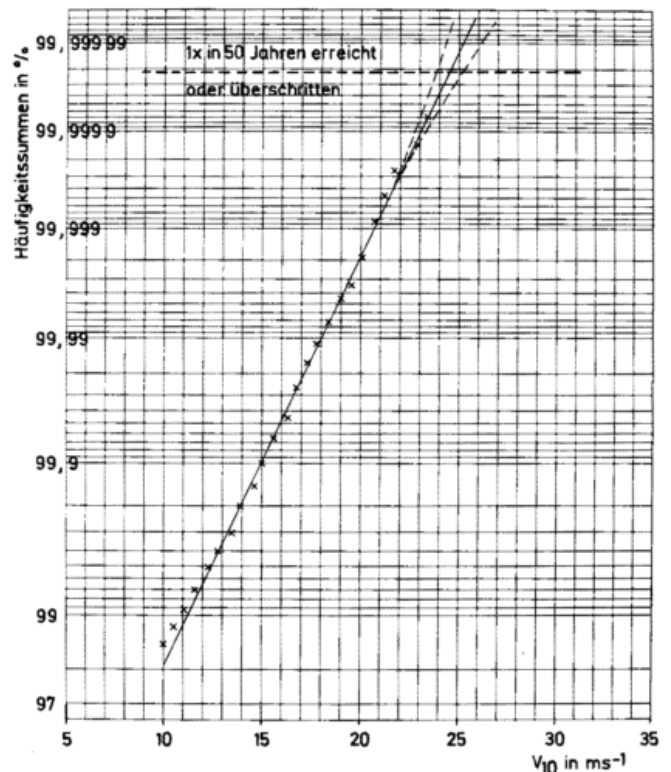


Abb. 3: Darstellung der 10 min-Mittelwerte der Windgeschwindigkeit in 10 m Höhe in Garching b. München (1964–1981) im Gaußschen Wahrscheinlichkeitspapier, nach SCHROERS und LÖSSLEIN, Meteorol. Rdsch. 1983).

Hier noch einige Werte: Die Quartile einer Normalverteilung liegen bei $\mu \pm 0.67 \cdot \sigma$, die Dezile bei $\mu \pm 1.28 \cdot \sigma$ und die Perzentile bei $\mu \pm 2.33 \cdot \sigma$. Umgekehrt liegen im Bereich $\mu - \sigma$. . . $\mu + \sigma$ schon 68.3%, im 2σ -Bereich 95.4% und im 3σ -Bereich über 99.7% aller Werte. Weil demnach oberhalb bzw. unterhalb von $\mu \pm 3\sigma$ jeweils nur noch etwa $1/1000$ der Werte liegen, wird dieser Wert gerne als Unwahrscheinlichkeitsgrenze bzw. Überzufälligkeitsgrenze verwendet.

Mit Hilfe der einfachen Variablentransformation $u = (x-\mu)/\sigma$ können Normalverteilungen in die Standard-Normalverteilung

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right) \quad (6)$$

überführt werden, für die Tabellen der Verteilungsfunktion vorliegen.

Auch einige typische Abweichungen von der Normalverteilung lassen sich durch Transformationen lösen, so z.B. die

„logarithmisch-normale“ Verteilung, bei der man durch Logarithmieren der Variablenwerte eine Normalverteilung erhält. Diese Verteilungsform tritt bei allen Zufallsgrößen auf, deren Zuwachs dem Wert der Größe proportional ist, z. B. bei Körpergewichten, Einwohnerzahlen, Aerosolgrößen etc. . . Auch für die Beschreibung von Niederschlagssummen ist diese Verteilung schon mit viel Erfolg eingesetzt worden (Abb. 4).

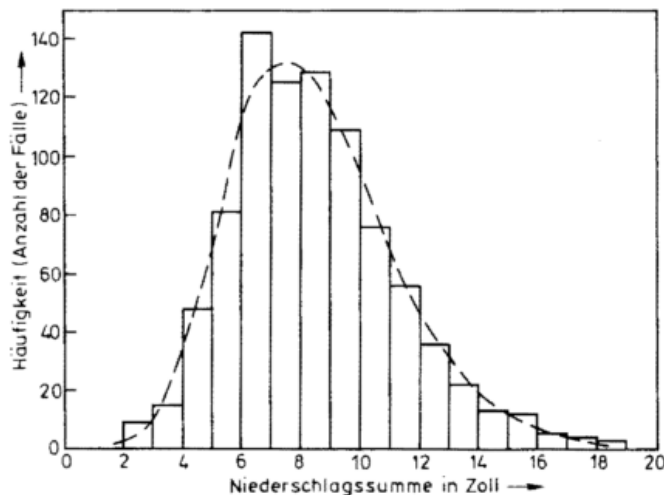


Abb. 4: Häufigkeitsverteilung der gleitenden 4monatigen Niederschlagssummen in Camden-Square (gestrichelt: logarithmisch-normale Verteilung), nach BROOKS und CARRUTHERS, 1953.

5 Andere Verteilungen

In den letzten Jahrzehnten wurden zahlreiche neue Verteilungsmodelle kreiert oder altbekannte abgewandelt, zumeist aus dem zunehmenden Zwang heraus, immer größere Datenmengen statistisch zu verarbeiten und zu beschreiben. Für die Auslegung von Bauwerken und anderen technischen Einrichtungen gewinnen zudem die Extrapolationen von Extremwertverteilungen an Bedeutung, wobei die Güte der Anpassung an die Beobachtungsdaten eine entscheidende Rolle spielt. Ferner basieren die statistischen Signifikanzprüfverfahren ebenfalls auf einer Reihe von Testverteilungen, die große praktische Bedeutung haben (s. Beitrag 5). Einige der gebräuchlichsten Verteilungen werden im Folgenden kurz beschrieben und erläutert.

5.1 Weibull-Verteilung

Dieser erst vor einigen Jahren bekannt gewordene Verteilungstyp mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{\alpha}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}\right] \text{ für } x \geq 0, \sigma > 0, \alpha > 0 \quad (7)$$

und der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\alpha}\right] \quad (8)$$

hat sich in der Praxis deshalb so schnell durchgesetzt, weil er eine sehr gute Näherung an die Gaußverteilung darstellt, aber im Gegensatz zu dieser geschlossen integrierbar ist und

durch seinen Kurvenformparameter α bzw. den Skalenparameter σ eine große Variabilität aufweist.

5.2 Rayleigh-Verteilung

Sie ergibt sich als Spezialfall der Weibull-Verteilung mit $\alpha = 2$ und erhält bei einem normierten $\sigma = 1$ die einfache Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = 2x \cdot \exp(-x^2) \text{ für } x \geq 0. \quad (9)$$

Die Rayleigh-Verteilung kann gut für bestimmte einseitig begrenzte Verteilungen verwendet werden, z. B. in der Meteorologie für Niederschlagswerte und für Windgeschwindigkeiten (ohne Windstille).

5.3 Pareto-Verteilung

Etwas langsamer abfallend als die Weibull-Verteilung, nämlich hyperbolisch, hat sich diese Verteilung für zahlreiche volkswirtschaftliche Fragestellungen (z. B. Großschadenverteilung) als geeignet erwiesen, da sie die Wahrscheinlichkeit hoher Werte etwas konservativer beurteilt. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lautet in normierter Form

$$f(x) = a \cdot x^{-(1+a)} \text{ für } x \geq 1, a > 0 \quad (10)$$

Sie läßt sich ähnlich wie die in diesem Zusammenhang ebenfalls benutzten Beta-, Gamma- und Exponentialverteilungen für die Darstellung der Wahrscheinlichkeit von Wetterschäden verwenden (Abb. 5).

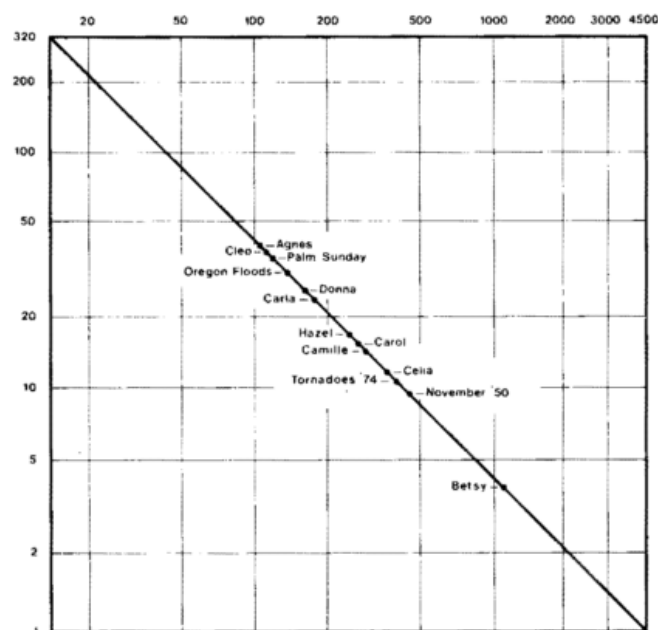


Abb. 5: Pareto-verteilter versicherte Sturmschäden in USA (1949–1973) nach D. LANDIN, 1975. Abszisse: Schäden in US-\$ Mio. (1974), Ordinate: Rangfolge der Schäden bezogen auf einen 100-Jahre-Zeitraum.

5.4 U-Verteilung

Wie schon früher erwähnt, gibt es Zufallsgrößen, deren Extremwert am häufigsten, deren Mittelwerte aber am seltensten sind. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nimmt hier U-

Form an und kann nach einer Transformation auf den Wertebereich $-1 < x < +1$ durch

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (11)$$

ausgedrückt werden. Die Verteilungsfunktion lautet dann

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x \quad (12)$$

Unter den meteorologischen Beobachtungsgrößen läßt sich vor allem der Bedeckungsgrad (mit -1 für wolkenlos und $+1$ für bedeckt) durch dieses Modell beschreiben.

5.5 Gumbel-Verteilung

Ursprünglich für die Beschreibung hydrologischer Daten entwickelt, hat diese Verteilung eine große allgemeine Bedeutung und Verbreitung in der Extremwertstatistik erlangt. Wegen ihrer Verteilungsfunktion

$$F(x) = \exp(-\exp(-y)) \quad (13)$$

wird sie auch „doppelt-exponentielle Verteilung“ genannt. Die Variable y hängt über $y = 0.577 + 1.283(x - \bar{x})/\sigma_x$ von der Zufallsgröße x und ihrer Standardabweichung σ_x ab. Die Verteilung gibt die Überschreitungswahrscheinlichkeit — für das Unterschreiten gilt Analoges — von Extremwerten besser als die Normalverteilung wieder, weil sie der häufig gemachten Beobachtung Rechnung trägt, daß Extremwerte etwas häufiger auftreten, als nach der Normalverteilung zu erwarten ist. In der Meteorologie tritt dies vor allem bei Niederschlags- und Windgeschwindigkeitsdaten auf. Ergibt die Darstellung im Gaußschen Wahrscheinlichkeitspapier eine signifikante Krümmung nach rechts, dann ist die Benutzung der Gumbel-Verteilung oder anderer Extremwertverteilungen geraten.

5.6 Weitere Extremwertverteilungen

Wegen der großen volkswirtschaftlichen Bedeutung der richtigen Bemessung technischer Anlagen gegen extreme Umwelteinflüsse wurden in den letzten Jahren große Anstrengungen unternommen, die Extrapolationen in den Bereich sehr geringer Überschreitungswahrscheinlichkeiten (Wiederkehrperioden zwischen 50 und 10.000 Jahren) besser abzusichern. In dem Ringen um das „beste“, „sicherste“, „wirtschaftlichste“ Modell werden nicht selten die Unzulänglichkeiten der Ausgangsdaten außer acht gelassen. So erscheint die Vielfalt der heute propagierten Extremwert-Verteilungstypen — von Normal- und Log-Normalverteilungen über Bernoulli, Poisson, Gumbel bis hin zu Fisher-Tippett und Pearson bzw. Log-Pearson — mit jeweils einer Reihe von Abwandlungen, wie sie eindrucksvoll in der WMO-Publikation Nr. 560: „Selection of Distribution Types for Extremes of Precipitation“ demonstriert werden, beinahe schon wie der Streit um des Kaisers Bart. Allerdings sind die Unterschiede in den so gewonnenen Bemessungswerten bei entsprechend kurzer Beobachtungsdauer bzw. langem Extrapolationszeitraum doch sehr beträchtlich.

6 Grenzwertsätze

Mit wachsender Wertemenge konvergieren verschiedene Verteilungen gegen die Normalverteilung, z.B. die Binomial-Verteilung für $n > 9/p(1-p)$ oder die Poisson-Verteilung für

$np > 9$. Ganz allgemein läßt sich für beliebige Verteilungen, sofern sie nur einen Erwartungswert und endliche Streuung besitzen, folgende Aussage über die Verteilung einer Zufallsgröße um ihren Erwartungswert treffen: Die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz $|x - \mu|$ die k -fache Standardabweichung übersteigt, ist kleiner als $1/k^2$. Diese Aussage ist als „Tschebyscheffsche Ungleichung“ bekannt und bedeutet, daß in jedem Fall mindestens 75% aller Werte im 2σ -Bereich, 89% im 3σ -Bereich und 99% im 10σ -Bereich um den Erwartungswert liegen. Der Vergleich mit den entsprechenden Angaben für die Normalverteilung zeigt, daß die obige Aussage, wie in Anbetracht der allgemeinen Gültigkeit nicht anders zu erwarten, relativ schwach ist.

Am wichtigsten ist der „zentrale Grenzwertsatz“, der besagt, daß die Verteilung der zu einer Folge unabhängiger Zufallswerte $x_1, x_2, \dots, x_n$ — gleich welcher Verteilung — gehörenden Summen $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n$ mit wachsendem n gegen eine Normalverteilung strebt. Daraus erklärt sich z.B., daß viele empirische Verteilungen näherungsweise einer Normalverteilung entsprechen, wenn die einzelnen Werte durch Mittelung gewonnen werden.

7 Mehrdimensionale Verteilungen

Wenn die Beziehungen zwischen mehreren Zufallsgrößen beschrieben werden sollen, müssen Wahrscheinlichkeitsaussagen über das verbundene Eintreten mehrerer Ereignisse abgeleitet werden, was in Form einer mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt werden kann. Aus Gründen der Einfachheit soll hier nur der Spezialfall „zweidimensionaler Normalverteilung“ behandelt werden. Diese ergibt sich zu

$$f(x, y) = f(x) \cdot f_y(y)$$

wobei $f(x)$ die eindimensionale Normalverteilung und $f_y(y)$ die „bedingte“ Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellen. $f_y(y)$ hat ebenfalls die Form einer Normalverteilung, allerdings mit dem Erwartungswert $\rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x$ und der Dispersion $\sigma_y^2 (1 - \rho^2)$.

Der zusätzliche Parameter ρ , der „Korrelationskoeffizient der zweidimensionalen Normalverteilung“, kennzeichnet offensichtlich die Strenge der Beziehung zwischen x und y ; denn für $\rho = 0$ geht $f_y(y)$ in eine gewöhnliche Normalverteilung über, was nach der Multiplikationsregel — $f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$ — statistische Unabhängigkeit bedeutet.

Die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x, y)$ kann in der x - y -Ebene in Form von elliptischen Isolinen dargestellt werden, die alle Punkte mit gleichem $f(x, y)$ verbinden und deren gemeinsamer Mittelpunkt an der Stelle (μ_x, μ_y) liegt. Von diesem Gipfelpunkt aus fällt die Wahrscheinlichkeitsdichte nach allen Seiten hin ab.

Literatur

- (1) BROOKS, C. E. P.; CARRUTHERS, N.: Handbook of statistical methods in meteorology. London: H. M.'s Stationery Office 1953.
- (2) IKEDA, S. et al.: Statistical climatology. Proc. 1th Int. Conf. Stat. Climat. . . . Tokyo 29.11.—1.12.1979. Amsterdam u.a.: Elsevier 1980. (= Developments in Atmos. Sci. 13.)

- (3) LANDIN, D.: Catastrophes in the United States. Reinsurance, London, 6 (1975) S. 561—566.
- (4) SCHROERS, H.; LÖSSLEIN, H.: Extremwert-Extrapolationen und Windprofile bei Starkwind und Sturm. Meteorol. Rdsch. (im Druck).

- (5) SEVRUK, B.; GEIGER, H.: Selection of distribution types for extremes of precipitation. Geneva: WMO 1981. (= WMO Publ. No. 560.)

Siehe auch Bibliographie (Einführung).

4

C.-D. SCHÖNWIESE, Frankfurt

Schätzverfahren

1 Problematik

Bei der statistischen Schätzung werden bekannte Stichproben-Informationen (s. Beitrag 2) mit einem Verteilungsmodell der zugehörigen Grundgesamtheit (s. Beitrag 3) verknüpft. Im folgenden ist (wie im Beitrag 2) SP = Stichprobe und GG = Grundgesamtheit (Population). Es treten nun folgende drei Problemkreise auf:

- Schätzung bestimmter Kenngrößen (z.B. Mittelwert, Varianz),
- Schätzung einer geeigneten Verteilung (bzw. Schätzung der betreffenden Wahrscheinlichkeitsdichte- oder Verteilungsfunktion, s. Beitrag 3),

jeweils bezüglich GG auf Grund der allein bekannten SP-Information, sowie

- Schätzung der Eintreffwahrscheinlichkeit künftiger Stichprobenwerte (Daten).

2 Durchführung

2.1 Kenngrößen-Schätzung

Bei vielen praktischen Fragestellungen, aber auch bei der Anwendung von Verteilungsmodellen, müssen bestimmte Kenngrößen der GG mit hinreichender Sicherheit und Genauigkeit bekannt sein. Dies sind vor allem ihr Mittel-(Erwartungs-) Wert, ihre Standardabweichung (bzw. Varianz, Dispersion), bei unsymmetrischen Verteilungen auch Schiefe, ggf. Exzeß, schließlich der Verteilungstyp selbst (vgl. Beitrag 2).

Bei annähernder Normalverteilung und nicht zu kleiner Stichprobe (Richtwert für den Stichprobenumfang: $n \geq 30$) wird der Mittelwert μ der GG im Intervall

$$\mu_{\mu} \left\{ \bar{a} \pm z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} \approx \left\{ \bar{a} \pm z_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} \right\} \quad (1)$$

und die Standardabweichung σ der GG im Intervall

$$\mu_{\sigma} = \left\{ s \pm z_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{2n}} \right\} \approx \left\{ s \pm z_{\alpha} \frac{j}{\sqrt{2n}} \right\} \quad (2)$$

„vermutet“, wobei $\bar{a}$ und s Mittelwert und Standardabweichung der SP (nach Formeln des „Maximum-Likelihood-Prinzips“ errechnet, im einfachsten Fall gleich den im Teil 2 angegebenen SP-Formeln) und z_{α} der Parameter der standardisierten Normalverteilung (s. Beitrag 3) sind. Dieser Parameter

legt fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit p die Schätzung vorgenommen wird. (In den Tabellen der Lehrbücher findet man z.B. $z_{\alpha} = 1.645$ für $p = 90\%$, $z_{\alpha} = 1.96$ für $p = 95\%$, $z_{\alpha} = 2.58$ für $p = 99\%$.) Legt man von vornherein einen gewünschten Mutungsbereich μ fest, so lassen sich die Formeln (1) (2) auch als Abschätzung des notwendigen Stichprobenumfanges interpretieren. Nach dem zentralen Grenzwertsatz (s. Beitrag 3) können diese Formeln bei großen Stichproben verteilungsfrei (d.h. ohne Voraussetzung einer Normalverteilung) verwendet werden (Richtwert für eingipfelige Verteilungen: $n \geq 100$). Für das Beispiel in Tabelle 1 (Beitrag 2) ergibt sich mit $p = 95\%$: $\mu_{\mu} (-0.16 \pm 0.05) ^\circ\text{C}$.

2.2 Verteilungsschätzung

Sind die Mutungsbereiche für Mittelwert und Standardabweichung der GG hinreichend klein bzw. die Stichproben hinreichend groß und wird auf Grund der bekannten SP-Häufigkeitsverteilung eine GG-Normalverteilung vermutet (s. z.B. Abb. 2 in Beitrag 3), so kann diese Vermutung mit Hilfe einer „Schnellprüfung“ getestet werden: Die Klassenobergrenzen der SP-Häufigkeitsverteilung (Abszisse) werden in Relation zu den prozentualen kumulativen Häufigkeiten PKH der SP (Ordinate, s. Tab. 1 und Abb. 1 in Beitrag 2) in ein sog. Wahrscheinlichkeitsnetz (s. Abb. 3 in Beitrag 3) eingetragen. Es handelt sich dabei um ein Koordinatennetz, das so eingerichtet ist, daß sich im Fall einer exakten Normalverteilung eine exakte Gerade ergibt. Bei geringen Abweichungen davon kann approximativ eine normalverteilte GG angenommen und im folgenden als Verteilungsmodell benützt werden.

Allgemein geht man bei der Verteilungsschätzung so vor, daß man nach befriedigenden Schätzungen der Moment-Mutungsbereiche (bzw. Signifikanztests von Schiefe und ggf. Exzeß, s. Beitrag 5) zunächst Annahmen über den Verteilungstyp versucht, d.h. eine theoretische Verteilung (s. Beitrag 3) mit größtmöglicher Ähnlichkeit zur SP-Häufigkeitsverteilung als Verteilungsmodell auswählt, genauer gesagt die GG-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ einer passenden theoretischen Verteilung. Im Gegensatz zur stets diskreten und i.a. absoluten SP-Häufigkeitsverteilung $f(H)$ ist $f(x)$ kontinuierlich und normiert ($\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$). Ein eingehender Vergleich bedingt daher die „Anpassung“ von $f(x)$ an $f(H)$, die nebst dem zugehörigen (χ^2 -) Anpassungstest im Beitrag 5 beschrieben ist.

2.3 Schätzung künftiger Stichprobenwerte

Auch bei der Schätzung künftiger SP-Werte müssen $f(H)$ und $f(x)$ in möglichst gute Übereinstimmung gebracht, also „angepaßt“ werden. Im Gegensatz zur Verteilungsschätzung wird nun aber $f(H)$ an $f(x)$ angepaßt und nicht umgekehrt, da alle weiteren Überlegungen von $f(x)$ ausgehen müssen, um bei eventuellen Prognosen (soweit möglich und sinnvoll) von Zufälligkeiten der SP unbeeinflusst zu sein. Das in 2.1 und 2.2 beschriebene Vorgehen ist im folgenden Voraussetzung.

Ist diese Voraussetzung erfüllt (mit befriedigenden Ergebnissen), so gilt für das Auftreten künftiger Ereignisse ΔE (Datenwerte)

$$p(\Delta E) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (3)$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit, $F(x)$ die Verteilungsfunktion (s. Beitrag 3; die Differentiation von $F(x)$ ergibt allgemein $f(x)$) und a, b ($b > a$) bestimmte Datenwerte (Abszisse der Häufigkeitsverteilung) sind. Da für $a = b \rightarrow p(\Delta E) = 0$ folgt,

sind derartige statistische Schätzungen nur für Wertebereiche ΔE (und nicht für einen beliebig genauen Einzelwert) möglich. Weiterhin ist i. a. für $a > -\infty$ und $b < +\infty$ stets $p(\Delta E) < 1$ (bzw. $< 100\%$), so daß statistische Schätzungen immer nur Wahrscheinlichkeitsaussagen und niemals sicher sind.

In der Praxis verwendet man zur Bestimmung des bestimmten Integrals in (3) so weit möglich Verteilungstabellen (z. B. der standardisierten Normalverteilung, s. Beitrag 3, muß i. a. aber dann auf $\bar{a} \neq 0$ und $s \neq 1$ umrechnen, $\Delta E = z \cdot s$ mit z Parameter der standardisierten Normalverteilung). Approximativ läßt sich auch die Beziehung $F(b) - F(a)$ in (3) ausnutzen, da $F(x)$ der geschätzten Kurve durch die PKH-Werte einer SP (s. Abb. 1 in Beitrag 2) entspricht. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeitswerte $p(F(b))$ und $p(F(a))$ können dann direkt an der Ordinate des Wahrscheinlichkeitsnetzes bzw. eines entsprechenden allgemeinen Koordinatensystems abgelesen werden.

Literatur s. Bibliographie (Einführung)

5 C.-D. SCHÖNWIESE, Frankfurt

Testverfahren

5.1 Allgemeine Methodik

Ein statistischer Test (Prüfverfahren) ist eine Entscheidungshilfe im Fall ganz bestimmter Fragen (Hypothesen), welche von der statistischen Theorie in recht großer Zahl zusammen mit den zugehörigen Prüfformeln angeboten werden.

Das Grundprinzip ist sehr einfach: Man möchte über eine Hypothese entscheiden, die immer mit der Annahme einer Besonderheit oder eines Unterschiedes verknüpft ist. Ähnlich dem mathematischen Widerspruchsbeweis gibt es dazu eine gegenteilige Annahme, die besagt, daß jener Unterschied oder jene Besonderheit nicht existiert, sozusagen „null und nichtig“ ist: die Nullhypothese NH . Die erstgenannte Hypothese, die man nach Möglichkeit beweisen möchte, ist die Alternativhypothese AH (Besonderheit bzw. Unterschied wird bejaht).

Da die Statistik prinzipiell nie zu sicheren, sondern nur zu Wahrscheinlichkeitsaussagen gelangen kann, handelt es sich bei statistischen Testverfahren nicht um exakte Beweise, sondern um Entscheidungen (Mutmaßungen), die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch falsch sein können.

Die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Entscheidung, die Signifikanz Si (auch Signifikanzniveau), ist wählbar, was die Gefahr von Manipulationen in sich birgt. Um dies zu verhindern, legen wir fest:

$$\begin{aligned} Si = 0.9 &\triangleq 90\% \rightarrow \text{signifikant,} \\ Si = 0.95 &\triangleq 95\% \rightarrow \text{sehr signifikant,} \quad (1a-c) \\ Si = 0.99 &\triangleq 99\% \rightarrow \text{hochsignifikant;} \end{aligned}$$

dies bedeutet, daß $Si = 0.9$ als Mindestwert bei Testverfahren gefordert wird. Im Zweifel sollte der mittlere Wert von $Si = 0.95$ gewählt werden. Die Größe

$$\alpha = 1 - Si \quad (2)$$

heißt Irrtumswahrscheinlichkeit und wird in der statistischen

Literatur gegenüber Si meist bevorzugt. Die häufig zu findende Angabe, eine Hypothese sei „auf dem Niveau 0.05 signifikant“ bezieht sich auf α und besagt, daß die Wahrscheinlichkeit, sich bei der betreffenden Entscheidung zu irren, 5% beträgt. Entsprechend ist dann natürlich die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Entscheidung 95%.

Neben Si bzw. α werden für die Durchführung eines statistischen Testverfahrens noch eine theoretische (Populations-) Verteilung, die Festlegung auf eine bestimmte Anzahl von Freiheitsgraden und schließlich die Testformel benötigt. Die häufig benutzten klassischen Verteilungen sind z - (standardisierte Normalverteilung), t -, χ^2 - und F -Verteilung, die man in fast allen allgemeinen Statistik-Lehrbüchern in Tabellenform vorfindet. Daneben gibt es aber auch eine Reihe neuerer Verteilungen (s. Beitrag 3) und spezielle Testverteilungen (vgl. z. B. SACHS (1974)). Die Testformeln lassen sich, ähnlich einem Lexikon, in den Statistik-Büchern nachschlagen (vgl. z. B. CREUTZ und EHLERS (1976), SACHS (1978)) und enthalten fast immer auch Hinweise bzw. Formeln zur Errechnung der Anzahl der Freiheitsgrade ϕ .

Da klimatologische Werte praktisch immer autokorreliert sind (s. Beitrag 7), verringert sich jedoch der theoretische ϕ -Wert. Auswege aus dieser nicht unproblematischen Situation können in der Weise beschritten werden, daß die ursprünglichen Stichprobenwerte durch Mittelwerte für derartige Intervalle ersetzt werden, bei denen die Autokorrelationsfunktion auf Werte nahe null abgefallen ist (s. auch Beitrag 7). Sofern die verwendeten Testverfahren auf Parametern der Häufigkeitsverteilung beruhen (und somit Einzeldaten zu Klassen zusammengefaßt sind) oder vieljährige Mittelwerte getestet werden, darf man im allgemeinen davon ausgehen, daß keine allzu gravierende Störung durch Autokorrelation vorliegt.

Der statistische Test selbst hat nun stets die folgende Form:

$$\begin{aligned} \hat{P} &< P_{\phi, \alpha} \rightarrow \text{NH annehmen,} \\ \hat{P} &\geq P_{\phi, \alpha} \rightarrow \text{AH annehmen.} \end{aligned} \quad (3a, b)$$

Dabei ist $\hat{P}$ der Zahlenwert, der sich aus der Berechnung der Testformel ergibt (Testgröße, Prüfgröße, Vergleichswahrscheinlichkeit) und P der Wahrscheinlichkeitswert (Quantilwert, Tabellenwert), der als Funktion der Anzahl der Freiheitsgrade ϕ und der Irrtumswahrscheinlichkeit α der betreffenden Verteilungstabelle entnommen wird. „NH annehmen“ beinhaltet zugleich die Ablehnung von AH; die zu testende Besonderheit (Unterschied) wird auf dem Niveau $Si = 1 - \alpha$ (bzw. α) als „null und nichtig“ bzw. „zufällig“ angesehen. „AH annehmen“ beinhaltet die Ablehnung von NH; die zu testende Besonderheit (Unterschied) wird auf dem Niveau Si (bzw. α) als signifikant angesehen; man sagt auch, sie sei „überzufällig“, was in der Statistik „nicht zufällig bedeutet“. An Stelle von $\hat{P}$ und P wird im speziellen Fall das Symbol der zu benützenden Verteilung geschrieben (z. B. $\hat{t}$, $\hat{F}$).

Dabei ist zu beachten, daß Tests „einseitig“ oder „zweiseitig“ durchgeführt werden können. „Zweiseitig“ bedeutet, daß NH und AH alle numerischen Möglichkeiten beinhalten; z. B. NH = {a = b}, AH = {a ≠ b}. Ist aus irgendwelchen nicht statistischen Gründen festgelegt, daß nur a ≥ b sein kann, so darf „einseitig“ NH = {a = b}, AH = {a > b} getestet werden. Der einseitige Test beinhaltet somit nicht alle statistisch-numerischen Möglichkeiten. Beim Übergang vom einseitigen zum zweiseitigen Test, der im Zweifelsfall immer zu bevorzugen ist, verdoppelt sich die Irrtumswahrscheinlichkeit.

Eine gefährliche Falle bei der Arbeit mit Tabellen theoretischer Verteilungen sind die unterschiedlichen Tabellierungsarten, insbesondere wenn sie in den Büchern nicht genau definiert sind. (Selbstverständlich werden für Tests nicht Funktionswerte, sondern bestimmte Integrale der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion benötigt, also relative Wahrscheinlichkeitswerte P .) Am häufigsten findet man zu Testzwecken die „seitlich-einseitige“ Tabellierung, die direkt die α -Werte für den einseitigen Test liefert; d. h. $\alpha = \int_V f(x) dx$ mit V = Parameter der Verteilung und $f(x)$ = Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion; andernfalls werden Umrechnungen erforderlich.

Schließlich müssen die Testvoraussetzungen berücksichtigt werden. Auf die gegenseitige Unabhängigkeit der Werte innerhalb einer Stichprobe ist bereits hingewiesen. Eine weitere häufige Voraussetzung sind normalverteilte Stichproben bzw. Grundgesamtheiten. Es gibt jedoch auch „verteilungsfreie“ (schlechtere Bezeichnung: nonparametrische) Testverfahren, welche diese Voraussetzung nicht beinhalten.

5.2 Anwendungsbeispiele

Einige wenige Beispiele sollen das Prinzip des statistischen Tests verdeutlichen. Wir greifen der Einfachheit halber auf die Zahlenwerte aus Beitrag 2 (Tab. 1 und Abb. 1) (s. auch Titelbild) zurück. So können wir uns fragen, ob sich die Mittelwerte 1891–1920 und 1921–1960 signifikant unterscheiden und somit auf einen Wechsel des Klimazustandes innerhalb relativ kurzer Zeit hindeuten.

Die Prüfformel, welche allgemein die Verträglichkeit zweier Stichproben-Mittelwerte $\bar{a}$ und $\bar{b}$ testet, lautet:

$$\hat{t} = |\bar{a} - \bar{b}| \cdot \sqrt{\frac{n_a + n_b}{n_a \cdot n_b} \cdot \frac{(n_a - 1)s_a^2 + (n_b - 1)s_b^2}{n_a + n_b - 2}} \quad (1)$$

$$\text{mit } \phi = n_a + n_b - 2, \quad (2)$$

wobei n die Umfänge und s^2 die Varianzen der Stichproben sind. Man errechnet $n_a = 30$ (1891–1920), $n_b = 40$ (1921–1960), Ausgangsdaten sind jeweils Jahresmittelwerte, $\bar{a} \approx -0.356$, $\bar{b} \approx 0.045$, $s_a \approx 0.160$, $s_b \approx 0.146$. Die Voraussetzungen dieses Tests sind Normalverteilung der Stichproben und keine signifikante Unterscheidung der Varianzen. Während die zweite Voraussetzung offensichtlich gut erfüllt ist, muß die erste noch überprüft werden. (Hinsichtlich der Varianzen findet man $\hat{F} = s_a^2/s_b^2 \approx 1.10 < 1.74 = F(\phi_a = 30, \phi_b = 40, \alpha = 0.05)$; somit kein signifikanter Unterschied der Varianzen, wobei dieser Test die noch zu prüfende Voraussetzung von Normalverteilungen enthält).

Dazu dient der verteilungsfreie und daher universell anwendbare „ χ^2 -Anpassungstest“

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{k=1}^K \frac{[H_k(\text{SP}) - H_k(\text{GG})]^2}{H_k(\text{GG})} \quad (3)$$

$$\text{mit } \phi = K - 1, \quad (4)$$

wobei K Klassen zu bilden und H_k die Häufigkeiten der zu untersuchenden Stichprobe SP bzw. theoretischen Verteilung (Grundgesamtheit) GG sind (vgl. Beitrag 2).

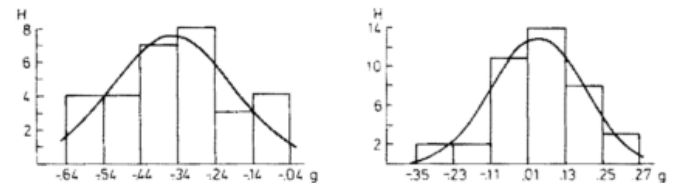


Abb. 1: Aufspaltung der in Beitrag 2 (Tab. 1 und Abb. 1) beschriebenen Häufigkeitsverteilung in zwei Anteile 1891–1920, links, und 1921–1960, rechts. Die zugehörigen χ^2 -Werte (vgl. Text) sind 3.92 (links) und 2.52 (rechts); der niedrigere Wert (rechts) bedeutet bessere Anpassung der eingezeichneten Normalverteilung.

Die Berechnung der Prüfgrößen (vgl. hierzu Abb. 1) ergibt

$$\left. \begin{aligned} \hat{\chi}_a^2 &\approx 3.92 \\ \hat{\chi}_b^2 &\approx 2.52 \end{aligned} \right\} < 11.07 = \chi_{\phi=5, \alpha=0.05}^2 \quad (5)$$

Dies bedeutet, daß in beiden Fällen auf dem Niveau $Si = 95\%$ keine signifikante Abweichung von der Normalverteilung besteht. Man kann die Irrtumswahrscheinlichkeit sogar auf den Wert $\alpha = 0.3$ erhöhen ($-\chi^2 = 6.06$) ohne einen signifikanten Unterschied zu finden. (Die χ^2 -Tabellenwerte sind in allen gängigen Statistik-Büchern zu finden, z. B. SACHS (1978) S. 112 oder SPIEGEL (1976) S. 345).

Somit sind die Voraussetzungen für den t-Test nach (1) gegeben (andernfalls müßte stattdessen der U-Test nach WILCOXON, MANN und WHITNEY durchgeführt werden (s. z. B. SACHS, 1978, S. 230 ff.) und es ergibt sich zweiseitig

$$\hat{t} = 10.91 > 1.99 = t_{\phi=68, \alpha=0.05} \quad (6)$$

Der Unterschied ist also signifikant. Wie signifikant dieser Unterschied der beiden Mittelwerte tatsächlich ist, zeigt eine schrittweise Erniedrigung der Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 0.01 \rightarrow t = 2.67$, $\alpha = 0.001 \rightarrow t = 3.44$, $\alpha = 0.0001 \rightarrow t = 4.13$. Die Alternativhypothese kann mit einer Signifikanz von $Si \rightarrow 99.99\%$ angenommen werden.

5.3 Ausblick

Neben der allgemeinen Methodik sind hier nur sehr wenige Beispiele für die vielen existierenden statistischen Testverfahren genannt worden, die in der Klimatologie Anwendung finden können. Bezüglich der weiteren Einzelheiten muß auf die Literatur verwiesen werden.

Um bei einer ersten solchen Lektüre den Überblick zu erleichtern, soll jedoch noch eine Klassifizierung versucht werden, obwohl dies angesichts der doch sehr unterschiedlichen Verfahren etwas schwer fällt (SP = Stichprobe, GG = Grundgesamtheit, vgl. Beitrag 2):

- Vergleich von zwei Varianzen (SPs oder SP gegenüber GG); zumeist χ^2 - und F-Tests.
- Vergleich von zwei Mittelwerten (SPs oder SP gegenüber GG); zumeist t- und z-Tests.
- Vergleich anderer SP- bzw. GG-Parameter (z. B. Schiefe).
- Vergleich von Häufigkeitsverteilungen; χ^2 -Anpassungs-, Kolmogorov-, Smirnov- u. a. Tests.

- Konfidenzbereiche (für verschiedene Parameter als Testfolgerungen; hier sind auch die Mutungsbereiche aus Beitrag 2 einzuordnen); zumeist z-, t- und χ^2 -Schätzungen;
- Testverfahren im Rahmen der Korrelations- und Regressionsanalyse (s. Beitrag 7).
- Aufwendigere Testverfahren, bei denen an die Stelle einer einfachen Testformel ein Rechenverfahren tritt; z. B. einfache Varianzanalyse (F-Test zur Homogenitätsprüfung einer SP bezüglich des Mittelwertes, auch als Test von > 2 Mittelwerten aufzufassen), mehrfache Varianzanalyse (Prüfung von zwei oder mehr SP-Einflüssen), Hartley-, Bartlett-, Friedmann- u. a. Tests.

Die jeweiligen Voraussetzungen sind stets genau zu prüfen und bedingen ggf. sekundäre Tests innerhalb des eigentlich angestrebten Testverfahrens. Unterschiedliche Voraussetzungen führen zu unterschiedlichen Testformeln mit manchmal auch abweichenden Testverfahren. Insbesondere lassen sich „verteilungsfreie“ und als Gegenstück solche Tests unterscheiden, welche die Normalverteilung voraussetzen („normalverteilungsbedingte“ sog. parametrische Tests). Erstere sind häufig Rangtests (z. B. Iterations- oder Vorzeichentests (z) bezüglich Abhängigkeiten in einer SP, Wilcoxon-Paardifferenzen-, Wilcoxon-Mann-Whitney-, U-, H- u. a. Tests).

Literatur s. Bibliographie (Einführung).

6 C.-D. SCHÖNWIESE, Frankfurt Zeitreihen-Filterung

1 Problemstellung

Das Problem der Zeitreihen-Filterung stellt sich überall dort, wo im Rahmen der Stichproben-Beschreibung (s. Beitrag 2) eine Zeitreihe

$$a_i(t_i); i = 1, 2, \dots, n; t_{i+1} - t_i = \Delta t = \text{konst.} \quad (1)$$

(mit Bezug auf Zeitpunkte oder Intervallmitten, falls die a_i -Werte zeitlich gemittelt sind) hinsichtlich der in ihr enthaltenen zeitlichen Variationen unterschiedlicher Frequenz f bzw. Periode $T = 1/f$ getrennt betrachtet werden soll.

Im Gegensatz zur optischen (Farben) oder elektrotechnischen (z. B. Sendereinstellung des Radios) Filterung, mit der sie oft verglichen wird, ist die Zeitreihen-Filterung numerisch, d. h. sie kommt durch eine Rechenoperation zustande. Während und nach der Filterung bleiben die analysierten Daten eine Funktion der Zeit (gemäß Beitrag 8 „im Zeitbereich“), während die Filterwirkung am besten spektral („im Frequenzbereich“) beschrieben werden kann.

Dabei lassen sich prinzipiell drei Möglichkeiten unterscheiden:

- Tiefpaßfilterung, d. h. Unterdrückung relativ hoher Frequenzen, um relativ niedere Frequenzen (bzw. große Perioden, langfristige Trends) hervorzuheben;

- Hochpaßfilterung, d. h. Unterdrückung relativ niederer Frequenzen, um relativ hohe Frequenzen (bzw. kleine Perioden, kurzfristige Schwankungen) hervorzuheben;
- Bandpaßfilterung, d. h. Hervorhebung eines bestimmten begrenzten Frequenz- bzw. Periodenintervalls.

Diese Begriffe stammen aus der Elektrotechnik, wobei sich Tief- und Hochpaßfilter mit dem Klangregler eines Radios vergleichen lassen: Ein Tiefpaßregler läßt tiefe Frequenzen „passieren“, d. h. Betonung der Bässe (Hochpaßfilter entsprechend Betonung der Höhen). Das Analogon eines Bandpaßfilters ist der Konturregler, der mittlere Frequenzen betont. Auch die Herausfilterung einer bestimmten Farbe aus dem Spektrum des Sonnenlichts entspricht der Bandpaßfilterung. Träge Meßgeräte wirken dagegen als Tiefpaßfilter.

Für die folgende Betrachtung ist es ohne Belang, ob die zu filternde Zeitreihe

- auf Meßwerten beruht (direkt oder indirekt, z. B. stündlich gemessene Temperaturwerte einer Station oder Zonalindex für einen bestimmten Bereich und Termin),
- aus Akkumulationen hervorgegangen ist (z. B. monatliche Temperatursummen),
- aus zeitlichen Intervallmittelwerten besteht (z. B. Jahresmittelwerte) oder/und
- irgendeiner örtlichen Mittelung unterworfen wurde.

Die exakte spektrale Beschreibung der Filterwirkung durch die charakteristische Filterfunktion (engl. filter response function, vgl. Abb. 1) ist im übrigen nur möglich, wenn das der zu filternden Reihe zugrundeliegende Zeitintervall Δt bei der Filterung erhalten bleibt. So läßt sich eine nicht übergreifende Intervallmittelung zwar prinzipiell als Tiefpaßfilterung bezeichnen, aber nicht genau charakterisieren (am ehesten als übergreifende Mittelung mit Informationslücken).

Das praktische Problem der numerischen Zeitreihen-Filterung besteht darin, daß sie bei bekannten Filtergewichten leicht durchführbar ist (auch mittels Taschen- und Tischrechner), die Herleitung der Filtergewichte jedoch problematisch werden kann. Dies betrifft vor allem die Bandpaßfilterung. Daher wird im folgenden zunächst die Technik der Durchführung beschrieben. Daran schließen sich Hinweise auf die Errechnung der Filtergewichte an, unter Hervorhebung der einfacher durchzuführenden Tief- und Hochpaßfilterung. Schließlich soll noch auf die Signifikanzprobleme eingegangen werden.

2 Durchführung

Vor der Durchführung der numerischen Zeitreihen-Filterung muß sichergestellt sein, daß die Zeitintervalle Δt_i der zu filternden Reihe exakt gleich sind. (Bei Monatssummen des Niederschlags ist das beispielsweise nicht der Fall.) Außerdem dürfen keine Lücken vorhanden sein.

Die Filterung ist eine sog. Zeitreihen-Faltung der Art

$$\tilde{a}_j = \sum_{k=-m}^{+m} w_k \cdot a_{i+k} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ k = -m, -m+1, \dots, 0, 1, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n-2m \end{cases} \quad (2)$$

wobei $\tilde{a}_j$ die gefilterten Werte, w_k die Filtergewichte und a_i die ungefilterten Werte der Zeitreihe sind. (Zur Veranschaulichung können in der Abb. 1 von Beitrag 7 die 2., 3. usw. Zeile gleich w_{-m} , w_{-m+1} , usw. gesetzt werden.)

Um Phasenverschiebungen auszuschließen, verwendet man Gewichte, die bezüglich des „Zentralgewichtes“ w_0 symmetrisch sind; d.h. die Werte w_k (positiver Index) sind numerisch gleich w_{-k} (entsprechender negativer Index). Zusammen mit dem Zentralgewicht erhält man dann stets eine ungerade Anzahl von Gewichten

$$k = 2m + 1. \quad (3)$$

Nach Formel (2) ist leicht einzusehen, daß sich die gefilterte Reihe gegenüber der ungefilterten sowohl am Reihenanfang als auch am Ende um jeweils m Daten verkürzt. Jeder gefilterte Wert bezieht sich, wie auch bei (nicht übergreifenden) Intervallmittelwerten, stets auf die Mitte des wirksamen Filterintervalls, oder anders ausgedrückt auf das Zentralgewicht w_0 . Die Filtergewichte sind normierte Zahlenwerte, wobei im Fall von Tiefpaßfilterungen meist die Normierung

$$\sum_{k=-m}^{+m} w_k = 1 \quad (4)$$

und im Fall von Bandpaßfilterungen, indirekt auch bei Hochpaßfilterungen, die Normierung

$$\sum_{k=-m}^{+m} w_k = 0 \quad (5)$$

als sinnvoll angesehen wird. Im ersten Fall (4) bleiben jeweils die Mittelwerte des wirksamen Filterintervalls erhalten, im

letzteren Fall (5) werden diese Mittelwerte null gesetzt; d.h. die gefilterten Werte erscheinen als Abweichungen von null. Bei dieser Verfahrensweise lassen sich ein tiefpaßgefilterter Datensatz und mehrere hoch- bzw. tiefpaßgefilterte desselben ungefilterten Datensatzes durch Addition überlagern, wobei natürlich auf einen sinnvollen Bezug der verwendeten wirksamen Frequenzen zu achten ist.

3 Herleitung der Filtergewichte

Zur Herleitung der Filtergewichte sollen hier nur einige kurze Hinweise gegeben werden. Dabei lassen sich im wesentlichen zwei Methoden unterscheiden:

- Entwicklung eines Algorithmus für die Filtergewichte (zum Teil empirisch) und Errechnung der zugehörigen charakteristischen Filterfunktion;
- Vorgabe der gewünschten charakteristischen Filterfunktion und Errechnung der zugehörigen Filtergewichte.

Einzelheiten zu den daraus resultierenden vielen Methoden können der Literatur entnommen werden (z. B. BÅTH 1974, BOX and JENKINS 1970, HOLLOWAY 1958, MITCHELL et al. 1966, PANOFKY and BRIER 1958, TAUBENHEIM 1969).

Die einfachste, freilich auch wenig wirkungsvolle Filterungstechnik ist die häufig benutzte übergreifende (gleitende) Mittelung. Sie ist für jedes beliebige Intervall $L = 1 \cdot \Delta t$ ($1 = 2, 3, \dots, M$) definierbar und weist identische Gewichte

$$w_k (\text{ÜM}) = \frac{1}{L} \quad (6)$$

auf. In Formel (2) kommt man natürlich rascher zu den Resultaten, wenn man erst alle a_i -Werte allein summiert und dann das Ergebnis mit dem gemeinsamen Gewicht $1/L$ multipliziert.

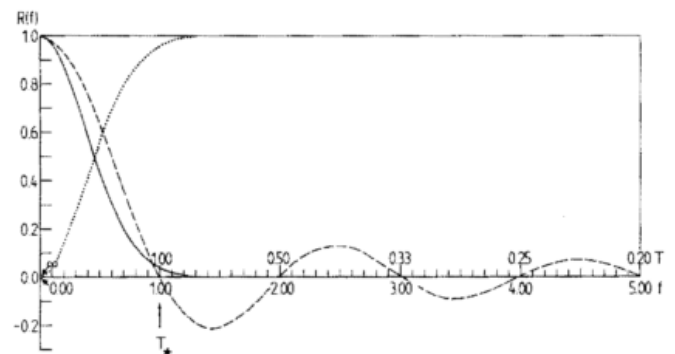


Abb. 1: Charakteristische Filterfunktionen (filter response functions) $R(f)$ für Gaußsche Tiefpaßfilterung, ausgezogene Kurve, entsprechende Hochpaßfilterung, gepunktete Kurve, und entsprechende Tiefpaßfilterung nach der Methode der übergreifenden Mittelung, gestrichelte Kurve. Frequenzen f bzw. Perioden T relativ mit $T^* = 1\Delta t$. Der obere Teil des Titelbildes enthält zwei nach dem Gaußschen Tiefpaß gefilterte (geglättete) Kurven (dick: $T^* = 30a$, gestrichelt: $T^* = 10a$).

Die zugehörige in der Abbildung 1 (gestrichelt) dargestellte charakteristische Filterfunktion

$$R(f)_{\text{ÜM}} = \frac{\sin(\pi f L)}{\pi f L} \quad (7)$$

zeigt, daß die gewünschte Tiefpaßfilterung (Glättung), nämlich Eliminierung der Schwankungsanteile $f > \frac{1}{L}$ bzw. $T < L$, keinesfalls zufriedenstellend gelingt, sondern unerwünschte hochfrequente Schwankungsanteile mit erheblicher Amplitude verbleiben. In der gefilterten Zeitreihe ist dies durch einen unruhigen Verlauf zu erkennen (wie z. B. bei SCHÖNWIESE 1978 demonstriert).

Dieser Nachteil wird durch die sog. Gaußsche Tiefpaßfilterung vermieden, die bereits 1966 durch die WMO empfohlen worden ist (MITCHELL et al. 1966). Die zugehörige ebenfalls in der Abbildung 1 (ausgezogen) dargestellte charakteristische Filterfunktion lautet

$$R(f)_G = \exp\left(-\frac{1}{3} \pi^2 f^2\right), \quad (8)$$

wobei f die relative Frequenz ist. Je nach gewünschtem T -Wert (vgl. Abb. 1) läßt sich aus dem bei MITCHELL et al. angegebenen Algorithmus eine bestimmte Reihe von Filtergewichten berechnen, wie sie in einer Auswahl in Tabelle 1 angegeben ist. Die Normierung der Gewichte gemäß Formel (4) ist in dieser Tabelle bereits berücksichtigt.

Tab. 1: Gewichte für Gaußsche Tiefpaßfilterung mit ausgewählten T -Werten (vgl. Abb. 1). Die Gewichte sind von $k = 0$ (Zentralgewicht) aus für $-k$ symmetrisch zu ergänzen. Die Normierung entspricht Formel (4) und die Gewichtsreihe ist für $w_k < w_0/10$ abgebrochen. Beispiele siehe Titelbild (für $T = 30$ a dicke obere Kurve, für $T = 10$ a gestrichelte obere Kurve; das verwendete Intervall Δt der Zeitreihe (Titelbild $\Delta t = 1$ a = 1 Jahr) ist beliebig). Graphische Darstellung der Gewichte für $T = 10 \Delta t$ s. Abb. 2.

k	$T = 5\Delta t$	$T = 6\Delta t$	$T = 10\Delta t$	$T = 12\Delta t$	$T = 15\Delta t$	$T = 20\Delta t$	$T = 30\Delta t$
0	0.4794	0.3990	0.2408	0.2005	0.1610	0.1209	0.0815
1	2334	2421	2011	1770	1486	1156	799
2	0269	0540	1172	1217	1169	1010	753
3		0044	0477	0651	0784	0807	681
4			0136	0271	0448	0589	592
5				0088	0218	0393	494
6					0090	0240	397
7						0133	306
8						0067	227
9							161
10							110
11							072

Die Hochpaßfilterung läßt sich in einfacher Weise durch

$$\bar{a}_j(\text{HP}) = \bar{a}_j - \bar{a}_j(\text{TP}), j = m+1, m+2, \dots, n-m \quad (9)$$

und

$$R(f)_{\text{HP}} = 1 - R(f)_{\text{TP}} \quad (10)$$

auf die Tiefpaßfilterung zurückführen; d.h. die tiefpaßgefilterten Werte sind von den ungefilterten zu subtrahieren und die charakteristische Filterfunktion ist das Supplement zur charakteristischen Filterfunktion der entsprechenden Tiefpaßfilterung (s. Abb. 1, gepunktete Kurve).

Es ist daher nicht notwendig, gesonderte Gewichte zur numerischen Hochpaßfilterung zu berechnen. Entspricht die Normierung der verwendeten Gewichte zur Tiefpaßfilterung der Formel (4), so ergeben sich die zugehörigen hochpaßgefilterten Werte gemäß der Normierung (5), d.h. als Abweichungen vom als null definierten Mittelwert. Im Titelbild, mittlere blaue Kurve, ist die der oberen dick gezeichneten Kurve (Gaußsche Tiefpaßfilterung, $T = 30$ a bzw. $T > 30$ a) entsprechende Hochpaßfilterung ($T \leq 30$ a) dargestellt.

Problematischer als Tief- und Hochpaßfilterung ist die numerische Bandpaßfilterung. Hier soll in Anlehnung an BRIER (1961), LANDSBERG and MITCHELL (1963) sowie MITCHELL et al. (1966) eine Methode angegeben werden, die auf einer charakteristischen Filterfunktion in Cosinus-Form beruht:

$$\begin{aligned} 2 R(f) &= 0 & \text{für } 1/T_R < f < af, \\ 2 R(f) &= 1 + \cos(2 T_R \pi f) & \text{für } af \leq f < f, \\ 2 R(f) &= 1 - \cos(T_R \pi f) & \text{für } f \leq f < bf, \\ R(f) &= 0 & \text{für } bf < f < 1/(2\Delta t) \end{aligned} \quad (11a-d)$$

mit T_R = Reihenlänge, $b > a$ und f bzw. T Frequenz bzw. Periode, deren Schwankungsanteil möglichst isoliert betrachtet werden soll. Auch diese Methode beruht auf einer WMO-Empfehlung (MITCHELL et al. 1966, dort für $a = 1/2$ und $b = 2$ eingehend beschrieben, in verallgemeinerter Form bei SCHÖNWIESE 1974, 1975; dort sind auch Beispiele hierzu zu finden). Wer sich für andere als die hier in sehr enger Auswahl beschriebenen Filtertechniken interessiert, muß auf die Literatur verwiesen werden (z. B. BOX and JENKINS 1970, TAUBENHEIM 1969).

Eine prinzipielle Schwierigkeit aller numerischen Filterungen besteht darin, daß

- ideale Filterungen ($R(f)$ in Rechteckform) nicht zu erreichen sind und
- die Erfüllung der theoretischen $R(f)$ -Funktion unendlich viele Filtergewichte erfordert.

In der Praxis muß ein Kompromiß zwischen möglichst guter Filterung und möglichst wenig verwendeten Filtergewichten, entsprechend möglichst geringer Reihenverkürzung durch die Filterung, gefunden werden.

Die gängigen Methoden der Tiefpaßfilterung liefern Filtergewichte, deren Werte stetig abfallen (s. Abb. 2). Daher liegt es nahe, eine empirische Schwelle anzugeben, ab der die Gewichte wegen geringen Einflusses nicht mehr berücksichtigt zu werden brauchen (approximative Filterung). Bei der Gaußschen Tiefpaßfilterung kann man i. a. diese Schwelle mit $w_k < w_0/10$ festlegen; d.h. Filtergewichte, deren Wert unter 10% des Zentralgewichtes liegt, brauchen nicht mehr berücksichtigt zu werden.

Bei der Bandpaßfilterung nach der oben beschriebenen Methode erhält man hingegen eine Gewichtsfunktion $w_k(k)$, die einen gedämpften sinusartigen Verlauf nimmt (s. Abb. 2). In diesem Fall ist es sinnvoll, die zugehörige Gewichtssummenfunktion

$$\sum_{k=-m}^{+m} w_k(m) \quad (12)$$

zu berechnen, und die Reihe abzubrechen, sobald die Normierung (5) erfüllt ist. Dies ist mehrmals (für verschiedene m -Werte) der Fall, so daß man einen 1., 2., usw. „Nulldurch-

gang“ der Funktion (12) unterscheiden kann (s. Pfeile in Abb. 2). Ein Abbruch nach dem 2. oder 3. „Nulldurchgang“ erbringt im allgemeinen zufriedenstellende Ergebnisse. Jedoch ist gerade bei der Bandpaßfilterung eine Berücksichtigung der Schwankungsstruktur, insbesondere anhand des Varianzspektrums (s. Beitrag 8), erforderlich.

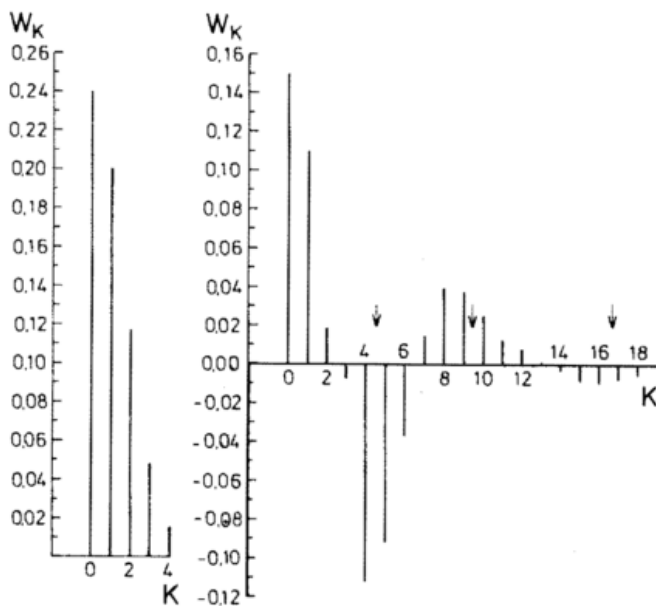


Abb. 2: Graphische Darstellung der Filtergewichte für Tiefpaßfilterung nach Formel (8), Gaußsche Tiefpaßfilterung, links, und Bandpaßfilterung nach Formel (11), rechts; T_s ist jeweils $10\Delta t$, die Normierung entspricht links Formel (4) und rechts Formel (5). Die Pfeile bei den Gewichten des Bandpaßfilters geben die „Nulldurchgänge“ der Gewichtssummenfunktion an (s. Text).

4 Signifikanzprüfung

Die Ergebnisse der Zeitreihen-Filterung gehen zunächst über eine reine Stichproben-Beschreibung nicht hinaus, so daß Rückschlüsse auf die zugehörige Grundgesamtheit oder gar auf die Ursachen nicht ohne weiteres möglich sind.

Die Bewertung der Amplituden gefilterter Zeitreihen erfolgt am besten durch die Signifikanzprüfung des zugehörigen Varianzspektrums (s. Beitrag 8). Will man unabhängig davon zu einer Bewertung kommen, so ist es am einfachsten, ausgehend vom arithmetischen Mittelwert die Vertrauensgrenzen

$$C(p) = z_s \cdot s \quad (9)$$

(vgl. Beiträge 4 und 5, z_s ist der Parameter der standardisierten Normalverteilung) in der Form $\bar{a} \pm C(p)$ bzw. die entsprechenden s -Grenzen anzugeben (s. Titelbild). Dies setzt jedoch normalverteilte und zumindest quasistationäre Daten voraus. Da deutliche Variationen tiefpaßgefilterter Anteile von Zeitreihen gerade auf Nicht-Stationarität (des Mittelwertes) hinweisen, ist das genannte Verfahren nur im Fall von Hoch- und Bandpaßfilterungen sinnvoll, während bei der Prüfung von tiefpaßgefilterten Schwankungsanteilen der s -Wert (vgl. Formel (9)) der komplementären hochpaßgefilterten Schwankungsanteile zu Grunde gelegt werden sollte, (s. Titelbild). Einen Statusbericht über den Stand der sicherlich noch lange

nicht abgeschlossenen Diskussion von Signifikanzprüfungen im Rahmen der Zeitreihenanalyse hat kürzlich OLBERG (1982) gegeben.

Literatur

BÅTH, M.: Spectral analysis in geophysics. Amsterdam: Elsevier (1974).

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.: Time series analysis. San Francisco: Holden-Day (1970).

BRIER, G. W.: Some statistical aspects of longterm fluctuations in solar and atmospheric phenomena. New York Ac. Sci. 95 (1961) S. 173—187.

HOLLOWAY, J. L.: Smoothing and filtering of time series. Adv. Geophys. 4 (1958) S. 351—389.

LANDSBERG, H. E. et al.: Surface signs of the biennial atmospheric pulse. Month. Weath. Rev. 91 (1963) S. 549—556.

MITCHELL, J. M., et al.: Climatic change. Geneva: WMO (1966) = WMO Tech. Note No. 79.

OLBERG, M.: Zur statistischen Beurteilung von Analyseergebnissen geophysikalisch-meteorologischer Beobachtungsreihen. Gerlands Beitr. Geophys. 91 (1982) S. 281—290.

PANOFSKY, H. A.; BRIER, G. W.: s. Bibliographie (Einführung).

SCHÖNWIESE, C.-D.: Schwankungsklimatologie im Frequenz- und Zeitbereich. Wiss. Mitt. Meteorol. Inst. München Nr. 24 (1974).

SCHÖNWIESE, C.-D.: Bemerkungen zur numerischen Bandpaßfilterung von Zeitreihen unter besonderer Berücksichtigung meteorologischer Daten. Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimat. Ser. A 24 (1975) S. 311—320.

SCHÖNWIESE, C.-D.: Zum aktuellen Stand rezenter Klimaschwankungen. Meteorol. Rdsch. 31 (1978) S. 73—84.

SCHÖNWIESE, C.-D.: Northern hemisphere temperature statistics and forcing. Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimat. im Druck, 1983.

1 Voraussetzungen für die elementare Abschätzung

Schon in der Einführung wurde betont, daß statistische Datenauswertungen und die Interpretation der Ergebnisse mit viel Vorsicht und Kritik zu erfolgen haben. Stets muß sichergestellt sein, daß die Voraussetzungen der jeweils angewandten Methode erfüllt sind, die statistischen Kontrollen durchgeführt werden und der deterministische Hintergrund Beachtung findet; dies gilt in erhöhtem Maße für die Korrelationsanalyse.

So wird die Formel für den zweidimensionalen linearen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten nach PEARSON

$$r_{ab} = \frac{s_{ab}}{s_a \cdot s_b} \text{ mit } s_{ab} = \frac{\sum a_i' \cdot b_i'}{n-1} \text{ oder} \quad (1)$$

$$r_{ab} = \frac{\sum a_i' \cdot b_i'}{\sqrt{\sum a_i'^2 \cdot \sum b_i'^2}} \quad (-1 \leq r_{ab} \leq +1) \quad (2)$$

zwar häufig angewandt (mit Stichproben a und b , Abweichungen a_i' und b_i' der Einzelwerte a_i und b_i von den jeweiligen arithmetischen Mittelwerten $\bar{a}$ und $\bar{b}$, Standardabweichungen s_a und s_b , Kovarianz s_{ab} und Zahl der Wertpaare n ; hier wie im weiteren Summierung über $i = 1, \dots, n$, falls nicht anders angegeben). Auch viele Taschenrechner gestatten die rasche Anwendung dieser Formel. Voraussetzungen und Kontrollen sind jedoch weit weniger bekannt; deren Mißachtung aber wäre gerade bei der Korrelationsrechnung eine sträfliche Unterlassung.

Die Voraussetzungen für die Anwendung der Formeln (1) oder (2) (andere Modifikationen s. Literatur) sind folgende:

- A. Vorliegen von genau zwei Stichproben mit jeweils gleichem Umfang n (Richtwert: $n \geq 30$) und gleichem Bezug der jeweils zu Datenpaaren zusammengefaßten Werte.
- B. Gegenseitige Unabhängigkeit der Daten jeweils innerhalb einer Stichprobe.
- C. Normalverteilung der Stichproben (annähernd) und zugehörigen Grundgesamtheiten.
- D. Linearer Zusammenhang.
- E. Unabhängigkeit gegenüber anderen Vorgängen, d.h. von dritten, vierten usw. Datensätzen.
- F. Gültigkeit zunächst nur für die analysierten Stichproben.

Da im folgenden bevorzugt Zeitreihen betrachtet werden sollen, wie sie bei klimatologischen Bearbeitungen besonders häufig vorliegen (Definition s. Beitrag 2 und Formel (10)) ist der in Voraussetzung A genannte Bezug häufig zeitlicher Art, z.B. Zeitreihen, die sich auf gleiche Meßzeiten bzw. gleiche Zeitintervalle beziehen. Da die vorsichtige Interpretation des r -Wertes häufig über einen „Phasen-Ähnlichkeitsindex“ der untersuchten Zeitreihen nicht hinausgehen sollte (hinsichtlich der Amplituden wird in (1, 2) normiert, was in manchen Fällen eine besondere Korrelationsrechnung der Zeitreihen-Amplitudenwerte sinnvoll erscheinen läßt), stehen die Phasen im Vordergrund. Sie werden bei der Kreuzkorrelation variiert.

Die Voraussetzung B ist ein besonders ernst zu nehmendes Hindernis der statistisch-klimatologischen Korrelationsrechnung, da sie häufig nicht zutrifft und dann zu einer Überschätzung der Korrelation führt. Falls Autokorrelation der Stichprobendaten vorliegt, muß sie angegeben und möglichst berücksichtigt werden (z.B. bei den Freiheitsgraden in Formel (5) (s. unten). Den besten Einblick ermöglicht sicherlich die Kohärenzanalyse (s. Beitrag 9) und zugehörige Signifikanzprüfung, was jedoch relativ aufwendig ist.

Die Voraussetzung C läßt sich durch die Errechnung der Häufigkeitsverteilung und Anwendung des „ χ^2 -Anpassungstests“ (s. Beitrag 5) prüfen. Bei signifikanten Abweichungen von der Normalverteilung muß auf den Mutungsbereich μ_0 die sog. Fisher-Transformation angewendet oder von vornherein die Rangkorrelationsrechnung gewählt werden. Die einfachste Formel hierfür lautet nach SPEARMAN

$$r_K = 1 - \frac{6 \sum D_i^2}{n^3 - n}, \quad (3)$$

wobei die Stichprobenwerte a_i und b_i jeweils in eine numerisch steigende Rangfolge gebracht, die Rangplätze der beiden Stichproben nach der ursprünglichen Ordnung (bei Zeitreihen fortlaufender zeitlicher Bezug) verglichen und die Rangplatzdifferenzen D_i berechnet werden. Sind viele Daten einer Stichprobe (Richtwert: $> 25\%$) numerisch gleich, sind Korrekturen erforderlich. (Näheres s. Literatur, z.B. SACHS 1978, SPIEGEL 1976).

Die Voraussetzung D läßt sich in erster Näherung in einem (linearen) „Streudiagramm“ überprüfen. Ist der Zusammenhang nicht linear, wird die Korrelation unterschätzt. In diesem Fall können die Daten mittels der vermuteten nicht linearen Beziehung „linearisiert“ werden (approximatives Schnellverfahren: einfache oder doppelte Logarithmierung). Danach lassen sich die Formeln (1) bzw. (2) anwenden.

Die Voraussetzung E wird zwar prinzipiell durch die partielle und multiple Korrelationsrechnung geprüft bzw. berücksichtigt. Da die klimatologischen Zusammenhänge aber sehr vielfältig und schwer zu überschauen sind, sollten von vornherein folgende Regeln beachtet werden:

- Niemals Zeitreihen korrelieren, deren Zusammenhang keinen deterministischen Hintergrund aufweist.
- Niemals oder nur in Ausnahmefällen innerhalb der multiplen Korrelationsanalyse Zeitreihen korrelieren, die zu wenige (Richtwert: < 5) unterscheidbare Phasen aufweisen.

Dadurch lassen sich viele Scheinkorrelationsrechnungen (z.B. bei zufällig gleichem zeitlichen Trend) vermeiden. Das Quadrat des Korrelationskoeffizienten $B = r^2$ heißt Bestimmtheitsmaß und gibt die relative gemeinsame Varianz der korrelierten Datenreihen bzw. die durch eine entsprechende Regression erklärte relative Varianz an. Häufig ist dieses Maß aussagekräftiger als der Wert des Korrelationskoeffizienten.

2 Mutungsbereich und Signifikanz

Sind die Voraussetzungen A—E gegeben oder durch geeignete Transformationen sichergestellt (C und F können eventuell nachträglich berücksichtigt werden), so gilt der errechnete Korrelationskoeffizient zunächst nur für die Stichproben und sagt keineswegs sofort auch etwas über die zugehörigen Grundgesamtheiten aus. Die Abschätzung des Intervalls, in dem sich der Korrelationskoeffizient ρ der zugehörigen Grundgesamtheiten vermuten läßt, ist bei gegebenen Voraussetzungen denkbar einfach:

$$\text{Mu}_\rho = \pm z \cdot \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}, \quad (4)$$

wobei z , der Parameter der z -Verteilung ist (vgl. Beitrag 4). Es ist daher umso verwunderlicher, daß diese Abschätzung so oft unterbleibt.

Häufiger findet hingegen die weniger kritische Signifikanzprüfung mittels t -Test (s. Beitrag 5)

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \text{ mit } \Phi = n-2 \quad \text{bzw.} \quad \Phi_r = \Phi \frac{1-r_{A1}r_{A2}}{1+r_{A1}r_{A2}} \quad (5)$$

Anwendung, welche die Alternativhypothese $AH = \{\rho > 0\}$ oder $\{\rho < 0\}$ einseitig bzw. $AH = \{\rho \neq 0\}$ zweiseitig prüft. Dabei ist durch Φ_r (reduzierte Zahl der Freiheitsgrade) die Autokorrelation r_A der beiden Zeitreihen (1 und 2) berücksichtigt. Manche Statistik-Bücher enthalten die Relation (5) in Form von expliziten Prüftabellen (z. B. SACHS 1978), allerdings ohne Φ_r .

Ist die Voraussetzung C (Normalverteilung) nicht erfüllt oder fraglich, sollten Mutungsbereich und Signifikanz der Korrelation durch die $\hat{r}$ -Transformation (Original $\hat{z}$) nach Fisher modifiziert werden. Diese Transformation lautet

$$\hat{r} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} = \tan h^{-1} r \quad (6)$$

und wird zunächst auf den nach (1) oder (2) errechneten r -Wert angewendet. Mit

$$\text{Mu}_{\hat{r}} = \pm \hat{r} \pm \frac{z}{\sqrt{n-3}} \quad (7)$$

und der Detransformation der beiden Werte

$$\text{Mu}_\rho = \left\{ \left(\hat{r} \pm \frac{z}{\sqrt{n-3}} \right); \left(\hat{r} \pm \frac{z}{\sqrt{n-3}} \right) \right\} \quad (8)$$

läßt sich der nunmehr asymmetrische Mutungsbereich abschätzen. Die Signifikanzprüfung erfolgt in diesem Fall durch

$$\hat{z} = \hat{r} \sqrt{n-3}. \quad (9)$$

Beispiel: Es sei $r = +0.687$ bei $n = 50$ und nicht gesicherter Normalverteilung. $\hat{r} = \tan h^{-1}(0.687) \approx 0.842$; $\text{Mu}_{\hat{r}, 95\%} = \{0.842 \pm 1.96/\sqrt{47}\} = \{0.556 \text{ --- } 1.128\}$; die Detransformation mittels $\tan h$ ergibt $\text{Mu}_{\rho, 95\%} = \{0.505 \text{ --- } 0.810\}$; $\hat{z} = 0.842 \cdot \sqrt{47} \approx 5.77 > 1.96 = z_{\alpha=0.05} (> 2.33 = z_{\alpha=0.01})$. Die Korrelation ist zwar nach dem z -Test hochsignifikant, trotzdem kann mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% der Korrelationskoeffizient minimal 0.505 betragen und somit möglicherweise nur $0.505 \cdot 100\% \approx 25.5\%$ der Varianz erklären.

3 Autokorrelation

Eine Zeitreihe

$$a_i(t_i) \text{ mit } t_{i+1} - t_i = \Delta t = \text{konst.} \quad (10)$$

ist autokorreliert, falls für mindestens eine der Verschiebungen

$$\tau = k \cdot \Delta t, k = 0, 1, 2, \dots, M (= \text{maximale Verschiebung}) \quad (11)$$

der Autokorrelationskoeffizient

$$(r_A(\tau) \pm \text{Mu}_\rho) > 0 \quad (12)$$

ist.

Für $r_A(\tau = 0)$ muß sich natürlich der Wert 1 ergeben (Selbstkorrelation). Verschiebt man jedoch die Wertreihe $a_i(t_i)$ gegenüber sich selbst (vgl. Abb. 1) um $\tau = \Delta t$, so wird jeder Zeitreihenwert mit dem Folgewert korreliert und der r_A -Wert fällt i. a. geringer aus. Allgemein ist

$$r_A = \frac{\sum a_i'(t_i) \cdot a_i'(t_{i+\tau})}{(n-1-\tau) \cdot s_a^2} \quad (13)$$

ein bestimmter (festes $\tau = \tau_0$) Autokorrelationskoeffizient und $r_A(\tau)$ mit τ variabel (vgl. (11)) die Autokorrelationsfunktion.

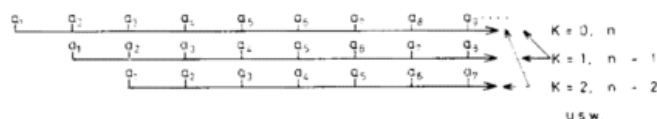


Abb. 1: Veranschaulichung der Zeitverschiebung $\tau = k\Delta t$ bei der Autokorrelation. Die oberste Datenreihe bleibt sozusagen stehen, für $k = 1 \cdot \Delta t$ wird die zweite (numerisch mit der ersten gleich, aber verschoben) mit der ersten korreliert ($n-1$ Wertepaare), für $k = 2 \cdot \Delta t$ wird die dritte mit der ersten korreliert ($n-2$ Wertepaare) und so fort. Bei der Kreuzkorrelation steht in der 2., 3., usw. Zeile eine andere Zeitreihe b_i , bei der numerischen Filterung (Beitrag 6) eine Gewichtsreihe w_i ($i = -m, \dots, 0, +m$).

Hier interessiert vor allem das Zeitintervall $L = 1 \cdot \Delta t$, für das fortlaufend nach (11) die Beziehung (12) gilt. Man bezeichnet es als Erhaltungs- oder Persistenzintervall. Es ist ein Anhalt für die Transformation von Zeitreihen, wenn Korrelationen ohne Störungen durch Autokorrelation untersucht werden sollen (Reduktion $a_j(L_j)$ an Stelle von $a_i(t_i)$). Natürlich verringert sich der effektive Stichprobenumfang fortlaufend mit steigendem τ , was bei der Berechnung der Mutungsbereiche zu berücksichtigen ist. In der Abbildung 2 sind drei wesentlich verschiedene Autokorrelationsfunktionen verglichen (Abbruch bei $\tau > 34$). Während die Zufallszahlen schon bei $\tau = 1 \cdot \Delta t$ auf Werte nahe null abfallen, zeigen die Temperaturwerte signifikante (95%) Persistenz bis $\tau \approx 6$ a. Die zyklische Varianz der Sonnenflecken ($\tau \approx 11 \Delta t$) ist deutlich wiedergegeben.

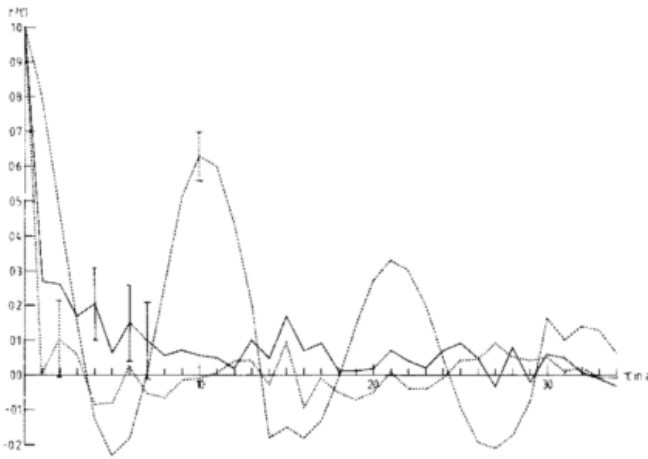


Abb. 2: Drei Beispiele für Autokorrelationsfunktionen, Abbruch jeweils nach $\tau = 34$ a bzw. 34 Verschiebungen; gepunktet Zufallsdaten, ausgezogen Temperatur-Jahresmittel 1660 bis 1969 von Zentral-England, gestrichelt Sonnenflecken-Relativzahlen 1660—1969, Stichprobenumfang jeweils $n = 310$. Die senkrechten Balken markieren die 95%-Mutungsbereiche. Die Zufallsdaten pendeln bereits ab $\tau = 1$ innerhalb dieses Mutungsbereiches um $r_A = 0$, die Temperaturdaten weisen deutliche Persistenz auf (bis c. 6—7 a) und die Sonnenfleckendaten enthalten sehr signifikante zyklische Varianz für $T \approx 10$ —11 a (nach SCHÖNWIESE 1980, ergänzt).

4 Partielle und multiple Korrelation

Stehen Zusammenhänge zwischen mehr als zwei Stichproben zur Diskussion, so müssen die partielle und multiple Korrelationsrechnung zur Anwendung kommen. Im einfachsten dreidimensionalen Fall ist

$$r(\text{part})_{ab \cdot c} = \frac{r_{ab} - r_{ac} \cdot r_{bc}}{\sqrt{(1 - r_{ac}^2) \cdot (1 - r_{bc}^2)}} \quad (14)$$

der partielle Korrelationskoeffizient zwischen a und b unter Ausschaltung von c und

$$|r(\text{mult})_{a \cdot bc}| = \sqrt{\frac{r_{ab}^2 + r_{ac}^2 - 2 \cdot r_{ab} \cdot r_{ac} \cdot r_{bc}}{1 - r_{bc}^2}} \quad (15)$$

der multiple Korrelationskoeffizient bei Betrachtung der Funktion $a = f(b, c)$.

Ganz allgemein (d.h. für beliebig viele Dimensionen $D \geq 2$) ist

$$B = r^2 = \frac{\text{erklärte Varianz}}{\text{gesamte Varianz}} = \text{relativ erklärte Varianz}, \quad (16)$$

wobei „erklärt“ durch die Korrelation bzw. Regression erfaßt bedeutet. Dabei ist s_a^2 die gesamte Varianz und der funktionale Zusammenhang wird als $a = f(b)$, $a = f(b, c)$, usw. aufgefaßt. Dieser funktionale Zusammenhang ist nichts anderes als die zugehörige Regressionsgleichung, die im linearen Fall

$$\hat{a} = \alpha + \beta b + \gamma c + \dots \quad (17)$$

lautet. Durch Multiplikation dieser Gleichung der Reihe nach mit 1, a, b, c, ... und jeweils Summierung über $i = 1, \dots, n$ kommt man zu den sog. Normalgleichungen, deren Lösung die Regressionskoeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ergibt.

Nun läßt sich die „erklärte Varianz“ als Konstellation der Punkte $\hat{a}_i = f(b_i, c_i, \dots)$ exakt auf der Regressionskurve auffassen und die „unerklärte Varianz“ als

$$\Sigma (a_i - \hat{a}_i)^2. \quad (18)$$

Da aber

$$B = 1 - \frac{\Sigma (a_i - \hat{a}_i)^2}{s_a^2} \quad (19)$$

ist, läßt sich $|r(\text{mult})| = |\sqrt{B}|$ mittels (19) aus der Regressionskurve errechnen. Dies erweist sich bei vielen Dimensionen als der relativ einfachste Weg. Bezüglich der Einzelheiten muß auf die Literatur verwiesen werden, auch was die Linearisierung nicht linearer Zusammenhänge betrifft.

Der nötige Aufwand steigt mit der Erhöhung der erfaßten Dimensionen rasch an und ist ohne Zuhilfenahme von Tischrechnern oder Rechenanlagen meist nicht mehr zu bewältigen.

Die Mutungsbereichsformel (ohne und mit r-Transformation) kann auf partielle und multiple Korrelationskoeffizienten übertragen werden. Dies gilt auch für die Signifikanzabschätzung partieller Korrelationskoeffizienten. Die Signifikanz der multiplen Korrelation prüft

$$\hat{F} = \frac{r^2(\text{mult})}{1 - r^2(\text{mult})} \cdot \frac{n - (k - 1) - 1}{k - 1} \text{ mit } \begin{cases} \Phi_1 = k - 1 \\ \Phi_2 = n - (k - 1) - 1 \end{cases}, \quad (20)$$

wobei n die Anzahl der Werte-Tripel, -Quadrupel usw., k die Anzahl der erfaßten Variablen insgesamt und l die Anzahl der Einflußgrößen ist (i.a. $l = k - 1$).

5 Kreuzkorrelation

Bei der Kreuzkorrelationsanalyse wird ähnlich der Autokorrelationsanalyse eine Verschiebung τ eingeführt; jedoch handelt es sich hier um zwei verschiedene Wertereihen $a_i(t_i)$ und $b_i(t_i)$, deren Korrelation bei unterschiedlicher Phase untersucht werden soll. Für beliebiges $\tau = k \cdot \Delta t$, $k = 0, 1, \dots, M$ lautet der Kreuzkorrelationskoeffizient (bei positiver Verschiebung von a_i)

$$r_k = \frac{\Sigma a_i'(t_i + \tau) \cdot b_i'}{(n - 1 - \tau) \cdot s_a \cdot s_b}. \quad (21)$$

Für $\tau = 0$ gilt natürlich $r_k(\tau = 0) = r$. Die Funktion $r_k(\tau)$ heißt Kreuzkorrelationsfunktion; vgl. Beitrag 9.

Literatur s. Bibliographie (Einführung), zu den Beispielen auch

MANLEY, G.: Central England temperatures: monthly means 1659—1973. Q.J.R. Meteorol. Soc. 100 (1974) S. 389—405.

SCHÖNWIESE, C.-D.: Climatic change predictability and realization by means of statistical filter models. Meteorol. Rdsch. 33 (1980) S. 75—83.

SCHÖNWIESE, C.-D.: Solar activity, volcanic dust and temperature: statistical relationships since 1160 A.D. Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimat. Ser. A 30 (1981) S. 1—22.

1 Methodik

Für die statistische Analyse einer Zeitreihe $a_i(t_i)$ (vgl. Beiträge 2, 6 und 7) gibt es zwei Aspekte:

- Analysen im „Zeitbereich“;
- Analysen im „Frequenzbereich“.

Bei allen Analysen im „Zeitbereich“ bleiben die Zeitreihendaten in ihrer Eigenschaft als Funktion der Zeit erhalten: z. B. Mittelungen und Variationsmaße (über das gesamte Zeitreihenintervall oder Teile davon, vgl. Beitrag 2), Häufigkeitsverteilung (Beitrag 2), Korrelation mit anderen Zeitreihen (Beitrag 7), Filterungen (Beitrag 6), empirische Orthogonalfunktionen (Beitrag 11), Schätz- und Testverfahren (Beiträge 4 und 5).

Dagegen wird bei Analysen im „Frequenzbereich“ die Information über die Variation der Zeitreihendaten so transformiert, daß eine Funktion der Frequenz f bzw. Periode $T = \frac{1}{f}$ entsteht, ein Spektrum somit, wie im Prinzip jedem aus der Optik (Farben) oder Radiotechnik (Senderfrequenzen) vertraut.

Im Fall statistischer Analysen im „Frequenzbereich“ kommt es nun darauf an, solche Methoden zu benützen, die möglichst wenige Voraussetzungen beinhalten und die Prüfung des Stichprobenspektrums hinsichtlich vermuteter Eigenschaften des unbekannten Populationsspektrums erlauben. Insbesondere darf keine strenge Periodizität

$$a_i(t_i + T_*) = a_i(t_i) \text{ mit } T_* = \text{konstanter Festwert} \quad (1)$$

vorausgesetzt werden (wie bei harmonischen Analysen), die in meteorologischen und klimatologischen Zeitreihen niemals auftritt. Von Interesse ist hingegen, daß zyklische Schwankungen (mit Variationen der Periode T , was lediglich die Angabe einer mittleren Periode $\bar{T}$ ermöglicht, und vor allem Variationen der Amplitude) erfaßt werden, Phasensprünge sich dabei nicht störend auswirken und auch der kontinuierliche Übergang von „Breitbandzyklen“ (große Variation von T) zu transienten Schwankungen (unzyklisch, somit auch völlig unperiodisch) richtig wiedergegeben wird.

Die sozusagen klassische Methode, die durch Weiterentwicklung der verallgemeinerten harmonischen Analyse entstand und bereits vor mehr als drei Jahrzehnten in praktikabler Form (wegen des Rechenaufwandes i. a. nur an Rechenanlagen praktikabel) vorgestellt wurde (TUKEY 1949) beruht auf folgendem Prinzip: Die Autokorrelationsfunktion (vgl. Beitrag 7)

$$r_A(\tau) = \frac{\sum a_i'(t_i) \cdot a_i'(t_{i+\tau})}{(n-1-\tau) \cdot s_a^2} \text{ mit } \begin{cases} \tau = k \cdot \Delta t \\ k = 0, 1, \dots, M \end{cases} \quad (2)$$

bzw. die Autokovarianzfunktion

$$s_A(\tau) = \frac{1}{n-1-\tau} \sum a_i'(t_i) \cdot a_i'(t_{i+\tau}) \text{ mit } \tau, k \text{ wie oben} \quad (3)$$

wird der Fouriertransformation unterworfen. Diese liefert im

Fall einer stetigen unendlichen Zeitfunktion $a(t)$ den Ausdruck

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot \exp(-ift) dt, \quad (4)$$

der eine Umformung dieser Zeitfunktion in eine Darstellung der darin enthaltenen Schwingungen als stetige Funktion der Frequenz (Fourier-Integral, spektrale Dichte) darstellt.

Im diskreten Fall und in der Anwendung der Fourier-Transformation auf (2) bzw. (3) erhält man ein Spektrum (BLACKMAN and TUKEY 1958, MITCHELL et al. 1966 u. a.)

$$Sp(0) = \frac{1}{2M} [s_A^2(0) + \sum_{k=1}^{M-1} D(k) \cdot s_A^2(k)] \text{ für } h = 0 \quad (5)$$

$$Sp(h) = \frac{1}{M} [s_A^2(0) + \sum_{k=1}^{M-1} D(k) \cdot s_A^2(k) \cdot \cos \frac{\pi h k}{M}] \text{ für } h = 1, 2, \dots, M-1 \quad (6)$$

$$Sp(M) = \frac{1}{2M} [s_A^2(0) + \sum_{k=1}^{M-1} D(k) \cdot s_A^2(k) \cdot (-1)^k] \text{ für } h = M \quad (7)$$

wobei $D(k)$ eine Filterfunktion (window), z. B. der Form

$$D(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi k}{M}) & \text{für } 0 \leq k \leq M \\ 0 & \text{für } -\infty \leq k \leq 0 \text{ und } M < k \leq +\infty \end{cases} \quad (8)$$

ist, welche die Anwendung der Fouriertransformation auf endliche Zeitreihen ermöglicht.

Das resultierende Spektrum (Rohspektrum, auf spektrale Glättungen soll wegen der direkten Anwendbarkeit der Prüfverfahren verzichtet werden)

$$Sp(\Delta f) = Sp(h), h = 0, 1, \dots, M \quad (9)$$

gibt an, wie sich die Zeitreihenvarianz auf die Frequenzintervalle $h/2 M \Delta t$ (etwas mißverständlich auch harmonische Teilschwingungen pro $2 M \Delta t$ genannt) bzw. Periodenintervalle $2 M \Delta t / h$ verteilt. Es sollte daher als Varianzspektrum bezeichnet werden. Es sind jedoch auch die Bezeichnungen Energie-(engl. power), Anomalie-, Frequenz-, Autospektrum (im Gegensatz zum Kreuzspektrum, s. Beitrag 9) u. a. in Gebrauch. Als Grenzen des Spektrums folgen

$$T_{\min} = 2 \Delta t, T_{\max} = 2 M \Delta t \text{ bzw. } T = \infty \text{ für } h = 0 \quad (10)$$

oder die reziproken Werte für $f_{\min}$ (sog. Nyquist-Frequenz) und $f_{\max}$.

Liegt der Berechnung die Formel (3) zu Grunde (Autokovarianz), so erhält man als Summe der Spektralwerte die (absolute) Varianz s^2 der Zeitreihe, während sich im Fall von (2) (Autokorrelation) die relative Varianz und dementsprechend ein relatives Varianzspektrum ergibt.

2 Darstellung

Die Identität

$$s = \int \text{Sp}(\Delta f) df = \int \Delta f \cdot \text{Sp}(\Delta f) \cdot d \ln f \quad (11)$$

weist auf die beiden möglichen Darstellungen des Varianzspektrums hin: Entweder linear, wobei sich die Varianzwerte (Ordinate) in $\text{ME}^2/\Delta f$ (ME = Maßeinheit der Zeitreihendaten) ergeben, oder mit logarithmischer Abszisse und Multiplikation der Varianzwerte mit den Frequenzintervallen (ergibt Ordinatenwerte in ME^2 (vgl. Abb. 1)). Die letztere Darstellungsart wird bei Turbulenzspektren bevorzugt; Windgeschwindigkeitsdaten liefern dann eine Darstellung der Energie (pro Masseneinheit), was die Bezeichnung Energiespektrum rechtfertigt.

Bei der historisch jüngeren Anwendung der spektralen Varianzanalyse auf klimatologische Reihen (PANOFKY und BRIER 1958, MITCHELL et al. 1966, SCHÖNWIESE 1969) sollte jedoch die erstgenannte lineare Darstellungsart bevorzugt werden, da sie besser interpretierbar und vor allem leichter nachprüfbar ist. Die diskrete Natur der Varianz-Stichprobenspektren kann durch Säulendarstellungen (pro Frequenzintervall eine Säule) zum Ausdruck gebracht werden. Meist werden jedoch die Ordinatenwerte der Intervallmitten durch einen linearen Kurvenzug verbunden.

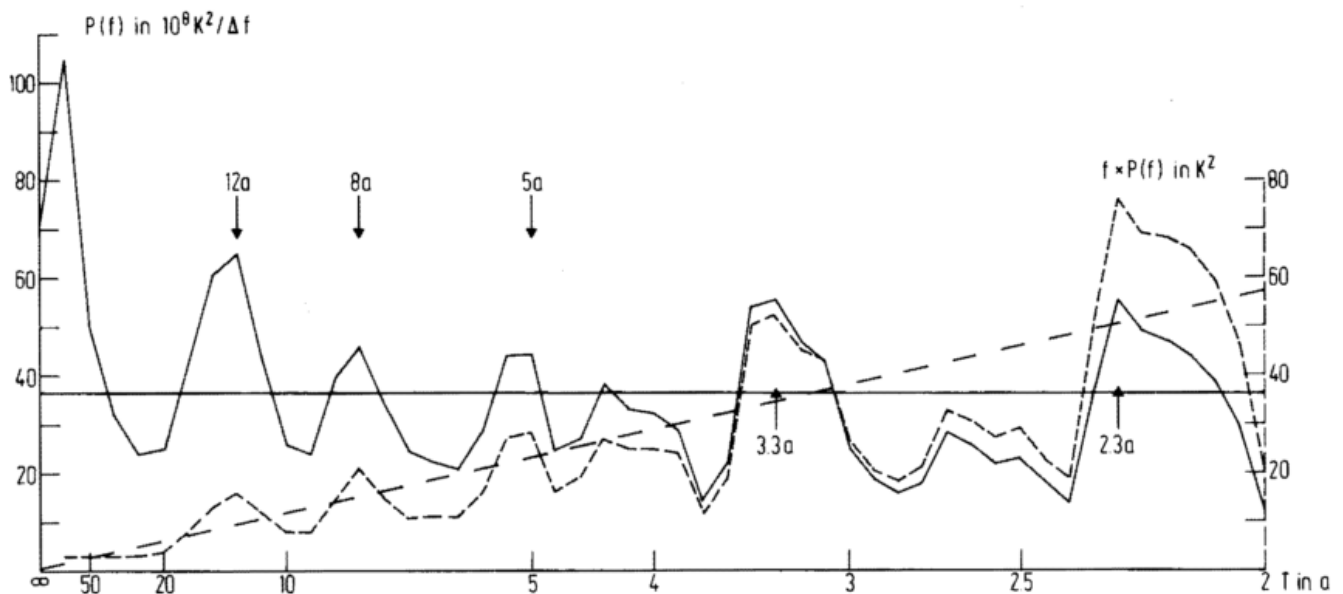


Abb. 1: Varianzspektrum der Temperaturreihe 1781–1979 (Jahresdaten) vom Hohenpeißenberg ($M = 50$) in linearer Darstellung, ausgezogene Kurve und linke Ordinatenbeschriftung, sowie Varianzanteile mit der Frequenz multipliziert, gestrichelte Kurve und rechte Ordinatenbeschriftung (a = Jahre); jeweils mit theoretischem weißem Spektrum, das nur im ersten Fall eine horizontale Gerade ist und im zweiten Fall in Richtung zu den kleineren Perioden hin ansteigt. Das theoretische rote Spektrum unterscheidet sich bei dieser Zeitreihe nur unwesentlich vom weißen (bezüglich der linken Ordinatenbeschriftung ist $R(H = 0) \approx 43$, $R(H = 50) \approx 29 \cdot 10^8 \text{ K}^2/\Delta f$) (nach SCHÖNWIESE 1980, ergänzt).

3 Interpretation und Prüfung

In der Abbildung 2 sind einige typische Zeitreihen und die zugehörigen theoretischen Populationsspektren (bedingt unendliche Zeitreihen) in linearer Darstellungsart zusammengestellt. Beispielsweise erhält man für reine Zufallsdaten (Zufallsrauschen) eine horizontale Linie, das sog. weiße Spektrum, bei dem alle Frequenzen gleiche Varianz aufweisen (in Analogie zur Farbe weiß im optischen Spektrum, die sich aus allen Farben gleichmäßig zusammensetzt).

Sowohl beim Übergang von einer streng periodischen Schwankung (z. B. Sinus) zu einer zyklischen als auch von einer Populations- zu einer Stichprobenschwankung periodischen Charakters geht das „Linienspektrum“ in ein „Bänderspektrum“ (verbreitete Maxima) über. Da in der Praxis stets nur Stichprobenspektren verfügbar sind und exakte Perioden in der Klimatologie nicht auftreten, ist es wichtig, zu prüfen, ob etwaige relative Maxima eines Stichprobenspektrums (vgl. Abb. 3) nur eine zufällige Stichprobeneigenschaft (wie ggf. Abweichungen von Stichproben-Häufigkeitsverteilungen von theoretischen Verteilungen) oder auch beim zugehörigen Populationsspektrum zu erwarten sind.

Es liegt nahe, von der Nullhypothese der Zufälligkeit (weißes Spektrum) und der Alternativhypothese der Überzufälligkeit (vgl. Beitrag 5) auszugehen. Bei klimatologischen Zeitreihen

ist jedoch ein weiteres Faktum so gut wie sicher: die Autokorrelation bzw. Persistenz. Es hat sich als nützlich herausgestellt, dafür das Modell des „roten Rauschens“ nach MARKOV (s. z. B. MITCHELL et al. 1966) zu benutzen, das eine Autokorrelationsfunktion (vgl. Beitrag 7) der Form

$$r_A(\tau = k\Delta t) = r_A^k(\tau = 1\Delta t) \text{ mit } k = 2, 3, \dots, M \quad (11)$$

liefert und Spektren, die zu kleinen Frequenzen bzw. großen Perioden hin stetig ansteigen: sog. rotes Spektrum (beinhaltet Zufälligkeit und Persistenz).

In (11) sind durch den Autokorrelationskoeffizienten für die Zeitverschiebung $\tau = 1\Delta t$ ($k = 1$; vgl. Beitrag 7) alle weiteren

Koeffizienten festgelegt. In Stichprobenspektren zeigt sich dies wegen zufälliger Besonderheiten und möglicher ungleicher Varianzverteilung (möglich hier auch in Bezug auf das zugehörige Populationsspektrum) praktisch nie. Da sowohl das Populationsspektrum als auch die Populations-Autokorrelationsfunktion unbekannt sind, müssen die $r_A(\tau)$ -Werte der Stichprobe entnommen werden.

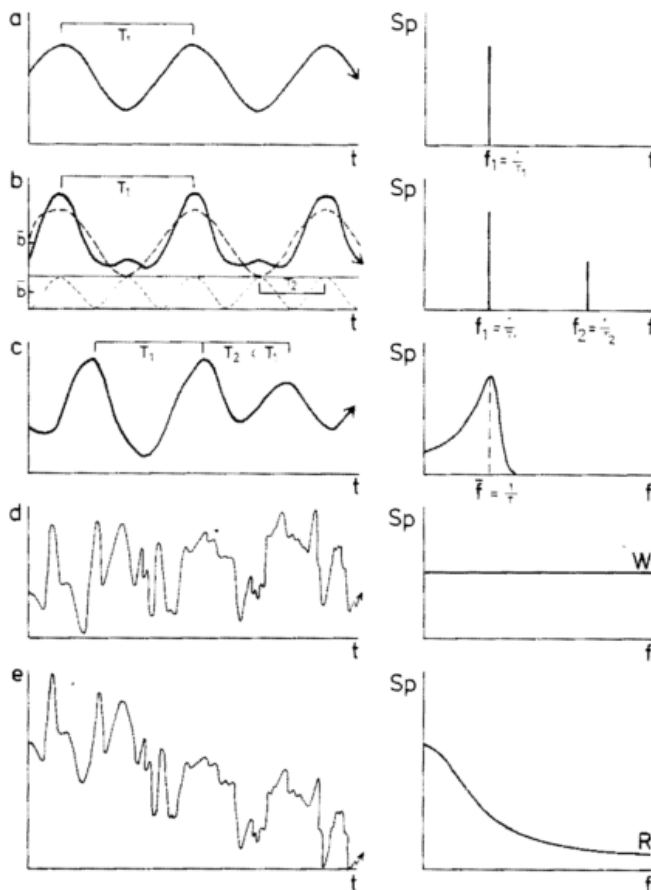


Abb. 2: Zur Interpretation von Varianzspektren sind jeweils links (kontinuierliche) unendlich lange Zeitfunktionen definiert und jeweils rechts dazu die Populations-Varianzspektren dargestellt. Es bedeuten: a) Sinuskurve, b) Überlagerung der beiden gestrichelt gezeichneten Sinuskurven, c) zyklische (rhythmische) Schwankung mit etwas variierender Periode und stark variierender Amplitude, d) Zufallsdaten („Zufallsrauschen“), wobei W das theoretische weiße Spektrum ist, e) Zufallsdaten mit überlagerter Persistenz (Trend), R ist ein theoretisches rotes Spektrum.

In der Praxis hat es sich als annehmbar erwiesen, zunächst eine empirische Anpassung des Markov-Modells mit Hilfe des errechneten $r_A(\tau = 1\Delta t)$ -Wertes zu versuchen, und zwar in der Hoffnung, daß dieser Wert von der ungleichen Varianzverteilung der Stichprobe noch nicht allzu sehr beeinflusst ist. Im Fall zu großer Abweichungen des empirischen Stichproben-„Hintergrundspektrums“ (d. h. ohne Beachtung der relativen Maxima) von diesem Modell müssen jedoch auch $r_A(\tau)$ -Werte für $\tau > 1\Delta t$ berücksichtigt werden.

Zur Errechnung des roten Spektrums R nach der Markov-Theorie kann bei bekanntem $r_A(\tau = 1\Delta t) = r_1$ die Formel

$$R\left(\frac{k}{M}\right) = W \frac{1 - r_1^2}{1 + r_1^2 - 2r_1 \cos\left(\pi \frac{k}{M}\right)} \quad (12)$$

benützt werden, mit W = weißes Spektrum und k/M = relative Frequenz (Maximum für $k = 0 \rightarrow f = 0$, $T = \infty$; Minimum für $k = M \rightarrow f = 1/2\Delta t$, $T = 2\Delta t$). Eine Tabelle und nähere Erläuterungen hierzu sind bei MITCHELL et al. (1966) zu finden. Im Fall relativer Spektren entfällt natürlich die Multiplikation mit W .

In der Abbildung 3 ist neben dem Stichprobenspektrum der nordhemisphärischen Temperatur (Daten vgl. Beitrag 2 und Titelbild) das auf diese Weise erhaltene rote Spektrum, zugleich die Nullhypothese des folgenden Testverfahrens, mit 'R' bezeichnet. Nun sollen die Wahrscheinlichkeitsgrenzen $\hat{P}_\alpha$ festgelegt werden, die von den relativen Maxima des Stichprobenspektrums erreicht oder überschritten werden müssen, damit mit der betreffenden Wahrscheinlichkeit p bzw. Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1 - p$ (vgl. Beitrag 5) diese Maxima auch im zugehörigen Populationsspektrum vermutet werden dürfen. Nach PANOFSKY und BRIER (1958), MITCHELL et al. (1966) u. a. erfolgt dies durch die Errechnung der Grenzen

$$SN_p \text{ bzw. } SN_\alpha = R(\Delta f) \cdot \frac{\chi_{\phi, \alpha}^2}{\phi} \text{ mit } \phi = \frac{2n - \frac{M}{2}}{M} \quad (13)$$

und n = Anzahl der Zeitreihendaten, M = maximale Verschiebung bei der Autokorrelation bzw. Autokovarianz und ϕ = Anzahl der Freiheitsgrade. (ϕ sollte möglichst nicht kleiner als 5 sein; TAUBENHEIM (1969) empfiehlt sogar $M \leq n/10$.)

In der Praxis bedeutet dies, daß zunächst für festes ϕ (als Funktion von n) und variables α (z. B. 0.2, 0.1, 0.05, 0.01 $\triangleq p = 80\%, 90\%, 95\%, 99\%$) aus einer allgemeinen Tabelle der χ^2 -Verteilung die $\hat{P}$ -Werte (Quantile) entnommen und jeweils durch ϕ dividiert werden müssen. Die erhaltenen Faktoren $\hat{P}_\alpha = \chi_{\phi, \alpha}^2 / \phi$ werden dann mit den Werten $R(\Delta f)$ des roten Spektrums multipliziert. In der Abbildung 3 sind solche Grenzen eingezeichnet (CI(Si) mit CI = confidence level und Si = $1 - \alpha$).

Falls Varianzspektren auf direkten Messungen zu bestimmten Zeitpunkten beruhen, kann die Stichprobennahme im Abstand Δt zum Effekt der Frequenzmißdeutung (aliasing) führen (s. Abb. 4). Diese Mißdeutung erfolgt immer in Richtung einer zu starken Betonung der niedrigen Frequenzen des Spektrums. Sie kann durch Verwendung geeigneter Intervallmittelwerte vermieden werden.

4 Schlußbemerkungen

Varianzspektren eröffnen die spektrale Betrachtungsweise der Zeitreihenvariabilität und sind aus der Klimatologie wie schon seit längerer Zeit aus anderen Bereichen der Meteorologie (z. B. Turbulenzuntersuchungen) nicht mehr wegzudenken. Für weitere Methoden wie Verknüpfung mehrerer Spektren (s. Beitrag 9) bilden sie die Grundlage. Es sollte dabei nicht vergessen werden, daß ein Varianzspektrum zunächst nichts anderes als eine besondere Art der Stichprobenbeschreibung ist. Für allgemeinere Vermutungen und Schlüsse sind die oben beschriebenen Testverfahren unumgänglich.

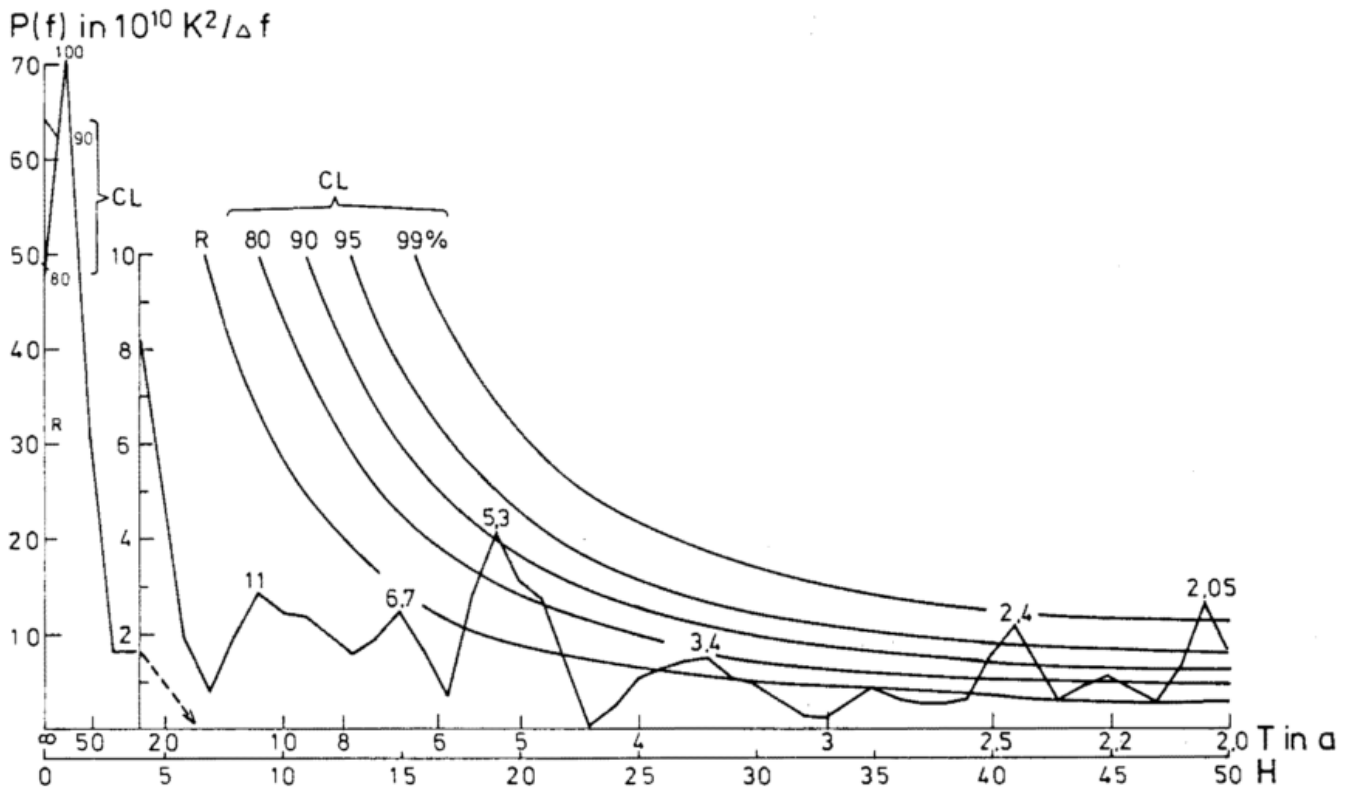


Abb. 3: Varianzspektrum der nordhemisphärischen jährlichen Temperaturabweichungen 1881–1980 (Daten s. Titelbild, $M = 50$) mit angepaßtem theoretischem roten Spektrum R und Vertrauensgrenzen CL. Während das Spektrum (Abb. 1) fast „weiß“ ist, ergibt sich hier ein so extrem „rotes Spektrum“, daß eine Änderung des Ordinatenmaßstabes angebracht erscheint. Auch die Auflösung ist mit $\phi = 3,5$ extrem (nach SCHÖNWIESE 1983).

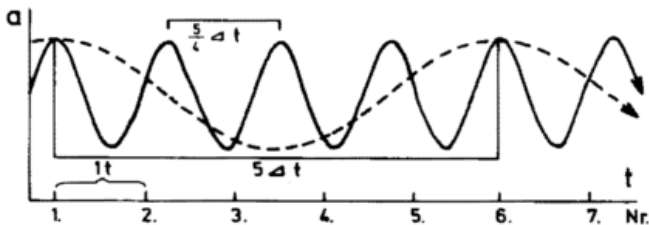


Abb. 4: Veranschaulichung der Frequenzmißdeutung (aliasing). Die in Wirklichkeit kontinuierliche (ausgezogene gezeichnete) Zeitfunktion wird nur zu den mit Nr. 1, 2, usw. bezeichneten äquidistanten Zeitpunkten gemessen (Zeitreihe) und täuscht, falls nur diese Zeitreiheninformation vorliegt, eine (gestrichelt gezeichnete) Schwankung mit niedrigerer Frequenz (längerer Periode) vor.

Gerade wegen dieser Testverfahren ist unter den durchaus verschiedenen Möglichkeiten der spektralen Varianzanalyse hier die ältere Methode ausgewählt worden. Neuere Methoden, wie z. B. die „schnelle Fouriertransformation“ (engl. Abkürzung FFT) mit dem Vorteil einer erheblichen Rechenzeitverkürzung oder die aus der Informationstheorie entwickelte „Maximum-Entropie-Spektralanalyse“ (MESA) mit dem wichtigen Vorteil einer besseren spektralen Auflösung sind den statistischen Prüfverfahren weniger leicht zugänglich. Die MESA ist kürzlich in einer zusammenfassenden Arbeit von JUNK (1983) beschrieben und mit der herkömmlichen Spektralanalyse verglichen worden (s. auch BURG 1967, ULRICH and BISHOP 1975, RADOSKI et al. 1975). Sie wird in

Zukunft sicherlich häufiger anzutreffen sein, möglicherweise (zur Sicherstellung der Signifikanzprüfung) in Kombination mit der hier beschriebenen herkömmlichen Methode. Schließlich besteht die Möglichkeit, Varianzspektren für unterschiedliche übergreifende Zeitintervalle oder für räumliche Gitterpunkte, an denen gleich lange Zeitreihen vorliegen, anzuwenden („dynamisches Spektralanalyse bzw. MESA“) und dreidimensional darzustellen.

Literatur

- BÄTH, M.: Spectral analysis in geophysics. Amsterdam: Elsevier (1974).
- BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G.: Measurement and analysis of Random Data. New York: Wiley (1966).
- BLACKMAN, R. B.; TUKEY, J. W.: The measurement of power spectra. New York: Dover (1958).
- BURG, J. P.: Maximum entropy spectral analysis. Unpubl. paper presented at the 37th Meeting of Soc. Explor. Geophys., Oklahoma City (1967).
- LANDSBERG, H. E.; TAYLOR, R. E.: Spectral analysis of long meteorological series. J. Interdiscipl. Cycle Res. 7 (1976) S. 237–243.
- MITCHELL, J. M.; et al.: Climatic change. Geneva (1966) = WMO Tech. Notes No. 79.
- JUNK, H.-P.: Die Maximum-Entropie-Spektralanalyse (MESA) und ihre Anwendung auf meteorologische Zeitreihen. Diplomarbeit, Meteorol. Inst. Bonn 1983.

- RADOSKI, H. R.; et al.: A comparison of power spectral estimates and applications of the maximum entropy method. J. Geophys. Res. 80 (1975) S. 619—625.
- PANOFSKY, H. A.; BRIER, G. W.: s. Bibliographie (Einführung).
- SCHÖNWIESE, C.-D.: Spektrale Varianzanalyse klimatologischer Reihen im langperiodischen Bereich. Wiss. Mitt. Meteorol. Inst. München Nr. 15 (1969).
- SCHÖNWIESE, C.-D.: Regionale Zuordnung der spektralen Varianz langer europäischer Temperaturreihen und Anwendung in einem statistisch-prognostischen Filtermodell für das Alpenvorland. Meteorol. Rdsch. 33 (1980) S. 167—174.

- SCHÖNWIESE, C.-D.: Northern hemisphere temperature statistics and forcing. Arch. Meteorol. Geophys. Bioklimat. (1983, im Druck).
- TAUBENHEIM, J.: s. Bibliographie (Einführung).
- TUKEY, J. W.: The sampling theory of power spectrum estimates. Off. Naval Res. Washington, NAVEXOS-P-735 (1949) S. 47 ff.
- ULRYCH, T. J.; BISHOP, T. N.: Maximum entropy spectral analysis and autoregressive decomposition. Rev. Geophys. Space Phys. 13 (1975) S. 183—200.

9

H. FLEER, Darmstadt

Das Kreuzspektrum

1 Einleitung

Die im Beitrag 7 besprochene lineare Kreuzkorrelationsanalyse liefert nur Informationen über den Grad der Güte der linearen Abhängigkeit und die Art (gleich- oder gegensinniges Verhalten) der Übereinstimmung von Schwankungen in zwei Zeitreihen. Wenn zwei Zeitreihen miteinander korreliert sind, kann zusätzlich von Interesse sein, ob diese enge lineare Abhängigkeit durch eine Korrelation zwischen den hochfrequenten oder den niederfrequenten Anteilen bedingt ist. Wenn z. B. die niederfrequenten Komponenten miteinander negativ, die hochfrequenten dagegen positiv verknüpft sind, können zwei Zeitreihen in der linearen Korrelationsanalyse unkorreliert erscheinen.

Der Frequenzbereich, in dem die Koppelung der zeitlichen Fluktuationen zweier Beobachtungsreihen am ausgeprägtesten ist, läßt sich mit Hilfe der Kreuzspektralanalyse ermitteln.

Dieses Analyseverfahren wurde zunächst in der Nachrichtentechnik zur Prüfung und Entwicklung von Schaltungen und für die Untersuchung von Signalverläufen eingesetzt.

Nachdem elektronische Analysiergeräte auf den Markt kamen, hat sich diese Methode u. a. auch auf Anwendungen bei mechanischen, bio- und geophysikalischen, ozeanographischen und meteorologischen Fragestellungen ausgedehnt.

In der Meteorologie wird das Verfahren hauptsächlich für die Messung und Interpretation turbulenter Schwankungen atmosphärischer Parameter eingesetzt. Zweifellos ist es jedoch auch für die statistisch-klimatologische Analyse von großem Nutzen.

2 Das Ko- und Quadratspektrum

Das Konzept des Kreuzspektrums für zwei Zeitreihen $x(t)$ und $y(t)$ ergibt sich direkt aus den Kreuzkovarianzen. Da die Kreuzkovarianzfunktion keine gerade Funktion ist, d. h. $R_{xy}(p) \neq R_{yx}(-p)$ (p ist die zeitliche Verschiebung) ist die Kreuzspektrumfunktion $P_{xy}(h)$ eine komplexe Größe.

Wie die Varianzspektrumsfunktion $P_x(h)$ für eine einzelne Zeitreihe die Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion $R_x(p)$, ist die Kreuzspektrumfunktion $P_{xy}(h)$ von zwei Zeitreihen die Fouriertransformierte der Kreuzkovarianzfunktionen $R_{xy}(p)$ und $R_{yx}(p)$. Verknüpft man die beiden Kreuzkovarianzen $R_{xy}(p)$ und $R_{yx}(p)$ durch Addition bzw. Subtraktion, so erhält man den geraden bzw. ungeraden Teil der *Kreuzkovarianzfunktion*.

Bei der Fouriertransformation wird der gerade Teil mit der cos-Funktion transformiert und liefert den reellen Teil des Kreuzspektrums, das *rohe Wirk- oder Kospektrum* $C_{xy}(h)$.

Für endliche Reihenlänge und diskrete Verteilung der Meßwerte (der Fall, der in der Meteorologie am häufigsten auftritt) ist:

$$C_{xy}(h) = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{p=0}^m \epsilon_p (R_{xy}(p) + R_{yx}(p)) \cos \frac{hp\pi}{m} \quad (1)$$

$$h = 0, 1, \dots, m \quad \epsilon_p = \begin{cases} 0,5 & \text{für } p = 0, m \\ 1 & 0 < p < m \end{cases}$$

(h = Harmonische,

Δt = konstanter zeitlicher Abstand der Meßwerte voneinander,

p = zeitliche Verschiebung,

m = maximale zeitliche Verschiebung).

Die Transformation des ungeraden Teils mit der sin-Funktion liefert den imaginären Teil des Kreuzspektrums, das *rohe Blind- oder Quadratspektrum* $Q_{xy}(h)$:

$$Q_{xy}(h) = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{p=0}^m \epsilon_p (R_{xy}(p) - R_{yx}(p)) \sin \frac{hp\pi}{m} \quad (2)$$

$$h = 0, 1, \dots, m \quad \epsilon_p = \begin{cases} 0,5 & p = 0, m \\ 1 & 0 < p < m \end{cases}$$

Beide, das rohe Wirk- und das rohe Blindspektrum, werden wie das schon vorgestellte Varianzspektrum (Beitrag 8) geglä-

tet, zum Beispiel mit dem dreifach gewichteten, übergreifenden Hamming-Filter:

$$\begin{aligned} SC_{xy}(0) &= 0,54 C_{xy}(0) + 0,46 C_{xy}(1) \\ SC_{xy}(h) &= 0,23 C_{xy}(h-1) + 0,54 C_{xy}(h) + 0,23 C_{xy}(h+1) \\ &0 < h < m \\ SC_{xy}(m) &= 0,54 C_{xy}(m) + 0,46 C_{xy}(m-1) \end{aligned} \quad (3)$$

Die erste Gleichung berechnet den Ko- bzw. Quadratspektrumsbeitrag, der der Kovarianz aller Frequenzintervalle, die kleiner als $\frac{1}{2m\Delta t}$ sind, entspricht.

Die dritte Gleichung bestimmt den Kovarianzbeitrag, den die höchste erfaßbare Frequenz, die sogenannte Nyquistfrequenz $f_N \frac{1}{2\Delta t}$, liefert.

Alle übrigen $m-1$ Ko- bzw. Quadratspektrumswerte werden mit der mittleren Gleichung bestimmt, die den Kovarianzbeitrag pro $\frac{h\pi}{m\Delta t}$ Frequenzintervall angibt.

Das Kreuzspektrum liefert also spektrale Dichten in der Einheit von $x(t) \cdot \text{Einheit von } y(t) \text{ pro Frequenzintervall } \frac{1}{2m\Delta t}$.

Während das Varianzspektrum einer Zeitreihe nur positive Werte annehmen kann, können beim Wirk- bzw. Blindspektrum sowohl positive wie auch negative Werte auftreten. Ko- bzw. Quadratspektrum liefern bei positiver Kovarianz in einem bestimmten Frequenzintervall die gleich- bzw. um 90° (in Quadratur) phasenverschobenen Anteile der Schwankungen zweier Zeitreihen für diesen Wellenlängenbereich.

Negative Kovarianzbeiträge im Ko- bzw. Quadratspektrum stehen für gegenphasig bzw. um 270° phasenverschobene Anteile.

Koppelung von Zufallsreihen oder eine Zufallsreihe mit einer nicht zufällig zusammengesetzten Zeitreihe ergeben Ko- und Quadratspektrumswerte, die im gesamten analysierten Frequenzbereich sich nicht signifikant von 0 unterscheiden. Weisen dagegen zwei Zeitreihen in einem bestimmten Frequenzbereich gleich- oder phasenverschobene Schwankungen auf, so zeigt sich im Kreuzspektrum ein deutlich von Null verschiedener Kovarianzbeitrag. Zur Prüfung der statistischen Signifikanz der Signale dient der schon bei den Varianzspektren im Beitrag 8 vorgestellte χ^2/ν -Test (ν = Freiheitsgrade).

Der Fehler, der durch die Fouriertransformation entsteht, kann wie beim Varianzspektrum mit Hilfe einer Kontrollsumme, dem Integral über alle Frequenzen, abgeschätzt werden. Im Falle des Kospektrums muß die Kontrollsumme

$$KS = \frac{\pi}{m} \left(\frac{1}{2} (SC_{xy}(0) + SC_{xy}(m)) + \sum_{h=1}^{m-1} SC_{xy}(h) \right) \quad (4)$$

gleich der Kovarianz $R_{xy}(0)$ bei fehlender zeitlicher Verschiebung sein.

3 Amplitude und Phase des Kreuzspektrums

In der Literatur wird die Kreuzspektrumsfunktion $P_{xy}(h) = C_{xy}(h) + i Q_{xy}(h)$ häufig in komplexer Polarkoordinatenform dargestellt:

$$P_{xy}(h) = |A_{xy}(h)| e^{-i\Theta_{xy}(h)}. \quad (5)$$

Die Amplitude $A_{xy}(h)$ und der Phasenwinkel $\Theta_{xy}(h)$ hängen folgendermaßen mit dem Ko- und Quadratspektrum zusammen:

$$A_{xy}(h) = \sqrt{SC_{xy}^2(h) + SQ_{xy}^2(h)} \quad h = 0, 1, \dots, m \quad (6)$$

$$\Theta_{xy}(h) = \tan^{-1}(SQ_{xy}(h)/SC_{xy}(h)) \quad h = 2, 3, \dots, m-2 \quad (7)$$

Die Vorzeichen des Ko- und Quadratspektrums bestimmen für jedes analysierte Frequenzintervall zum einen den Quadranten des Phasenwinkels und zum anderen, ob die Basisreihe $x(t)$ der Sekundärreihe $y(t)$ vorausleitet oder nachhinkt (Abb. 1).

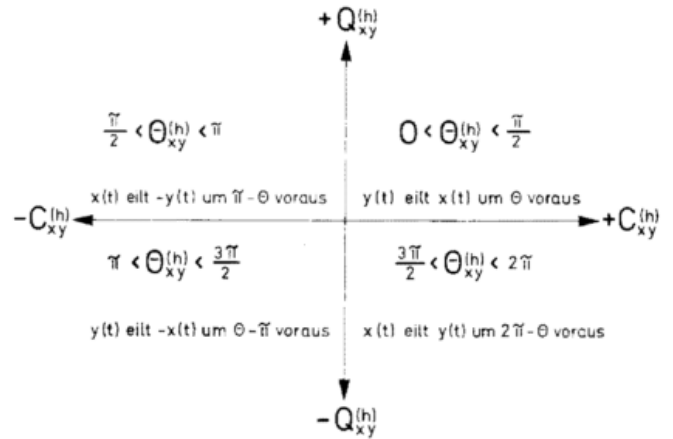


Abb. 1: Phasenwinkel des Kreuzspektrums in Abhängigkeit von Ko- und Quadratspektrum.

Die Richtung der Verschiebung wird durch das jeweilige Vorzeichen des Quadratspektrums bestimmt.

Positive Quadratspektrumswerte bedeuten ein Vorausleiten der Sekundärreihe y gegenüber der Basisreihe x ; d. h. ein Wert y (eine Schwankung) tritt in dem betreffenden Frequenzintervall zuerst bei y auf und dann erst bei x . Negative Quadratspektrumsbeiträge bedeuten ein Nachhinken der Sekundärreihe gegenüber der Basisreihe.

Das Vorzeichen des Kospektrums liefert Informationen über die Art der Schwankung. Positive Kospektrumswerte liegen bei gleichphasig, negative bei gegenphasig verlaufenden Schwingungen vor.

4 Kohärenz

Eindeutige Phasenbeziehungen sind nur bei einer Kohärenz von 1,0 gegeben.

Die Kohärenz $K_{xy}(h)$ ist eine dimensionslose Maßzahl, die den Ähnlichkeitsgrad von $x(t)$ und $y(t)$ für alle analysierten Frequenzintervalle ohne Rücksicht auf eine eventuelle Zeitverschiebung beider Prozesse gegeneinander angibt:

$$K_{xy}^2(h) = \frac{SC_{xy}^2(h) + SQ_{xy}^2(h)}{SP_x(h) \cdot SP_y(h)} \quad h = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

Dieser spektrale Korrelationskoeffizient kann Werte zwischen 0 und +1 annehmen und ist analog zum Quadrat des linearen Kreuzkorrelationskoeffizienten zu verstehen.

Im Falle der Koppelung von Zufallsreihen unterscheiden sich die Kohärenzbeiträge für alle Frequenzen nicht signifikant von null, d. h. die Reihen sind voneinander unabhängig. Beträgt die Kohärenz für alle Frequenzen 1, dann ist $x(t)$ im statistischen Sinne vollständig von $y(t)$ abhängig.

Die Kohärenz ist im allgemeinen kleiner als 1 und um so zuverlässiger, je mehr das Verhältnis zwischen der Anzahl der Beobachtungen n und der Anzahl der verwandten zeitlichen Verschiebungen m wächst.

Die Wahrscheinlichkeit eine Kohärenz größer oder gleich einem bestimmten Wert β zu finden, wenn die Kohärenz in Wahrheit Null ist, ergibt sich aus

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha^{\nu-1}}} \quad (9)$$

mit α = Überschreitungswahrscheinlichkeit und

$$\nu = \frac{2n-m/2}{m} \text{ Freiheitsgraden.}$$

In Abbildung 2 ist der prozentuale Fehler ϵ der Phase Θ in Abhängigkeit von der Kohärenz K_{xy}^2 und dem Freiheitsgrad ν für eine Überschreitungswahrscheinlichkeit von 95% wiedergegeben. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Fehlerbereich der Phase abschätzen.

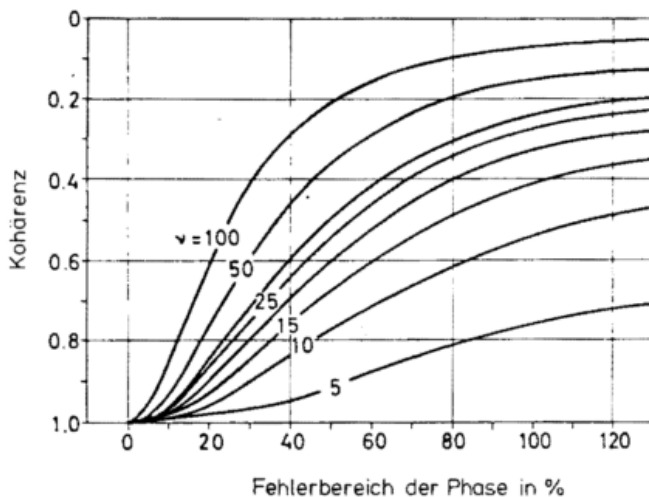


Abb. 2: Fehlerbereich der Phasendifferenz für eine Überschreitungswahrscheinlichkeit von 95%.

5 Anwendungen

Kreuzspektren sind für alle Skalen auf denen meteorologische Phänomene auftreten, das heißt von Bruchteilen von Sekunden bis zu Jahrtausenden berechnet und interpretiert worden. Die Abbildungen 3 a—f geben als Beispiel die Komponenten des Kreuzspektrums der Niederschlagsschwankungen zweier tropischer Stationen wieder. Beim Ko- und Quadratspektrum (Abb. 3 b, c) sind die jeweiligen Kovarianzbeiträge auf die Gesamtkovarianz der Zeitreihen normiert.

Während die linearen Korrelationskoeffizienten (Abb. 3a) zwischen Werten von -1.9 und $+1.9$ nur eine andeutete Sinusform erkennen lassen, die auf eine Koppelung im langwelligen Bereich hindeutet, ist dem Kreuzspektrum (Abb. 3 b, c,

d, f) zu entnehmen, daß die Koppelung der Schwankungen in den Periodenbereichen von 14, 20, 30 und 60 Monaten konzentriert sind. Der Bereich um ca. 5 Jahre hebt sich als ausgeprägtes Signal in allen Komponenten des Kreuzspektrums klar und signifikant vom Rauschen ab.

Dem Kospektrum ist zu entnehmen, daß die Niederschlagschwankungen in beiden Zeitreihen im Bereich von 14, 30 und 60 Monate 180° phasenverschoben, im Bereich um 20 Monate dagegen gleichphasig ablaufen. Nimmt man die Informationen aus dem Quadratspektrum (Abb. 3b) und der Phase (Abb. 3c) hinzu, so ergibt sich für die zwei im statistischen Sinne signifikanten Signale folgende Interpretationsmöglichkeit:

Alle 2 Jahre treffen, wenn in Nauru anormal hohe Niederschläge fallen, in Quixeramobim 3 Monate später ebenfalls ungewöhnlich hohe Regenfälle auf. Alle 5 Jahre aber sind, wenn in Nauru mehr Niederschlag als im langjährigen Mittel fällt, in Quixeramobim 9 Monate vorher ungewöhnliche Niederschlagsarmut zu verzeichnen.

Besonders eindrucksvoll sind die Erfolge des Verfahrens im Bereich der Turbulenzforschung. Die meßtechnische Erforschung von Kenngrößen der Turbulenzstruktur, sowie die theoretische Beschreibung von turbulenten Strömungen bereiten bis heute große Schwierigkeiten. Die Turbulenz in der Atmosphäre spielt im Mikro- wie im Makrobereich wegen der mit ihr verbundenen Austauschprozesse in der Meteorologie eine besonders wichtige Rolle.

Die turbulenten Flußdichten können direkt aus dem Kreuzspektrum abgeleitet werden. So gilt z. B. für die turbulente Flußdichte von Impuls, die proportional zur Reynoldsschen Schubspannung ist:

$$KS_{uv} = R_{uv}(0) \overline{u'v'} = -\frac{\tau}{\rho_0} = u^2. \quad (10)$$

Während die klassische Reynoldssche Definition der Turbulenz nicht angibt, welche Skalen der Bewegung bedeutsam sind, kann diese Information dem Kreuzspektrum entnommen werden. Es erlaubt einen tieferen Einblick in die Struktur der Turbulenz als das bisher mit der Mittelwertsbetrachtung der Fall war. Es zeigt u. a. die Frequenzbereiche an, in der die thermische Turbulenz (bei der die turbulente Energie durch Auftriebskräfte ausgelöste Bewegungen erzeugt wird) bzw. die dynamische Turbulenz (bei der die Energie aus der Scherung der Strömung gewonnen wird) überwiegt.

Die Kohärenz ist ein Maß für die Transporteffizienz der entsprechenden Turbulenzelemente. Ist viel turbulente Bewegung mit geringem Transport vorhanden, sind die Kreuzspektrums- und Kohärenzbeiträge klein. Bei starkem Transport zeichnet sich das Kreuzspektrum durch hohe Werte aus und die Kohärenz liegt nahe bei eins.

Das Kreuzspektrum liefert u. a. auch Informationen über die Stabilität der atmosphärischen Schichtung (bei stabiler Luftschichtung macht sich das Rauschen besonders stark bemerkbar, bei labiler Schichtung hebt sich dagegen das Signal deutlich vom Rauschen ab).

Mit Hilfe des Kreuzspektrums kann weiterhin der bei elektronischen Meßanordnungen auftretende leidige Effekt, daß am Ausgang der Anlage Rauschsignale auftreten, die am Eingang der Anlage noch nicht vorhanden waren, qualitativ erfaßt und somit der Übertragungsfehler abgeschätzt werden.

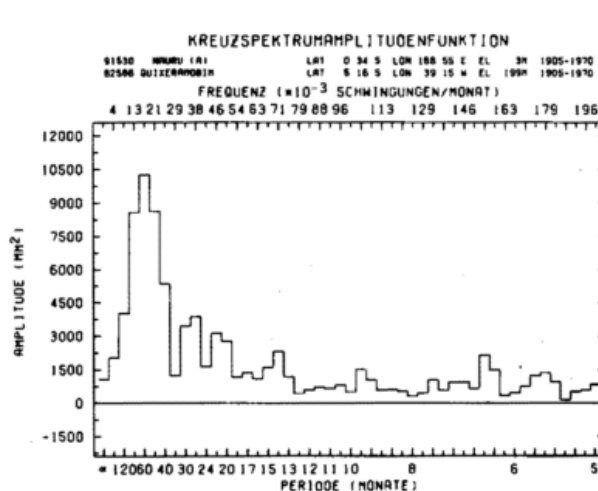
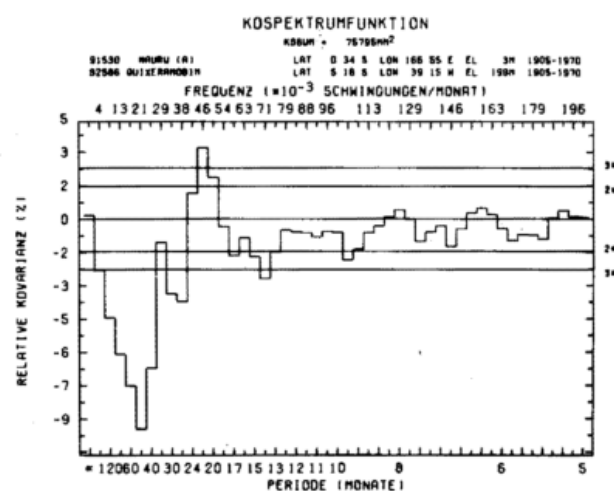
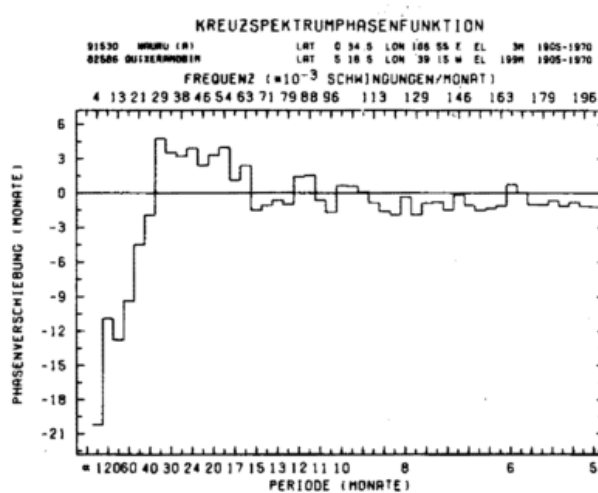
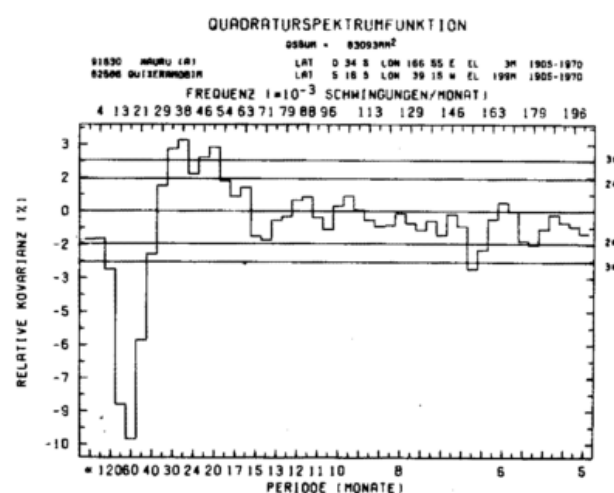
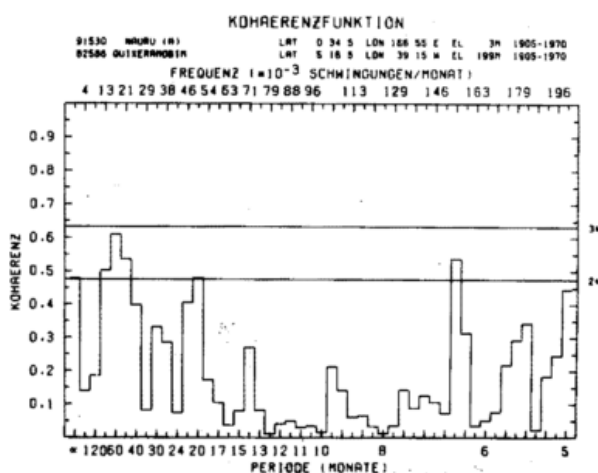
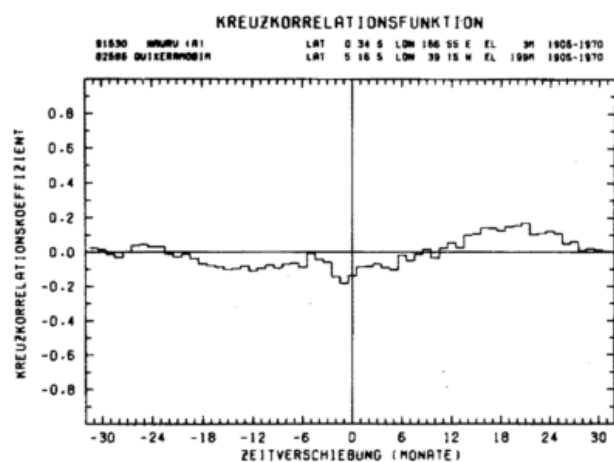


Abb. 3: Komponenten des Kreuzspektrums

- a) Kreuzkorrelationsfunktion
- b) Quadratspektrumsfunktion
- c) Kospektrumsfunktion

- d) Kohärenzfunktion
- e) Phasenfunktion
- f) Amplitudenfunktion

im Fall der Analyse der angegebenen tropischen Niederschlagsreihen (nach FLEER 1981).

Das Verhältnis von Ausgangssignal $x(t)$ zum Eingangssignal $y(t)$ wird durch die Übertragungsfunktion $T_{xy}(h)$ angegeben:

$$T_{xy}(h) = \frac{P_{xy}(h)}{P_x(h)} = \text{TAM}_{xy}(h) + \exp(i\Theta_{xy}(h)) \quad (11)$$

Die Amplitude $\text{TAM}_{xy}(h)$ der Übertragungsfunktion ist gegeben durch:

$$\text{TAM}_{xy}(h) = \frac{A_{xy}(h)}{SP_x(h)} \quad (12)$$

Die Phasenverschiebung $\Theta_{xy}(h)$ ist die des Kreuzspektrums. Die Amplitude der Übertragungsfunktion von $y(t)$ nach $x(t)$ ergibt sich analog.

Mit dieser Übertragungsfunktion kann das Ausgangssignal eines Systems für jeden Typ von Eingangssignalen abgeschätzt werden. Der Kohärenzfunktion kann entnommen werden, wie weit das Ausgangssignal des Systems von seinem Eingangssignal verursacht wird.

Die gleichzeitige Registrierung meteorologischer Elemente an mehreren Meßstellen in geeigneter räumlicher Anordnung ermöglicht eine Verbesserung des Verhältnisses von Signal zu Rauschen, die Unterscheidung von Signalen verschiedener Ausbreitungsgeschwindigkeit, die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus der Laufzeit zwischen den Meßpunkten, die Richtung der Ausbreitung und die Phasenbeziehungen zwischen den Signalen.

Untersuchungen mit diesem Verfahren haben u. a. zu einem besseren Verständnis der Ausbreitung von Wellen (angefangen von Radiowellen über Schall-, synoptische und Schwerkwellen bis zu den langen Rossbywellen) in der Atmosphäre geführt.

In der Klimatologie konnte mit Hilfe der Kreuzspektrumsanalyse Fernwirkungen der Anomalien der allgemeinen Zirkulation nachgewiesen werden.

Als weiterführende Literatur können die Lehrbücher von BENDAT und PIERSOL (1966) sowie JENKINS und WATTS (1968) empfohlen werden.

Literatur

BENDAT, J. S.; PIERSOL, A. G.: Measurement and analysis of random data. New York: Wiley 1966.

FLEER, H.: Large-scale tropical rainfall anomalies. Bonner Meteorol. Abh. H. 26 (1981).

JENKINS, G. M.; WATTS, D. G.: Spectral analysis and its applications. San Francisco: Holden — Day 1968.

10 L. HOFFMANN, Hamburg Faktorenanalyse

1 Allgemeines

In der Klimatologie werden die unterschiedlichen Parameter, die man für die Beschreibung verwendet, getrennt und im wesentlichen unabhängig voneinander gemessen. Zur Klarstellung der zu untersuchenden Strukturen werden die Meßreihen sehr oft getrennt statistisch aufbereitet.

Klima kann aber auch mit Hilfe der Kovarianzen der Elemente beschrieben werden. Diese Methode gibt die Kopplung der Elemente wieder. Zur Behandlung der berechneten Kovarianzen und zur „Sichtbarmachung“ der vorhandenen Strukturen bietet sich die Faktorenanalyse an.

Die vorher in der Kovarianzmatrix nur schwer erkennbaren Strukturen werden durch die Faktorenanalyse offengelegt. Dabei spielt es keine Rolle, ob alle Elemente, die ausgewählt wurden, auch wirklich gemeinsame Varianzen aufweisen.

Die Faktorenanalyse (FA) ist eine multivariate statistische Methode, denn sie verwendet mehrere Variable und bedient sich der Korrelationsmatrix sowie statistischer Testverfahren.

Die Merkmalskorrelationskoeffizienten der Kovarianzmatrix sagen nur etwas über den Zusammenhang von jeweils zwei Variablen aus. Die FA untersucht, ob sich k Faktoren herauschälen lassen, welche die Zusammenhänge mehrerer Variablen erklären bzw. beschreiben.

2. Grundlagen

2.1 Die Ausgangsmatrix

Das Ausgangsmaterial für eine Faktorenanalyse ist eine Zeitreihe von Parametern, z. B. die synoptischen Beobachtungen an einer Station. Die Elemente können in einer Matrix:

$$\begin{aligned} X &= \{x_{ij}\} \\ i &= 1, 2, \dots, m \\ j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

zusammengestellt sein.

Die Matrix enthält in einer Spalte m Variable, zukünftig Ausgangsvektor genannt.

Die Realisation der m Variablen können u. a. direkte Beobachtungswerte oder abgeleitete Größen, wie Mittelwerte über bestimmte Zeiträume (Tagesmittel, Wochenmittel usw.) sein.

In der Matrix X vom Typ (m, n) sind n Ausgangsvektoren vorhanden. Statt X kann auch die transformierte Matrix Z verwendet werden.

Die Variablen der normierten Matrix Z haben einen Mittelwert von 0 und eine Varianz von 1.

2.2 Das lineare Modell

Die in der Matrix X vorhandenen Informationen können durch eine Faktorenanalyse (FA) in einer anderen Form dargestellt werden.

Die FA benutzt die Erkenntnisse der Transformationstheorie (u. a. SMIRNOW, 1959), daß bei einer Matrix der Rang erniedrigt werden kann, ohne wesentliche Informationen zu verlieren. Dabei wird angenommen, daß die beobachteten einzelnen Variablen sich als lineare Kombinationen von hypothetischen, nicht beobachteten bzw. nicht beobachtbaren Größen — Faktoren genannt — darstellen lassen. Die Beziehungen zwischen den m Variablen x_{ij} und den l Faktoren f_i sollen linear und möglichst einfach sein. Dabei ist die Linearität eine Arbeitshypothese.

Ansatz für den i. Ausgangsvektor zum Zeitpunkt j:

$$x_{ij} = a_{i1} f_{1j} + a_{i2} f_{2j} + \dots + a_{il} f_{lj} \quad (2)$$

In Matrizenschreibweise:

$$X = A F \quad (3)$$

Führen wir statt X die Matrix Z mit den normierten Variablen ein, so lautet Gleichung (3)

$$Z = A F \quad (4)$$

Wir können annehmen, daß von den l Faktoren nur k interpretierbar sind, so daß die Matrizen A und F in zwei Teilmatrizen aufgespalten werden können:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{mk+1} & \dots & a_{ml} \end{array} \right) \quad (5)$$

$$F = \left(\begin{array}{cccc|cccc} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & f_{k+11} & f_{k+12} & \dots & f_{k+1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & f_{k+21} & f_{k+22} & \dots & f_{k+2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & \dots & f_{kn} & f_{l-k+11} & f_{l-k+12} & \dots & f_{l-k+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{l1} & f_{l2} & \dots & f_{ln} & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right) \quad (6)$$

Gleichung (4) kann folglich geschrieben werden:

$$Z = A \cdot F = (A_k | A_{l-k}) \left(\begin{array}{c} F_k \\ F_{l-k} \end{array} \right) \quad (7)$$

oder nach den Regeln der Matrizenrechnung umgeformt werden

$$Z = A_k F_k + A_{l-k} F_{l-k} \quad (8)$$

mit den Abkürzungen:

$$\hat{Z} = A_k F_k; Q = A_{l-k} F_{l-k} \quad (9)$$

$\hat{Z}$ ist die reduzierte Datenmatrix.

$$\text{Es gilt: } Z - \hat{Z} = Q \quad (10)$$

wobei Q die Matrix mit den Restwerten (Fehler) ist.

Bei der reduzierten Faktorenlösung wird der i. Variablenvektor folglich dargestellt:

$$\bar{z}_i = \sum_{p=1}^k a_{ip} \bar{f}_p + \bar{q}_i \quad (11)$$

Wir haben damit folgende Modellannahme (WEBER, 1974):

Jede der m beobachteten Variablen $\bar{x}_i$ bzw. der standardisierten Variablen $\bar{z}_i$ läßt sich als lineare Beziehung von k interpretierbaren Faktoren $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k$ und je einem Restfaktor $\bar{q}_i$, der die nicht interpretierbaren Faktoren umfaßt, darstellen.

Dabei ist zu beachten, daß die Matrix F der Beschränkung unterliegt, daß ihre Zeilen wechselseitig orthogonal sind.

Nach den Regeln der Matrizenrechnung kann das folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$F F' = n E \quad (12)$$

E = Einheitsmatrix

n = Zahl der Ausgangsvektoren (Stichprobenumfang)

2.3 Zusammenhang zwischen Variablenkorrelation und Faktorenladungen

Die Gleichung (4) kann nicht eindeutig gelöst werden, denn sie enthält die unbekannten Matrizen A und F. Folglich müssen noch zusätzliche Beziehungen eingeführt werden. Wir interessieren uns für die Kopplung der Variablen untereinander, und ein Maß dafür ist die Korrelation.

Für die Korrelationsmatrix R gilt

$$R = \frac{1}{n-1} Z \cdot Z' \quad (13)$$

Z': transportierte Matrix von Z (m * n)

(in Z werden die entsprechenden Zeilen und Spalten an der Hauptdiagonalen gespiegelt)

R: Korrelationsmatrix (m * m)
(symmetrisch)

n: Anzahl der Beobachtungsvektoren

Aus Gleichung (4) kann auch Z' bestimmt werden:

$$Z' = (A F)' = F' A' \quad (14)$$

Gleichung (13) kann mit Gleichung (14) umgeformt werden:

$$R = \frac{1}{n-1} Z \cdot Z' = \frac{1}{n-1} A F F' A' = \quad (15)$$

$$R = \frac{1}{n-1} F F' A$$

Der zweite Ausdruck in (15) ist analog zu Gleichung (13) wieder eine Korrelationsmatrix. Sie enthält die Korrelationen zwischen den Faktoren (ÜBERLA, 1971 a).

Setzen wir voraus, daß die Faktoren nicht korreliert sein sollen, so gilt:

$$C = E$$

E: Einheitsmatrix

(siehe auch Gleichung (12))

Gleichung (15) hat damit folgende Form:

$$R = A A' \quad (16)$$

Durch diese Beziehung zwischen der Faktorenladungsmatrix A und der Korrelationsmatrix R haben wir eine Bestimmungsgleichung für A.

2.4 Die Kommunalität

Vor der Lösung von Gleichung (16) muß noch ein Problem diskutiert werden, das besonders bei der Interpretation der Ergebnisse beachtet werden sollte.

Die Faktorenanalyse erniedrigt den Rang der Ausgangsmatrix, d.h. die Zahl der gefundenen Faktoren ist kleiner als die Zahl der Variablen, über welche die Ausgangsmatrix entwickelt wurde.

$$k < m \quad (17)$$

k: Zahl der Faktoren

m: Zahl der Variablen

In der Matrix Z stehen die normierten Variablen mit $\bar{z}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) und $s_i^2 = 1$.

Die Einheitsvarianz s_i^2 wird über die Korrelationsmatrix R auf die einzelnen Faktoren aufgeteilt:

Dabei gilt

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 = 1 \quad (18)$$

Die Gleichungen (13) und (16) enthalten jeweils auf der rechten Seite ein Matrizenprodukt und können folglich in folgender Form geschrieben werden:

$$r_{ip} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n z_{ij} \cdot z_{pj} \quad (19)$$

$$r_{ip} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot a_{pj} \quad (20)$$

($i, p = 1, 2, \dots, m$)

Dabei sind folgende Bezeichnungen verwendet worden

$$R = \{r_{ij}\}; Z = \{z_{ij}\}; A = \{a_{ij}\}$$

Für $i = p$ (Element der Hauptdiagonalen) gilt:

$$r_{ii} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 \quad (21)$$

$$r_{ii} = \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \quad (22)$$

Auf der rechten Seite von Gleichung (21) steht nach Gleichung (18) die Einheitsvarianz. Berücksichtigen wir diese Tatsache, so kann Gleichung (22) in folgender Form geschrieben werden:

$$s_i^2 = \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \quad (23)$$

($i = 1, 2, \dots, m$)

Gleichung (23) stellt den Zusammenhang zwischen der Einheitsvarianz der Variablen und ihre Aufteilung auf die einzelnen Faktoren her.

Aus den Gleichungen (22) und (23) folgt, daß die Elemente der Hauptdiagonalen bestimmen, welcher Teil der Einheitsvarianz einer Variablen insgesamt durch die Faktoren ausgeschöpft werden wird.

Nach Gleichung (17) soll die Zahl der Faktoren aber kleiner sein als die Zahl der Variablen. In diesem Fall muß Gleichung (23) in folgender Form geschrieben werden:

$$s_i^2 > \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \quad (24)$$

Dies bedeutet, daß die Varianz einer Variablen nicht vollständig auf die k Faktoren aufgeteilt wird. Die Einheitsvarianz s kann in zwei Anteile zerlegt werden:

— Varianz, die in die gemeinsamen Faktoren eingeht: h_i^2

— Varianz, die in die merkmalseigenen Faktoren eingeht: u_i^2

$$s_i^2 h_i^2 + u_i^2 = 1 \quad (25)$$

Für die i. Variable kann folgende Beziehung geschrieben werden (analog zu Gleichung (24)):

$$h_i^2 = \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{ik}^2 \quad (26)$$

h_i^2 : Kommunalität der i. Variablen.

Da wir anstreben, daß die Zahl der Faktoren kleiner sein soll als die Variablenzahl, so ist h_i^2 eine Zahl, die zwischen Null und Eins liegt.

In diesem Falle müssen die Elemente der Hauptdiagonalen der Korrelationsmatrix R kleiner „1“ sein:

$$r_{ij} < 1 \quad (27)$$

Würden wir die FA mit einer Matrix R durchführen, die nicht Bedingung (27) erfüllt, so wird nicht der gewünschte Effekt $k < m$ eintreten. Die Zahl der Faktoren ist mit der Kommunalität eng verknüpft (HARMAN, 1960). Bei Kenntnis der zu erwartenden Faktorenzahl könnte die Kommunalität einer jeden Variablen direkt berechnet werden.

Das Problem liegt darin, daß wir bei Beginn der FA weder die Anzahl der Faktoren (d.h. auf welchen Mindestrang bringen wir die Matrix) noch die Kommunalitäten kennen. Die h_i^2 müssen vor der Durchführung der FA abgeschätzt werden.

3 Durchführung der Faktorenanalyse

3.1 Allgemeines

Die Faktorenanalyse führt zwei Matrizen ein, deren Produkt die ursprüngliche Matrix ergeben:

$$Z = A F \quad (\text{Gl. 4})$$

In der Praxis werden für die physikalischen Untersuchungen nur die Elemente einer Matrix bestimmt. In den meisten Fällen wird die Matrix A, welche die Faktorenladungen enthält, verwendet.

Wie erinnern uns, daß A eine ($k \cdot m$) Matrix ist, deren Spalten die k Faktoren repräsentieren.

Das Element a_{ij} ist die Korrelation der i. Variablen mit dem j. Faktor. Die Faktorenmatrix A kann daher gut für die interessierende Frage, welche Variablen miteinander gekoppelt sind, herangezogen werden. Die FA kann mit der Berechnung der Matrix A beendet werden.

Die weiteren Ausführungen beschäftigen sich deshalb mit den Methoden, die Elemente der Matrix A abzuschätzen. Ist A bekannt, so kann F ebenfalls geschätzt werden. Hierzu verweise ich auf die schon angeführte Literatur wie ÜBERLA (1971), HARMAN (1960). Vor der Beschreibung der beiden z. Z. gängigsten Methoden zur Bestimmung von A wird die Kommunalitätenabschätzung erläutert. Dieses Problem muß zusammen mit den Lösungsmethoden von A gesehen werden, denn es gibt für die Gleichung $R = AA'$ keine Universallösung.

3.2 Das Kommunalitätenproblem

Auf die Bedeutung der Kommunalitäten wurde im Abschnitt 2.4 hingewiesen.

Das erste Problem, das sich bei jeder Anwendung der FA erhebt, liegt in der Abschätzung der Kommunalitäten. Folglich müßte schon vor der Berechnung der Faktorenladungen die Anzahl der Faktoren festgelegt werden.

Die Überführung der Korrelationsmatrix R (aus m Variablen) in eine Faktorenmatrix A (mit k Faktoren und $k < m$) ist gleichbedeutend mit einer Rangerniedrigung von R (HARMAN, 1960). Soll die Zahl der Faktoren vor der Berechnung festgelegt werden, so tritt die Schwierigkeit auf, daß der Rang von R nicht beliebig erniedrigt werden kann. Auf eine Vertiefung dieses Problems wird hier verzichtet, denn Details können z. B. im HARMAN (1960) nachgelesen werden.

Das Kommunalitätenproblem kann nach HARMAN (1960) folgendermaßen formuliert werden:

Bestimme die Kommunalitäten so, daß die Matrix R den kleinsten möglichen Rang bekommt.

Eine Rangerniedrigung ist nur so weit sinnvoll, wie dies ohne zu großen Informationsverlust geschehen kann.

Wenn der Rang der reduzierten Matrix k ist, dann ist k auch die kleinste Anzahl von gemeinsamen Faktoren, um das System darzustellen.

Eine Abschätzung kann über Verfahren, welche die in R vorhandenen Korrelationskoeffizienten verwenden, geschehen.

HARMAN (1960) hat verschiedene Verfahren, die zur Abschätzung der Kommunalitäten dienen können, sehr übersichtlich zusammengestellt und ihre Ergebnisse verglichen. Alle Abschätzungen liefern unterschiedliche Ergebnisse.

DWYER (1939) hat nachgewiesen, daß es eine untere Grenze der Kommunalität gibt:

$$C_{i,1,2,\dots,j(i),\dots,m} \leq h_i^2 \quad (28)$$

$C_{i,1,2,\dots,j(i),\dots,m}$ ist der multiple Regressionskoeffizient der Variablen i mit den $m-1$ restlichen Variablen.

Der multiple Regressionskoeffizient (engl.: squared multiple correlation: SMC) repräsentiert die gemeinsame Varianz der i . Variablen $\bar{z}_i$ mit den anderen Variablen der untersuchten Menge. Die SMCs sind folglich eine sehr sinnvolle Größe für die Abschätzung der Kommunalitäten, denn diese sorgen dafür, daß die passende Zahl von gemeinsamen Faktoren bei der Analyse herauskommt.

Die für eine Abschätzung der Kommunalitäten zu verwendenden SMCs können aus der inversen Korrelationsmatrix berechnet werden (ÜBERLA, 1971):

$$SMC_i = 1 - \frac{1}{r_{ii}} \quad (29)$$

r_{ii} ist das Diagonalelement der R^{-1} für die i . Variable.

Die Kommunalität hängt, wie schon gesagt, eng mit der Faktorenzahl zusammen (siehe Abschnitt 2.4). Schätzen wir die Kommunalitäten vor einer Faktorenanalyse nicht ab, dann ergeben sich bei einigen Faktoren „unregelmäßige“ und nicht interpretierbare Ladungen.

Bei der Verwendung von R ohne Kommunalitäten in der Hauptdiagonalen für die FA wird davon ausgegangen, daß die gesamte Varianz aller Variablen gemeinsame Varianz ist, was aus physikalischer Sicht bestimmt nur selten vorkommt.

Die Wirkung der Kommunalitätenabschätzung soll an einem Beispiel verdeutlicht werden (HOFFMANN, 1980).

Eine Korrelationsmatrix R mit folgendem Aufbau wird vorgegeben:

Variablen Nr.	1	2	3	4	5
1	1	0,15	0,90	0,15	0,15
2	0,15	1	0,15	0,15	0,15
3	0,90	0,15	1	0,15	0,15
4	0,15	0,15	0,15	1	0,15
5	0,15	0,15	0,15	0,15	1

Die Variablen 1 und 3 sind hoch miteinander korreliert, alle anderen Variablen aber kaum. Abbildungen 1 und 2 zeigen die Ergebnisse der FA. Aufgetragen ist die Faktorenladung, die eine Variable mit dem jeweiligen Faktor hat. Unterschiedliche Schraffierungen machen die Faktoren kenntlich.

Die FA ohne Kommunalitätenabschätzung ergibt drei Faktoren, von denen zwei nicht interpretierbar sind, denn die Ausgangsmatrix enthält sie nicht. Dagegen stimmt das in Abbildung 2 gezeigte Ergebnis (1 Faktor mit hohen Korrelationen zwischen den Variablen Nr. 1 und Nr. 2) gut mit der Ausgangslage in der Korrelationsmatrix überein.

Wird die FA ohne Kommunalitätenabschätzung gestartet, so geht gerade das Wesentliche des faktorenanalytischen Modells, nämlich die Trennung von gemeinsamen und merkmals-eigenen Faktoren, verloren.

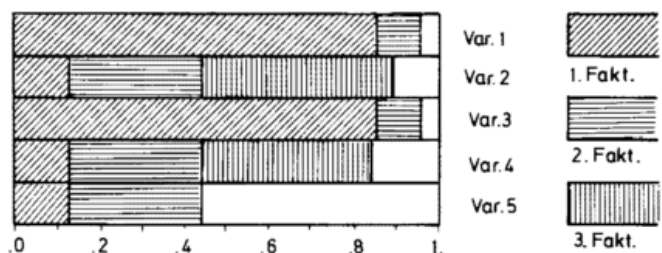


Abb. 1: Aufteilung der Einheitsvarianz der Variablen auf die Faktoren ohne Abschätzung der Kommunalitäten.

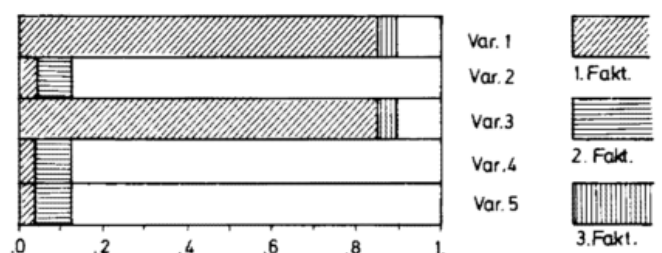


Abb. 2: Aufteilung der Einheitsvarianz der Variablen auf die Faktoren mit abgeschätzten Kommunalitäten.

3.3 Berechnung der Faktorenladungen

3.3.1 Grundlegendes

Die Gleichung (16) $R = AA'$ muß gelöst werden, um die Faktorenladungen zu erhalten. Dazu gibt es unterschiedliche Methoden, die z. B. unter

Zentroidmethode
Hauptkomponentenanalyse (HKM)
Maximum-Likelihood-Methode (MLM)

bekannt sind.

Die Zentroidmethode wurde entwickelt, um Faktorenladungen mittels Tischrechner berechnen zu können.

Ein allgemeingültiges Verfahren gibt es nicht. Hier werden die Hauptkomponentenmethode und die Maximum-Likelihood-Methode kurz vorgestellt.

In der Praxis hat es sich gezeigt, daß eine Kombination von beiden oft zu guten, d. h. physikalisch interpretierbaren Ergebnissen führt.

Die HKM berechnet die Faktorenladungen über die Eigenwerte und Eigenvektoren. Die MLM schätzt die Elemente der Matrix A über ein iteratives Verfahren ab. Dieses konvergiert nur sehr langsam und sollte schon mit guten Ausgangswerten gestartet werden. Die durch die HKM erhaltenen Faktorenladungen bieten sich als solche Eingangswerte an.

3.3.2 Die Hauptkomponentenmethode

Zur Lösung der Gleichung $R = AA'$ wird vorher noch eine weitere Restriktion eingeführt: Die Ladungen des 1. Faktors sollen so gewählt werden, daß die Summe der Quadrate der Ladungen einen maximalen Anteil an der Gesamtvarianz erreicht, die des 2. Faktors einen maximalen Anteil der Restvarianz usw.

$$S_1 = \sum_{j=1}^m a_{1j} \Rightarrow \text{MAX} \quad (30)$$

Dabei gelten folgende Bedingungen:

$$r_{ik} = \sum_{j=1}^k a_{ij} a_{kj} \quad (31)$$

($i, j = 1, 2 \dots m$) und $i \neq j$

und

$$r_{ii} = h_i^2$$

Das anstehende mathematische Problem kann folgendermaßen formuliert werden:

Es muß das Maximum einer Funktion, deren Veränderliche durch Nebenbedingungen verknüpft sind, gefunden werden.

Diese Aufgabe wird durch das Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren (u. a. SMIRNOW, 1959) gelöst.

Die Durchführung ist z. B. bei RALSTON/WILFF (1972) beschrieben. Die Bestimmung der Faktorenladungen führt auf das Eigenwertproblem der Mathematik

$$R \vec{\alpha}_i = \lambda_i \vec{\alpha}_i \quad (32)$$

λ_i : ein Eigenwert der Matrix R

$\vec{\alpha}_i$: der dazugehörige Eigenvektor

Die zu maximierende Größe S_1 aus Gleichung (30) ist gleich dem größten Eigenvektor.

Es kann nachgewiesen werden, daß die Eigenwerte der Matrix R, der Größe nach geordnet, mit ihren Eigenvektoren jeweils den gesuchten Faktorenladungen der Faktoren entsprechen.

Im allgemeinen werden in den Rechenzentren geeignete Programme dafür vorliegen.

Die Hauptkomponentenmethode berechnet die Faktorenladungen über ein klassisches mathematisches Verfahren. Die Anzahl der Faktoren ist in diesem Fall gleich der Variablenzahl.

Die Zahl der aus R zu extrahierenden Faktoren ist durch die verwendete Mathematik nicht eindeutig festgelegt. Hierfür müssen physikalische Überlegungen verwendet werden.

Bei meteorologischen Problemen ist es bestimmt sehr selten, daß die verwendeten Variablen nur gemeinsame Varianz haben. Dies ist aber eine Voraussetzung dafür, daß die Kommunalitäten mit „1“ angesetzt werden und mit der Matrix R die Berechnungen durchgeführt werden.

Die HKM muß deshalb mit der Matrix R_h , die die Kommunalitäten in der Hauptdiagonalen hat, durchgeführt werden, denn diese bestimmen die Zahl der gemeinsamen Faktoren.

Gleichung (16) kann dann in folgender Form geschrieben werden:

$$R_h = AA' \quad (33)$$

3.3.3 Maximum-Likelihood-Methode

Die Methode ist ausführlich bei WEBER (1974) beschrieben. Sie geht auf das Maximum-Likelihood-Verfahren von FISHER zurück und wurde von LAWLEY und MAXWELL (1963) entwickelt. Das Verfahren liefert effiziente (wirksame) Schätzwerte der Faktorenladungen und der Restvarianzen.

Vor der Anwendung muß die Zahl k der gemeinsamen Faktoren festgelegt werden, und die Variablen $\bar{x}_i$ sollten eine normale Verteilung aufweisen.

Ausgang für die Berechnungen ist die Gleichung (11).

Aus dieser kann unter Hinzunahme weiterer Annahmen folgende Gleichung entwickelt werden (siehe WEBER, 1974):

$$R = AA' + V \quad (34)$$

V ist eine Diagonalmatrix und enthält nur noch die merkmals-eigenen Varianzen v_i .

Vor der Lösung von Gleichung (34) muß noch die Beschränkung eingeführt werden, daß gelten soll:

$$J = A' V^{-1} A \quad (35)$$

J ist eine $k \times k$ Diagonalmatrix.

Die Bedingung entspricht etwa der Orthogonaleigenschaft der Hauptkomponentenmethode.

Die Lösung von Gleichung (34) mittels des Maximum-Likelihood-Verfahrens führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} v &= 1 - \sum_{p=1}^k a_{ip}^2 \\ R &= AA' + V \\ A'J &= A'V^{-1}R - A' \\ J &= A'V^{-1}A \end{aligned} \quad (36)$$

Dieses System wird iterativ gelöst. Ein Rechenprogramm dafür ist bei WEBER (1974) beschrieben. Zur Lösung muß vorher die Zahl k der gemeinsamen Faktoren festgelegt werden. Außerdem ist es vorteilhaft, wenn möglichst gute Startwerte der a_{ip} schon über ein anderes Verfahren berechnet werden (etwa durch die Hauptkomponentenmethode).

Es empfiehlt sich, mit verschiedenen Ansätzen für die Zahl der Faktoren die Analyse durchzuführen. Die Ergebnisse müssen jeweils auf ihren physikalischen Gehalt hin untersucht werden.

3.4 Diskussion

Die beiden vorgestellten Methoden scheinen widersprüchliches zu produzieren.

Die Ergebnisse der HKM werden einmal als eigenständiges Produkt vorgestellt und einmal nur als Ausgangswerte verwendet, die mit der MLM verbessert werden können.

Das Ganze ist aber nur ein scheinbarer Widerspruch! Es wurde schon mehrmals darauf hingewiesen, daß wir es bei der Lösung der Gleichung $R = AA'$ mit Schätzungen zu tun haben.

Daher müssen wir uns fragen: Was wollen wir mit der Anwendung der FA erreichen? Es sollen doch gemeinsame Faktoren gefunden werden, d.h. die nur merkmalseigene Varianz soll nicht in das Modell einfließen. Dazu muß vor der Lösung der Gleichung $R = AA'$ eine Aussage über die Zahl der gemeinsamen Faktoren gemacht werden. Genau dies ist aber nicht exakt möglich. Die Zahl der Faktoren kann nur in etwa abgeschätzt werden.

Dies geschieht bei der HKM durch die Einsetzung der Kommunalitäten in die Korrelationsmatrix. Über diese Kommunalitäten wird der Methode vorgegeben, wieviel gemeinsame Varianz aufgeteilt werden kann. Bei der MLM wird die Faktorenzahl vor Beginn festgelegt, denn diese Methode hat in ihrer Ausgangsgleichung $R = AA' + V$ eine eigene Matrix V für die merkmalseigene (also nicht gemeinsame) Varianz eingeführt.

Hierin liegt der wesentliche Unterschied: Bei der HKM wird die Zahl der gemeinsamen Faktoren indirekt über die Kommunalitätenabschätzung vorgegeben, die erfahrungsgemäß große Unsicherheiten beinhaltet, wobei eine Matrix für die merkmalseigene Restvarianzen nicht explizit existiert.

Auch die bei der Anwendung der MLM eingesetzte Faktorenanzahl ist nicht als unumstößlich anzusehen. Die Berechnungen müssen auf jeden Fall mehrmals mit sich ändernden Faktorenzahlen durchgeführt werden. Dabei ist der Inhalt der gefundenen Faktoren physikalisch zu interpretieren.

Die HKM reagiert sehr empfindlich auf die eingesetzten Kommunalitäten. Hierin liegt ihr Nachteil. Wenn sich die Kommunalitäten nur schwer abschätzen lassen, d.h. wenn die Schätzfehler groß sind, ist die kombinierte Anwendung (erst HKM, dann weiterrechnen mit der MLM) auf jeden Fall vorzuziehen.

Schwierigkeiten mit der Kommunalitätenabschätzung entstehen immer dann, und das hat die Erfahrung gezeigt, wenn die Ausgangsmatrix schlecht konditioniert ist.

Dies kann durch folgenden Fall belegt werden: Verwendet werden die Tagesmittelwerte von meteorologischen Elementen, berechnet aus den 3-stündigen synoptischen Beobachtungen. Die FA wird durch die Kombination von HKM und

MLM durchgeführt. Die Ergebnisse unterscheiden sich von denen, wenn nur nach der Abschätzung der Kommunalitäten die HKM allein angewendet wird. Sie sind auch sinnvoll physikalisch zu interpretieren (SCHMIDT/MORGENEYER (1982)).

Berechnen wir mit Hilfe der vorliegenden Faktorenladungen die Kommunalitäten, so sind diese als sehr genau anzusehen. Wird mit diesen nun die HKM durchgeführt, dann stimmen ihre Ergebnisse auf Anhieb sehr gut mit denen des kombinierten Verfahrens überein.

Die HKM versagte folglich, weil die Verfahren zur Kommunalitätenabschätzung aus der Korrelationsmatrix zu ungenau waren.

3.5 Rotationsproblem

Nach dem beschriebenen Verfahren kann die Matrix A berechnet werden.

Die gefundenen k Faktoren $\bar{f}_1 \dots \bar{f}_k$ sind linear unabhängige Vektoren. Sie bilden die Achsen des k -dimensionalen Faktorenraumes, in dem die Variablen abgebildet werden, wobei die Ladungen der Faktoren die Koordinaten der Punkte sind.

In Abbildung 3 sind solche Punkte für den Fall: 2 Faktoren gezeichnet ($F_1 F_2$). Die gefundenen Strukturen lassen sich nur schwer interpretieren. Durch eine Rotation des Koordinatensystems kann aber, wie sich gezeigt hat, eine vernünftige Interpretation der Faktorenmatrix A gelingen. Bei der Rotation bleibt die räumliche Merkmalskonfiguration erhalten, es ändern sich nur die Koordinaten der Punkte im neuen Koordinatensystem. Die Drehung des Koordinatensystems ist nicht eindeutig. THURSTONE (1947) hat gewisse Kriterien festgelegt, nach denen die Rotation zur sogenannten „Einfachstruktur“ durchgeführt werden soll (siehe WEBER, 1974).

In Abbildung 3 ist der o. a. Fall schematisch dargestellt: P_1 hat im Koordinatensystem ($F_1 F_2$) die Koordinaten (a_1, a_2) und im neuen Koordinatensystem ($F_1' F_2'$) die Koordinaten (a_1', a_2'). $F_1' F_2'$ ist gegen $F_1 F_2$ um den Winkel ϑ gedreht. a_2' ist sehr klein geworden, was bedeutet, daß die entsprechende Variable kaum noch mit dem Faktor Nr. 2 korreliert ist.

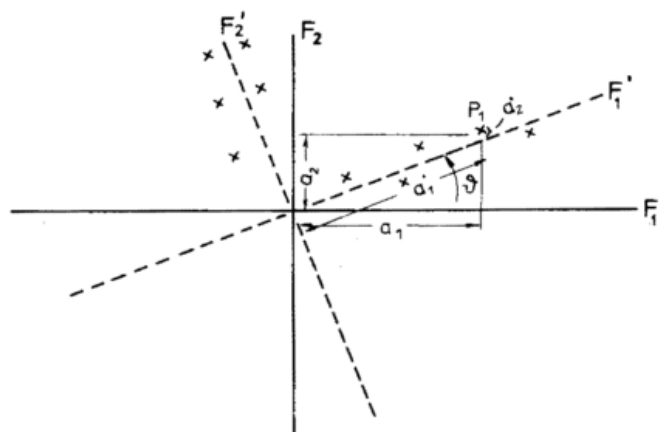


Abb. 3: Matrix A (2 Faktoren) in einem orthogonalen Koordinatensystem dargestellt ($F_1 F_2$) (weitere Bezeichnungen s. Text).

Das neue Koordinatensystem zeichnet sich gegenüber dem alten System dadurch aus, daß die Summe der Quadrate der Abstände der Punkte zu den Koordinatenachsen jeweils zu einem Minimum wird.

Wegen der besseren analytischen Behandlung wird die Rotation sehr oft mit einem orthogonalen Koordinatensystem ausgeführt, obwohl in vielen Konstellationen der Punktwolke es nicht immer möglich sein wird, mit orthogonalen Achsen die obige Forderung voll zu erfüllen.

Die verschiedenen Rotationsmethoden sind in der Literatur gut beschrieben (siehe u. a. ÜBERLA (1971), HARMAN (1960), WEBER (1974).

Ein z. Z. sehr oft verwendetes Verfahren ist die VARIMAX Methode von Kaiser (siehe u. a. ÜBERLA, 1971). Sie dürfte in den Rechenzentren als Programm zur Verfügung stehen.

In Tabelle 1 können wir die Wirkung der Rotation auf die Ausgangsmatrix A gut erkennen, denn sie läßt die in der Korrelationsmatrix enthaltenen Strukturen (s. Tab. 2) klar hervortreten. In den Ladungen der unrotierten Faktorenmatrix waren diese (s. Tab. 1) nur undeutlich zu erkennen. Abbildung 4 zeigt ganz deutlich, daß an der Merkmalskonfiguration durch die Rotation keinerlei Änderungen vorgenommen wurden. Das neue Koordinatensystem F_1F_2 hat aber eine ausgezeichnete Lage, so daß die einzelnen Punkte „möglichst nahe“ an den Achsen liegen.

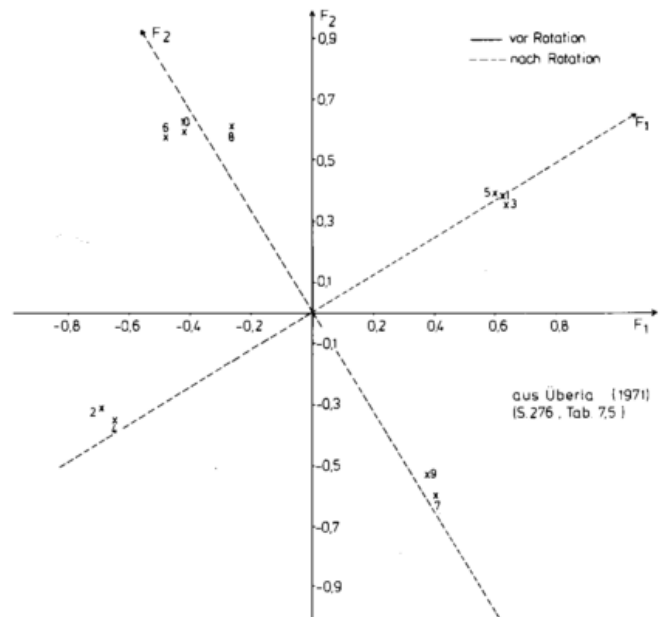


Abb. 4: Wirkung der Rotation auf die Matrix A Werte aus Tab. 1.

Tab. 1: Vergleich der Matrix A vor und nach der Rotation (aus ÜBERLA (1971) S. 276, Tab. 7.5)

Faktorenladungen			
vor der Rotation		nach der Rotation	
Fkt. 1	Fkt. 2	Fkt. 1	Fkt. 2
0,63	0,38	0,74	0,01
-0,69	-0,31	-0,73	0,08
0,64	0,36	0,74	-0,03
-0,64	-0,35	-0,73	0,04
0,60	0,39	0,71	0,02
-0,48	0,57	-0,10	0,74
0,41	-0,60	0,03	-0,72
-0,26	0,61	0,10	0,65
0,39	-0,53	0,05	-0,66
-0,42	0,59	-0,05	0,73

Tab. 2: Die Ausgangskorrelationsmatrix für die Matrix A in Tab. 1 (aus ÜBERLA (1971), S. 276, Tab. 7.6)

Var	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	-0,53									
3	0,56	-0,55								
4	-0,53	0,52	-0,50							
5	0,48	-0,51	0,51	-0,55						
6	-0,13	0,12	-0,16	0,06	-0,03					
7	0,09	0,05	-0,00	-0,08	-0,01	-0,54				
8	0,11	0,00	0,05	-0,08	0,02	0,50	-0,42			
9	0,02	-0,12	0,01	-0,12	0,02	-0,44	-0,48	-0,45		
10	0,00	0,08	-0,07	0,07	-0,02	0,57	-0,54	0,42	-0,45	

3.6 Praktische Anwendung

Die Faktorenanalyse findet nur sehr schwer Eingang in die meteorologische Anwendung. Dies liegt u. a. daran, daß die Ergebnisse oft nicht so ohne weiteres interpretiert werden können. Außerdem gibt es auch kein „Rezept“, welche Berechnungsmethode angewendet werden soll. Das Verfahren hängt vom Datenmaterial ab, wobei besonders das Verhältnis der Variablenanzahl zu der gemeinsamen Faktorenzahl eine Rolle spielt.

Die FA ist z. B. von HOFFMANN (1980) auf meteorologische Daten angewendet worden. Sie führte bei fünf Variablen (Tagessmittelwerte von Temperatur, U/V Komponente des Windes, absolute Feuchte, Niederschlag) und zwei Faktoren zu interpretierbaren Ergebnissen. Durchgeführt wurde die FA nach einer Kommunalitätenabschätzung mittels SMC Methode durch die Berechnung der Faktorenladungen über die Hauptkomponentenmethode. Die Hinzunahme von weiteren

Meßgrößen (Variablen) aus den synoptischen Beobachtungen zeigte, daß hier die o.a. gewählte Methode der Berechnung der Faktorenladungen nicht mehr ausreichte (SCHMIDT/MORGENEYER, 1982). Hier führte die Kombination 1. Abschätzung über Hauptkomponentenmethode und 2. Weiterrechnen mit der Maximum-Likelihood-Methode zu besseren Ergebnissen.

Wie schon unter 3.1 ausgeführt, können bei der Anwendung der FA keine universellen Rezepte angegeben werden. Die zu bearbeitenden Daten können Eigentümlichkeiten enthalten, welche die eine oder andere Methode scheitern lassen. Die Ergebnisse müssen, vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet, eindeutig interpretierbar sein. Wenn dies als Maxime angesetzt wird, steht einer FA nichts im Wege.

Literatur

- DWYER, P. S.: The contribution of an orthogonal multiple factor solution to multiple correlation. *Psychometrika* 4 (1939) S. 113—125.
- HARMAN, H. H.: *Modern factor analysis*. Chicago: Univ. of Chicago Press 1960.
- HOFFMANN, L.: Möglichkeiten einer Klimaklassifikation mit Hilfe der zweimaligen Anwendung der Faktorenanalyse. *Ber. d. Dt. Wetterd. Nr. 152* (1980).
- LAWLEY, D. N.; MAXWELL, A. E.: *Factor analysis as a statistical method*. London 1963.
- RALSTON, A.; WILF, M. S.: *Mathematische Methoden für Digitalrechner*. München: Oldenburg 1972.
- SCHMIDT, H.; MORGENEYER, B.: *Persönliche Mitteilungen* (1982).

- SMIRNOW, W. I.: *Lehrgang der höheren Mathematik*. Bd. III/1. Berlin VEB Dt. Verl. d. Wiss. 1959.
- SPEARMAN, C.: General intelligence, objectively determined and measured. *Am. J. of Psych.* 15 (1904) S. 201—293.
- THURSTONE, L. L.: *Multiple factor analysis*. Chicago: Univ. of Chicago Press 1947.
- ÜBERLA, K.: *Faktorenanalyse*. Berlin: Springer 1971.
- WEBER, E.: *Einführung in die Faktorenanalyse*. Stuttgart: Fischer 1974.

Symbolliste

- Y: Datenmatrix
 Z: Datenmatrix mit den normierten Variablen
 F: Faktorenwertmatrix
 A: Faktorenmatrix
 m: Anzahl der Variablen
 n: Anzahl der Beobachtungsvektoren
 k: Anzahl der gemeinsamen Faktoren
 l: Gesamtzahl der Faktoren
 E: Einheitsmatrix
 R: Korrelationsmatrix
 R_h : Korrelationsmatrix mit den Kommunalitäten in der Hauptdiagonalen
 V: Matrix für die merkmalseigene Varianz
 Q: Matrix für die Restvarianzen
 s_i^2 : Einheitsvarianz der i. Variablen
 a_{ij} : Faktorenladung (Korrelation der i. Variablen mit dem j. Faktor)
 h_i^2 : Kommunalität der i. Variablen

11 Empirische Orthogonalfunktionen

H. FECHNER, Kiel

1 Koordinationstransformation

Zur Einführung soll die Lösung folgender fiktiver Aufgabe gesucht werden: An einer festen meteorologischen Meßstation möchte man eine möglichst genau aktuelle Information über den horizontalen Windvektor haben, man kann oder will jedoch nur eine einzelne Windkomponente in einer festen Richtung laufend messen. Aus früheren Untersuchungen sind an diesem Ort jedoch langjährige Messungen der beiden Windkomponenten vorhanden. In welcher Himmelsrichtung muß die eine Windkomponente laufend gemessen werden und wie ist daraus der gesuchte aktuelle Windvektor zu berechnen? Als nullte Näherung für den aktuellen Windvektor wird man den statistischen Vektormittelwert anzusehen haben. Um das Problem zu vereinfachen, sollen hier nur die Abweichungen vom Mittelwert betrachtet werden. Die gemessenen Abweichungen der Windkomponenten werden mit u und v bezeichnet, ihre statistischen Mittelwerte verschwinden: $[u] = 0$ und $[v] = 0$. Die eckigen Klammern um eine Größe sollen stets den statistischen Mittelwert des in den Klammern stehenden Ausdrucks darstellen. Die Endpunkte der Vektoren (u , v) sind in der Abbildung 1 durch Punkte dargestellt, sie bilden eine

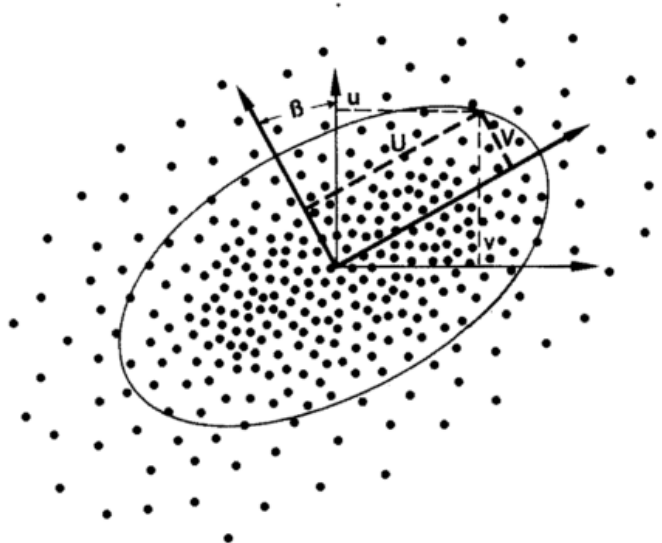


Abb. 1: Drehung des Koordinatensystems um einen solchen Winkel β , daß die Varianz von V im neuen System minimal wird (Hauptachsentransformation).

Punktwolke, deren Linien gleicher Punktdichte im Idealfall aus konzentrischen Ellipsen bestehen. Dann ist es sicher zweckmäßig, die gesuchte Windkomponente U in die Richtung der großen Hauptachse zu legen; während man die dazu orthogonale Windkomponente V in Richtung der kleinen Hauptachse vernachlässigt. Denn damit begeht man offensichtlich im statistischen Sinne den geringstmöglichen Fehler. Die Hauptachsenvektoren der mittleren Ellipse werden „empirische Orthogonalvektoren“ genannt. Empirisch — oder natürlich — deshalb, weil man sie nur mit Hilfe der empirisch gemessenen Zeitreihen der u und v berechnen kann; orthogonal, weil sie als Hauptachsen aufeinander senkrecht stehen. Man erkennt, daß es im Wesentlichen darum geht, den Winkel β zwischen der v -Achse und der kleinen Hauptachse zu berechnen. Da die Komponente in V -Richtung vernachlässigt werden soll, muß man dafür sorgen, daß ihre Varianz, also ihre Streuung im statistischen Mittel ein Minimum wird:

$$[V^2] = \text{minimal.} \quad (1)$$

Da $[U^2] + [V^2] = [u^2] + [v^2]$ nicht von β abhängt, ist (1) gleichbedeutend mit $[U^2] = \text{maximal}$. Das bedeutet: mit dieser Methode erhält die U -Komponente den größtmöglichen Varianzanteil. Geometrische Überlegungen an der Abbildung 1 ergeben

$$V = v \cos \beta - u \sin \beta. \quad (2)$$

Damit führt (1) auf die folgende Lösung für β :

$$\tan 2\beta = 2[uv]/([u^2] - [v^2]). \quad (3)$$

Aus

$$U = u \cos \beta + v \sin \beta \quad (4)$$

in Verbindung mit (2) und (3) erhält man $[UV] = 0$; das heißt, die Komponenten U und V sind statistisch unkorreliert. Die Umkehrung der Formeln (2) und (4) zu einer Vektorgleichung zusammengefaßt liefert die vollständige Darstellung des Windvektors:

$$\mathbf{v} = (u, v) = U (\cos \beta, \sin \beta) + V (-\sin \beta, \cos \beta). \quad (5)$$

Die rechte Seite von (5) besteht aus der Summe von zwei Termen, die aus je zwei Faktoren bestehen. Der jeweils erste Faktor ist ein Skalar, hängt aber von der gewählten Stichprobe — im allgemeinen von der Zeit — ab; der zweite Faktor ist ein Vektor (dargestellt durch seine beiden Komponenten), hängt jedoch nicht von der ausgewählten Stichprobe ab. Die beiden Faktoren sind zeitlich unkorreliert, das heißt in übertragenem Sinne „orthogonal“. Die beiden Vektoren sind im räumlichen Sinne zueinander orthogonal; sie werden deshalb empirische „Orthogonal“-vektoren genannt. Die gesuchte näherungsweise Darstellung des aktuellen Windvektors wird durch Weglassen des letzten Terms von (5) gegeben: $\mathbf{V} = (u, v) \approx U (\cos \beta, \sin \beta)$. Darin ist β die gesuchte, feste Richtung, in der die veränderlichen Windkomponente U gemessen werden muß.

2 Reihenentwicklung nach natürlichen Orthogonal-funktionen

Die Darstellung des Vektors $\mathbf{v}$ durch die rechte Seite der Formel (5) legt einen anderen Weg zur Lösung des Problems nahe, der ohne Schwierigkeiten eine Verallgemeinerung auf Vektoren von mehr als zwei Dimensionen ermöglicht. Zu diesem Zweck wird der Windvektor $\mathbf{v} = (u, v)$ analog zu (5) in eine Summe aus zwei Termen zerlegt, die aus je zwei Faktoren be-

stehen, von denen der erste c_i ($i = 1, 2$) nur von der gewählten Stichprobe abhängt, aber für alle Komponenten gleich ist, während der zweite Faktor ein Vektor $\mathbf{g}_i = (g_{i1}, g_{i2})$ ist, der nicht von der ausgewählten Stichprobe abhängt:

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{g}_1 + c_2 \mathbf{g}_2. \quad (6)$$

Da bei einem vorgegebenen Produkt aus zwei Faktoren einer beliebig vorgegeben werden kann, setzt man — anders als in (5) — fest, daß die Varianz der c_i eins sein soll:

$$[c_i^2] = 1 \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (7)$$

Dadurch erhalten die Vektoren $\mathbf{g}_i$ die gleiche physikalische Dimension, wie sie der Vektor $\mathbf{v}$ hat. Bezeichnet man die nur aus einem Term bestehende Teilreihe von (6) als erste Näherung von $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_1 = c_1 \mathbf{g}_1, \quad (8)$$

so verlangt man, daß der Fehler

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = c_2 \mathbf{g}_2 \quad (9)$$

möglichst nahe bei Null liegen soll. Dies erreicht man, indem das Quadrat von (9) als Skalarprodukt im statistischen Mittel minimiert wird. In Formeln heißt diese Forderung:

$$[(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)] = [c_2^2] \mathbf{g}_2^2 = \text{minimal.} \quad (10)$$

Setzt man den Wert für $\mathbf{v}_1$ nach Formel (8) in Formel (10) ein, so erhält man:

$$[\mathbf{v}^2] - [2c_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_1] + [c_1^2] \mathbf{g}_1^2 = \text{minimal.} \quad (11)$$

Das Nullsetzen der partiellen Ableitungen der linken Seiten von (11) nach c_1 für jede Stichprobe liefert

$$c_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_1) / \mathbf{g}_1^2. \quad (12)$$

Das Nullsetzen der partiellen Ableitungen der linken Seiten von (11) nach den Komponenten von $\mathbf{g}_1$ liefert mit Berücksichtigung der Normierung (7)

$$\mathbf{g}_1 = [c_1 \mathbf{v}]. \quad (13)$$

Aus (12) und (13) erhält man durch Elimination von c_1

$$[\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_1)] = \mathbf{g}_1^2 \mathbf{g}_1. \quad (14)$$

Außerdem folgt aus der Minimumsbedingung (10) die Nebenbedingung $\mathbf{g}_1^2 \geq \mathbf{g}_2^2$. In Komponentenform sieht (14) so aus:

$$\begin{aligned} [u^2] g_{11} + [uv] g_{21} &= (g_{11}^2 + g_{21}^2) g_{11} \\ [vu] g_{11} + [v^2] g_{21} &= (g_{11}^2 + g_{21}^2) g_{21}. \end{aligned} \quad (15)$$

Dies ist ein Eigenwertproblem der symmetrischen Kovarianzmatrix

$$\begin{bmatrix} [uu] & [uv] \\ [vu] & [vv] \end{bmatrix}$$

für den Eigenwert $\mathbf{g}_1^2 = g_{11}^2 + g_{21}^2$. Der Lösungsvektor von (15), $\mathbf{g}_1 = (g_{11}, g_{21})$ gibt dann die Richtung an, in der man den Wind messen sollte. Für die bestmögliche Näherungslösung des Windvektors erhält man damit $\mathbf{v} = (u, v) \approx c_1 \mathbf{g}_1$. Die Verfahren nach 11.1 und 11.2 liefern die gleichen Ergebnisse, falls man setzt: $\mathbf{g}_1 = \sqrt{[UU]}(\cos \beta, \sin \beta)$, $\mathbf{g}_2 = \sqrt{[VV]}(-\sin \beta, \cos \beta)$, $c_1 = U/\sqrt{[UU]}$, $c_2 = V/\sqrt{[VV]}$.

3 Definitionen der grundlegenden Begriffe und Sätze

3.1 Empirisch oder natürlich

Mit empirischen oder natürlichen Funktionen sind solche gemeint, die nur auf Grund statistischer Meßwerte, also auf Grund von Meßreihen berechnet werden können. Das Gegen-

teil stellen mathematische Funktionen dar, für deren Definition oder deren Berechnung keinerlei Messungen erforderlich sind.

3.2 Die unabhängigen Variablen

Bei der Definition der empirischen Orthogonalfunktionen treten zwei voneinander verschiedene Definitionsbereiche auf, in denen auch zwei verschiedene Arten von unabhängigen Variablen variieren können, nämlich die statistische Variable t — oft die Zeit — und die nicht-statistische Variable x — meist eine Raumkoordinate —. Der Wert von t bezeichnet eine bestimmte Realisierung, t kann die Zeit darstellen, es gibt aber auch andere Arten statistischer Realisierungen wie die Betrachtung gleichartiger Vorgänge an verschiedenen Orten. Bei der Mittelung mit der Variablen t als Laufindex wird nicht zwischen dem Mittel der Grundgesamtheit und dem der Stichprobe unterschieden. Bei der Anwendung ist für jede einzelne Stichprobe f_i zu prüfen, ob sie zu der Grundgesamtheit gehört und wie groß die statistische Sicherheit ist. Die nicht-statistische unabhängige Variable x kann einen Punkt im ein- oder mehrdimensionalen Raum darstellen. Die Variable x kann aber auch gegebenenfalls zusätzlich zu ihrer räumlichen Variation noch zur Unterscheidung von verschiedenen physikalischen Meßwerten am gleichen Ort und zur gleichen Zeit dienen, wie zum Beispiel für Temperatur, Feuchte, Luftdruck, Windkomponenten und ähnlichem (vgl. Beispiel 11.7.1 und ERDMANN/FECHNER, 1975).

3.3 Mittelungsprozesse

Beide Arten von unabhängigen Variablen können als Laufindizes bei Mittelungen auftreten. Das statistische Mittel (Stichprobenmittel) einer Variablen c_i wird definiert durch

$$[c] = 1/N \sum_{x=1}^N c_i.$$

Bei der Mittelung über die nicht-statistische unabhängige Variable x wird die zu mittelnde Größe g_x durch einen darüber gesetzten Querstrich dargestellt:

$$\overline{g} = 1/N \sum_{x=1}^N g_x. \quad (16)$$

Beispiele für zweidimensionales x findet man im Abschnitt 11.7.2 und in FECHNER (1982 und 1975). Bei der Mittelung in (16) können auch Gewichte μ_x verwendet werden, deren Summe gleich N ist (vgl. 11.7.1).

3.4 Spezielle gemittelte Ausdrücke

Das Skalarprodukt der Vektoren $(g_{x,1})$ und $(g_{x,2})$ ist $\overline{g_1 g_2}$.

$(g_{x,1})$ ist orthogonal zu $(g_{x,2})$, wenn $\overline{g_1 g_2} = 0$ ist. $[c_1 c_2]$ ist die Kovarianz von $(c_{t,1})$ und $(c_{t,2})$, $\delta_2(c) = [cc]$ ist die Varianz von (c_i) und $[c_1 c_2] / (\delta(c_1) \delta(c_2))$ ist der Korrelationskoeffizient.

3.5 Matrizen, ihre Multiplikation

Eine von zwei unabhängigen diskreten Variablen x, y abhängige Größe ist die Matrix, zum Beispiel (a_{xy}) .

Die Gleichung $\overline{a_y g} = h_y$ stellt eine Multiplikation der Matrix (a_{xy}) mit dem Vektor (g_x) dar, die als Ergebnis den Vektor (h_y) liefert. Aus der Matrix $(f_{x,t})$ kann man die Autokovarianzelemente

$$[f_x f_y] = a_{xy} \quad (17)$$

bilden, für sie gilt $a_{xy} = a_{yx}$. Deshalb ist die durch (17) definierte Matrix symmetrisch. Die Variable y hat den gleichen Wertebereich wie x .

3.6 Eigenwerte, Eigenfunktionen, Eigenvektoren

Existiert für eine gegebene Matrix (a_{xy}) die Gleichung

$$\overline{a_y g} = \lambda g_y, \quad (18)$$

mit $(g_y) \neq (0)$, so nennt man (18) eine Eigenwertgleichung mit dem Eigenwert λ , (g_y) heißt Eigenvektor. Sind x und y jedoch kontinuierliche Variable, dann geht die Summe in (16) in ein Integral über, die linke Seite von (18) in einen Operator — angewandt auf g — und g_y in die Eigenfunktion $g(y)$. Für eine reelle symmetrische Matrix der Dimension N existiert mindestens ein System von genau N zueinander orthogonalen Eigenvektoren. Der auf JACOBI (1804—1851) zurückgehende Beweis dieses Satzes (s. z. B. SPERNER 1957) liefert dabei auch eine für Elektronenrechner geeignete Methode zur gleichzeitigen Berechnung der Eigenwerte und der Eigenvektoren. Ein entsprechendes Algolprogramm findet man z. B. bei RALSTON und WILF (1967). Die Methode beruht darauf, daß man das Problem der Dimension N auf die Lösung des zweidimensionalen Problems zurückführt, für das es gemäß Formel (5) eine elementare Lösung gibt. Leider erhält man im allgemeinen dadurch noch keine exakte Lösung, so daß ein Iterationsprozeß durchzuführen ist.

4 Exakte Definitionen der empirischen Orthogonalfunktionen

4.1 Empirische Orthogonalfunktionen als Eigenvektoren der Kovarianzmatrix

Es liegen T Sätze von Meßwerten $f_{x,t}$ vor ($t = 1, \dots, T$) mit N Einzelwerten pro Satz $x = 1, \dots, N$ und $T \geq N$, dann liefert Formel (17) eine symmetrische Kovarianzmatrix mit N zueinander orthogonalen Eigenvektoren $(g_{x,n})$ und den zugehörigen Eigenwerten λ_n gemäß Formel (18). Damit nimmt die Eigenwertgleichung die folgende Gestalt an:

$$\overline{a_x g_n} = \lambda_n g_{x,n} \text{ für } n = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Die Normierung der $(g_{x,n})$ ist nach Formel (19) noch beliebig. Man setzt sie so fest, daß gilt

$$\overline{g_n g_n} = \lambda_n. \quad (20)$$

Schließlich seien die Eigenvektoren nach abnehmender Größe der Eigenwerte geordnet: $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Diese Eigenvektoren stellen die empirischen Orthogonalvektoren oder bei kontinuierlichem x die empirischen Orthogonalfunktionen dar. In FECHNER (1978) wird gezeigt, daß man die Mittelung in Formel (16) so definieren kann, daß durch die Gleichung (18) sowohl die Orthogonalvektoren als auch die Orthogonalfunktionen erfaßt werden. Daher stellen beide Worte den gleichen Begriff dar. Ist $T < N$ und ist es sinnvoll x als statistische Variable anzusehen, so kann man die Variablen x und t vertauschen, um zu einer Definition für die empirischen Orthogonalfunktionen als Funktionen des ursprünglichen t zu kommen.

4.2 Nach der Länge geordnete Basisvektoren, die optimal an die Punktwolke der Meßwerte angepaßt sind

Diese Definition ist eine auf N Dimensionen verallgemeinerte Form von der in 11.1 benutzten Einführung der empirischen Orthogonalfunktionen. Optimale Anpassung der Basisvektoren ($g_{x,n}$) an die Punktwolke $f_{x,t}$ bedeutet, daß für $n = N, N-1, \dots, 1$ der jeweils kleinste Basisvektor aus der Minimumsbedingung:

$$[\overline{fg}]^2 = \text{Minimum mit } \overline{g^2} = \lambda = \text{konstant berechnet wird.}$$

Auch hier gibt es N Lösungen ($g_{x,1}$), $\dots$, ($g_{x,N}$), die nach der Größe der Eigenwerte λ_n geordnet werden müssen. Diese Definition für die empirischen Orthogonalvektoren ($g_{x,n}$) gilt nur, falls die Mittelwerte der ($f_{x,t}$) gleich Null sind, also für $\overline{f_t} = 0$.

4.3 Definition der empirischen Orthogonalfunktionen als Funktionen, durch die die Meßwerte mit möglichst wenigen, vom Einzelfall unabhängigen Koeffizienten in Form einer Reihe hinreichend gut dargestellt werden können

Es seien wie in Abschnitt 11.4.1 T Sätze von je N Meßwerten $f_{x,t}$ gegeben. Diese Meßwerte sollen von den Reihen

$$f_{x,t,K} = \sum_{n=1}^K c_{t,n} g_{x,n} \quad (21)$$

für $K = 1, \dots, N-1$ immer besser angenähert werden, wobei die empirischen Orthogonalvektoren ($g_{x,n}$) der Ordnung n nicht vom Einzelfall t abhängen sollen, während ihre Koeffizienten $c_{t,n}$ dagegen nicht von der nicht-statistischen Variablen x abhängen dürfen. Ihre Varianz sei außerdem 1. In Formeln stellt sich diese Definition so dar, daß das Abweichungsquadrat zwischen den Meßwerten und der Näherungsreihe im Mittel über beide unabhängigen Variablen x und t für wachsende Anzahl der Reihenglieder von (21) minimal sein soll, dabei sollen die bereits berechneten Reihenglieder ungeändert bleiben. Mit anderen Worten: der letzte Term der Reihe (21) muß so bestimmt werden, daß gilt:

$$\begin{aligned} \overline{[(f - f_K)^2]} &= \text{minimal für } K = 1, \dots, N-1 \\ \text{mit } [c_n^2] &= 1 \text{ für } n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Ganz analog wie in 11.2 läßt sich allein aus diesen Voraussetzungen ableiten, daß die Funktionen $g_n(x) \equiv g_{x,n}$ paarweise orthogonal sind:

$\overline{g_n g_m} = 0$ für $n \neq m$, daß die Koeffizienten $c_n(t) \equiv c_{t,n}$ paarweise unkorreliert sind: $[c_n c_m] = 0$ für $n \neq m$, daß die Varianz des Fehlers der K-ten Näherung gleich der Summe der letzten (N-K) über x gemittelte Quadrate der Orthogonalfunktionen sind:

$$\overline{[(f - f_K)^2]} = \sum_{n=K+1}^N [g_n^2]$$

und daß man die Koeffizienten aus dem Meßwert und der empirischen Orthogonalfunktion durch Bildung des Skalarprodukts berechnen kann:

$$c_{n,t} = \overline{f_t g_n} / \overline{g_n^2}. \quad (22)$$

Verwendet man die Kovarianzmatrix (17), so lassen sich die Orthogonalfunktionen und die Eigenwerte λ_n aus der Eigenwertgleichung (18) berechnen, und die Orthogonalfunktionen sind im quadratischen Mittel gleich dem zugehörigen Eigenwert, wie in Formel (20) angegeben. Diese Definition ist mit

den in 11.4.1 und 11.4.2 gegebenen Definitionen gleichwertig, mit der Ausnahme, daß für die in 11.4.2 gegebene Definition die Mittelwerte der ($f_{x,t}$) und damit auch der ($g_{x,n}$) verschwinden müssen. Beweise findet man bei LORENZ (1959), FECHNER (1975, 1978).

5 Die statistische Sicherheit

Die Eigenwertgleichung (19) liefert N Eigenvektoren als Ergebnis ab, dazu benötigt man mindestens N Sätze von Meßwerten. Der statistische Freiheitsgrad beträgt demnach (T-N). Ist dieser Wert klein gegen N, so muß man mit der statistischen Interpretation der empirischen Orthogonalfunktion sehr vorsichtig sein. Eine genauere theoretische Untersuchung der statistischen Sicherheit erfolgte durch PREISENDORFER (1979). Eine praktische Überprüfung der statistischen Stabilität kann man so durchführen: Man teilt die T Sätze von Meßwerten in zwei oder mehrere Teilsätze ein. Je besser die aus jedem dieser Teilsätze berechneten natürlichen Orthogonalfunktionen ($g_{x,n}$) übereinstimmen, desto besser ist die statistische Stabilität, denn die ($g_{x,n}$) sollten ja nicht von t abhängen. Die Stabilität wird mit wachsender Ordnung n abnehmen.

6 Anwendungsmöglichkeiten

Auf einem „Workshop“ des Europäischen Zentrums für mittelfristige Wettervorhersage (ECMWF, 1977) wurden die verschiedenen Anwendungen der natürlichen Orthogonalfunktionen diskutiert und beschrieben. Dort findet man auch eine sehr ausführliche Literatursammlung zu dem Thema der empirischen Orthogonalfunktionen. Einige Anwendungsmöglichkeiten sollen hier dargestellt werden.

6.1 Datenreduktion

Für die Varianz der K-ten Näherungsreihe $f_{x,t,K}$ erhält man im Mittel

$$\overline{[f_K^2]} = \sum_{n=1}^K \lambda_n.$$

Sind nun die ersten K Eigenwerte groß gegen die übrigen (N-K), so daß man die letzteren vernachlässigen kann und stellt man die $f_{x,t}$ durch die Teilreihe $f_{x,t,K}$ näherungsweise dar:

$$f_{x,t} \approx \sum_{n=1}^K c_{t,n} g_{x,n},$$

so hat man die Anzahl der Daten um den Faktor K/N reduziert. Speziell bei den vertikalen natürlichen Orthogonalfunktionen sind die allerersten Eigenwerte so groß, daß man K sehr klein wählen kann. Man erhält damit bei sehr geringem Verlust an Information eine kräftige Datenreduktion. Für viele Zwecke genügt es oft K = 1 oder K = 2 zu wählen, falls die Funktion des statistischen Mittels vorher von den Meßwerten abgezogen wurde (vgl. Beispiel 11.7.1).

6.2 Klassifikation nach dem statistisch Wesentlichen

Der Satz der Meßwerte $f_{x,t}$ läßt sich durch $c_{t,1} g_{x,1}$ in Form eines Produkts mit der größten Varianz darstellen. Deshalb kann man sowohl die Orthogonalfunktion ($g_{x,1}$) als den wesentlichsten statistischen konstanten Anteil als auch $c_{t,1} \sqrt{\lambda_1}$ als den wesentlichsten statistischen von x unabhängigen Parameter von $f_{x,t}$ ansehen. Ganz entsprechend sind ($g_{x,2}$) und $c_{t,2} \sqrt{\lambda_2}$ als zweitwichtigste Anteile anzusehen. Auf diese Weise kann

man fortfahren und erhält mit $(g_{x,K})$ und $c_{t,K}/\sqrt{\lambda_K}$ für $K = 1, 2, \dots$ eine Klassifikation nach dem statistisch Wesentlichen. Während einerseits die Teilreihen (21) $f_{x,t,K}$ mit wachsendem K eine vom einfachen zum komplizierten fortschreitende näherungsweise Darstellung von $f_{x,t}$ liefert, wird andererseits $f_{x,t}$ durch die Teilreihe (21) immer besser angenähert.

6.3 Die Aufdeckung statistischer Zusammenhänge

Nach (17) stellt a_{xy} die Kovarianz zwischen dem Punkt $x = X$ und dem Punkt $x = Y$ dar. Dies muß sich auch in verstärktem Maße in den natürlichen Orthogonalfunktionen $(g_{x,n})$ niederschlagen. Sei $g_{x,1}$ das Minimum und $g_{y,1}$ das Maximum von $(g_{x,1})$, so besteht zwischen diesen Punkten X und Y eine besonders große negative Korrelation. Im nächsten Schritt kann man diese Untersuchung auf $(g_{x,2})$ und dann auch auf weitere Orthogonalfunktionen ausdehnen, um Zusammenhänge zwischen Werten an verschiedenen x -Koordinaten im statistischen Mittel aufzudecken.

6.4 Eine Hilfe bei der Vorhersage und der Interpolation

Besitzt man statistisch gut abgesicherte, also stabile natürliche Orthogonalfunktionen $(g_{x,n})$, für die also $T \gg N$ ist, so kann man annehmen, daß diese auch für solche t -Werte gelten wird, die nicht zur Berechnung der $(g_{x,n})$ verwendet wurden. Dann wird die Vorhersage des Vektors $(f_{x,t})$ durch Anwendung der Teilreihendarstellung (21) näherungsweise auf die Vorhersage der Zeitreihen $c_{t,1}, c_{t,2}, \dots$ zurückgeführt. Diese Extrapolation der Zeitreihen ist in der Regel einfacher, als Zeitreihen von Vektoren zeitlich zu extrapolieren. Unter den gleichen Voraussetzungen kann man auch das Problem anpacken, einen vollständigen Vektor $(f_{x,t})$ zu erstellen, falls zu diesem Zeitpunkt t einige Werte an den Stellen $x = y$ nicht gemessen werden konnten. Dazu wird der Vektor wieder durch die Reihe (21) für $K = N$ dargestellt, wobei jetzt die Koeffizienten $c_{x,t}$ nicht exakt durch (22) berechnet werden können, weil in dem Skalarprodukt $\overline{f_{t,g_n}}$ die Werte $f_{y,t}$ fehlen. Man kann sich dadurch behelfen, daß man im Zähler und im Nenner der rechten Seite von (22) die Werte mit den fehlenden Indices wegläßt, auf diese Weise Näherungswerte für die $c_{n,t}$ berechnet und damit mit Hilfe von (21) schließlich die fehlenden Werte $f_{y,t}$ berechnet. Diese Methode kann noch verbessert werden, sie führt dann auf das optimale Interpolationsverfahren nach GANDIN (1965), auf das jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll.

6.5 Vorhersagemodelle

Man kann die natürlichen Orthogonalfunktionen in numerischen physikalischen Vorhersagemodellen verwenden. Die physikalischen Variablen werden dabei durch die Reihe (21) dargestellt, t stellt die Zeit und x die Raumkoordinate und gegebenenfalls auch die Art der physikalischen Variablen dar. Die natürlichen Orthogonalfunktionen $(g_{x,n})$ müssen aus früheren statistischen Untersuchungen hinreichend genau bekannt sein. Dann treten in den Vorhersagegleichungen nur die Koeffizienten $c_{t,n}$ als Variable auf. Die Algorithmen zur Darstellung der physikalischen Gesetze werden dadurch zwar ziemlich kompliziert, doch hat man bei begrenzten Vorhersagegebieten wie z. B. Europa den Vorteil, daß man einen sehr langen Zeitschritt nehmen kann und daß vom Rand aus kaum

durch den Rand hervorgerufene Störungen in das Vorhersagegebiet hineinlaufen, näheres bei BODIN (1974).

6.6 Das Aufdecken von Analysefehlern

Liegen wieder hinreichend abgesicherte Orthogonalfunktionen $(g_{x,n})$ vor und hat man andererseits eine Reihe von analysierten Vektoren $(f_{x,t})$, so kann man die Koeffizienten $c_{n,t}$ nach Formeln (22) berechnen und ihre Zeitreihen betrachten. Zeigt einer der Koeffizienten mit hinreichend großer Varianz einen Ausreißer, so ist dies ein Hinweis auf einen Analysefehler (s. RINNE 1977).

7 Zwei Beispiele

7.1 Beispiel 1

Auf der Abbildung 2 wird die erste natürliche Orthogonalfunktion der meteorologischen Parameter über dem Werra-See nach Subtraktion des Jahresganges dargestellt. Die verschiedenen Werte der x -Koordinate bezeichnen sowohl verschiedene Luftdruckniveaus als auch die physikalischen Größen der Temperatur, des Luftdruckes, der Feuchte, der u - und der v -Komponente des Windes. Die Gewichte μ wurden so gewählt, daß sie einerseits proportional zu der sie repräsentierenden Luftdruckdifferenz waren und andererseits proportional zu der durch die physikalische Variable repräsentierte Wurzel aus der Wellenenergie, das waren in der gleichen Reihenfolge wie oben: die Wurzeln aus der internen Energie, der potentiellen Energie und der latenten Wärme; die Windkomponenten blieben ungeändert. Bei $N = 63$ konnten mit den ersten vier Orthogonalfunktionen, also $K = 4$ nach FECHNER (1977) bereits 70% der Gesamtvarianz dargestellt werden. Die Abbildung 2 zeigt in erster Näherung, in welchem typischen Zusammenhang die verschiedenen physikalischen Werte der Atmosphäre in den verschiedenen Druckniveaus stehen, oder anders gesagt, welche Korrelationen zwischen ihnen bestehen.

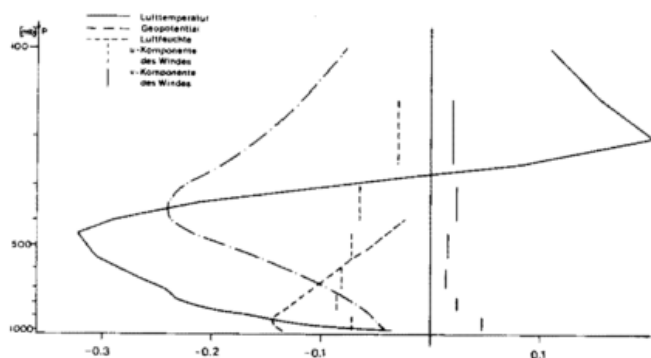


Abb. 2: Erste empirische Orthogonalfunktion verschiedener Abweichungen meteorologischer Größen von ihrem Jahresgang als Funktion des Luftdruckes p über dem Werra-See, dargestellt durch die Wurzeln aus der zugehörigen Energie.

7.2 Beispiel 2

Auf der Abbildung 3 wird die erste natürliche Orthogonalfunktion des Geopotentials der 500-mb-Fläche der Nordhalbkugel nach Abzug des Jahresganges dargestellt. Hier stellte x

einen kontinuierlichen Ortsparameter der Fläche der Nordhalbkugel dar. Die kontinuierliche Abhängigkeit von x wurde durch Darstellung der Variablen in Form von Reihen von Ku-

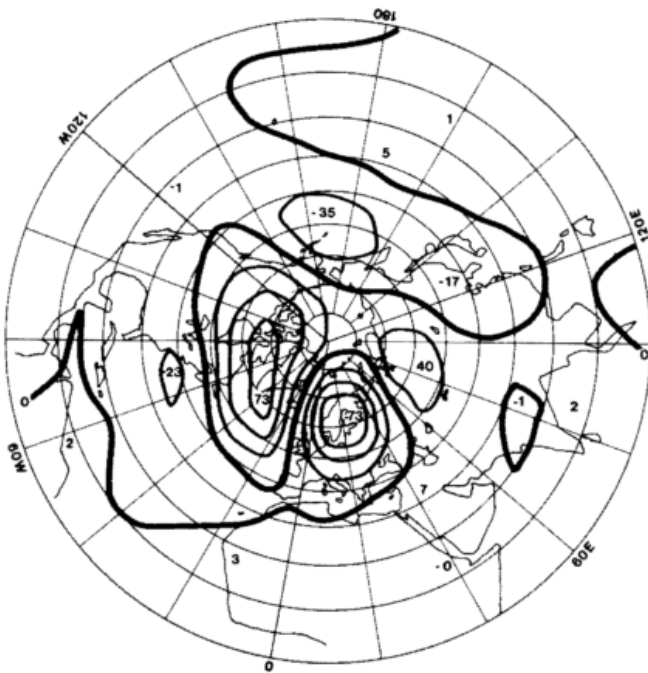


Abb. 3: Erste empirische Orthogonalfunktion der Abweichung des Geopotentials der 500 mb-Fläche vom Jahresgang in gpm.

gelflächenfunktionen in eine diskrete Abhängigkeit von den Ordnungszahlen der Kugelflächenfunktionen umgeformt. Näheres dazu findet man bei FECHNER (1975, 1982). Die Zeitreihe der gewichteten Koeffizienten $w_n c_n$ mit $w_n^2 = \lambda_n$ für $n = 1, 2, 3, 4$ für das Jahr 1967 ist in Abbildung 4 wiedergegeben. In dem dort für $n = 1$ angegebenen Rhythmus bewegen sich die Extrema der Abbildung 3 auf und ab.

8 Wie hat man bei der Anwendung vorzugehen?

- (1) Die Bedeutung der unabhängigen Variablen t und x ist festzulegen.
- (2) Es ist zu prüfen, ob die Statistik hinreichend gesichert ist. Gibt es genug statistisch unabhängige und statistisch stabile Datenvektoren ($f_{x,t}$)?
- (3) Ist die Dimension N der Datenvektoren nicht zu groß, so daß die Matrix (a_{xy}) noch auf dem Computer berechnet werden kann? Wie kann N eventuell reduziert werden?
- (4) Wie müssen die Komponenten der Datenvektoren bei der Mittelung gewichtet werden?
- (5) Soll das statistische Mittel der Datenvektoren vorher subtrahiert werden?
- (6) Berechnung der Kovarianzmatrix nach Formel (17).
- (7) Berechnung der auf eins normierten Eigenvektoren und der Eigenwerte.

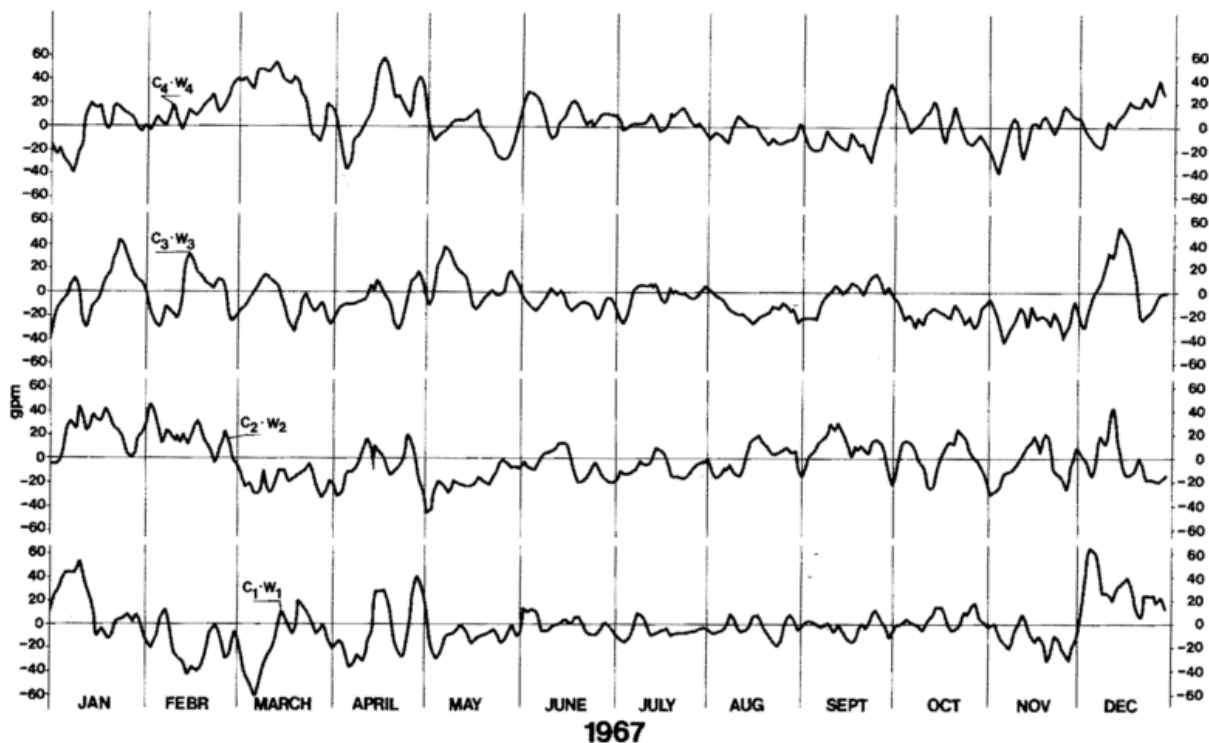


Abb. 4: Mit der Wurzel aus den Eigenwerten gewichtete ersten vier Koeffizienten der empirischen Orthogonalfunktionen der Abweichung des Geopotentials der 500 mb-Fläche vom Jahresgang für das Jahr 1967.

- (8) Darstellung der empirischen Orthogonalfunktionen durch Multiplikation mit der Wurzel der Eigenwerte, um eine korrekte physikalische Dimension zu erhalten. Gegebenenfalls sind die Komponenten der Eigenwerte vorher durch die verwendeten Gewichte zu dividieren.
- (9) Wie schnell nehmen die Eigenwerte λ_n , also die Varianzanteile, mit wachsendem n ab? Hinter welchem Reihenglied K kann man abbrechen, ohne dadurch zuviel Information zu verlieren?
- (10) Berechnung der Koeffizienten $c_{i,n}$ der statistischen Orthogonalfunktionen nach Formel (22).
- (11) Näherungsweise Darstellung der Datenvektoren in Einzelfällen mit wenigen Reihengliedern K nach Formel (21).
- (12) Berechnung der Koeffizienten für Datenvektoren, die nicht für die Kovarianzmatrix verwendet werden nach Formel (22). Rückberechnung der Datenvektoren, um die Stabilität der Statistik zu überprüfen nach Formel (21) mit $K = N$.

Literatur

- BODIN, S.: A quasi-geostrophic 3-parameter numerical prediction model in empirical orthogonal functions. *Tellus* 26 (1974) S. 582—593.
- ECMWF (European Centre for Medium Range Weather Forecasts: Workshop on the use of empirical orthogonal functions in meteorology (1977).
- ERDMANN, H.; FECHNER, H.: Die vertikalen natürlichen Orthogonalfunktionen einer 19-jährigen Reihe von halbtägigen Radiosondendaten der Station Stuttgart/Erlangen. *Meteorol. Rdsch.* 28 (1975) S. 110—121.
- FECHNER, H.: Darstellung des Geopotentials der 500 mb-Fläche der winterlichen Nordhalbkugel durch natürliche Orthogonalfunktionen. *Ber. Inst. f. Meereskd., Kiel* Nr. 5 (1975).
- FECHNER, H.: Representation of weather situations above a certain geographical point and for the whole hemisphere by empirical orthogonal functions. In: ECMWF: Workshop on the use of Empirical Orthogonal functions in Meteorology (1977) S. 50—83.
- FECHNER, H.: Darstellung meteorologischer Felder mit endlichem Definitionsgebiet durch Reihen orthogonaler Funktionen. *Ber. Inst. f. Meereskd. Kiel*, Nr. 44 (1978).
- FECHNER, H.: Klimatologie des Geopotentials der 500 mb-Fläche der Nordhalbkugel unter Verwendung von natürlichen Orthogonalfunktionen im Wellenzahlenbereich. *Meteorol. Rdsch.* 35 (1982) S. 171—181.
- GANDIN, L. S.: Objective analysis of meteorological fields. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations 1965.
- LORENZ, E. N.: Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. *Sci. Rep. No. 1*, Statistical forecasting project. Dep. of Meteorol., M.I.T., Cambridge, Mass. (1956).
- PREISENDORFER, R. W.: Most probable eigenvalues of a random covariance matrix. *SIO-Reference 77-20*, University of California, Scripps Institut of Oceanography, La Jolla, California (1977).
- RALSTON, A.; WILF, L. S.: Mathematische Methoden für Digitalrechner Bd. 1. München, Wien: Oldenburg 1967, S. 152—168.
- RINNE, J. H.; KARHILA, V. E.: A spectral barotropic model in empirical orthogonal functions. *Quart. J. R. Meteorol. Soc.* 101 (1975) S. 365—382.
- SPERNER, E.: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra Bd. 2. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht 1957. S. 133—150.

12 TH. DAHLEM und P. WENDLING, Oberpfaffenhofen Die Monte-Carlo-Methode

1 Problemstellung und historische Entwicklung

In der Mitte dieses Jahrhunderts hat sich in der numerischen Mathematik unter der Bezeichnung „Monte-Carlo-Methode“ (MCM) ein Methoden Zweig entwickelt, der sich für die Lösung der verschiedensten numerischen Aufgaben in mancher Hinsicht den herkömmlichen Verfahren als überlegen erwies. Als Begründer gelten die amerikanischen Mathematiker J. v. NEUMANN und S. ULAM (1949).

Was ist die MCM? Ihre wissenschaftliche Bezeichnung ist „Methode der statistischen Versuche“. Diese Bezeichnung gibt Hinweise auf zwei wesentliche Merkmale des Verfahrens, nämlich auf die mathematische Statistik und auf den Begriff Versuch, wobei dieser im Sinne eines mathematischen Experiments zu verstehen ist.

Das mathematische Experiment besteht in der numerischen Modellierung eines Zufallsprozesses, der durch einen speziellen stochastischen Prozeß, eine zeitdiskrete Markoffsche stationäre Kette mit endlich vielen Zuständen, approximiert wird. Die Lösung des Problems besteht in der angenäherten Bestimmung des Erwartungswertes $E(X)$ der Prozeßvariable X , der in der MCM die zentrale Rolle spielt, und in der Fehlerabschätzung durch einen Schätzwert für die Varianz der Zufallsgröße (CHOI 1978). Die so ermittelten Schätzwerte können dann den in der Statistik üblichen Konfidenztests unterworfen werden.

Wir unterscheiden zwei Aufgabentypen zur Anwendung der MCM. Zum ersten Aufgaben aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, die durch direkte Monte-Carlo-Simulation

gelöst werden. Zum zweiten können gewisse deterministische Probleme durch geeignete stochastische Prozesse beschrieben werden, wobei der gesuchte Wert der deterministischen Variable mit dem Erwartungswert der entsprechenden Zufallsvariable übereinstimmt. Man spricht hier von indirekter Monte-Carlo-Methode.

Das stochastische Modell kann ein körperliches Modell sein. Allgemein bekannt ist das Nadelexperiment von BUFFON (DÖRRIE 1940) zur experimentellen Bestimmung der Zahl π . Solche Modelle sind unhandlich; es ist deshalb zweckmäßig, ein Modell bildhaft, zum Beispiel durch eine numerische Beschreibung, nachzuvollziehen. Hierzu bieten sich die modernen elektronischen Großrechner an.

Die Durchführung eines statistischen Versuchs erfordert die Beschaffung von numerischen Realisationen der nach einer bestimmten Funktion verteilten Zufallsvariablen X . Numerische Werte dieser Art bezeichnet man als Zufallszahlen. Ihre Gewinnung ist eine bedeutende Teilaufgabe der MCM, (SCHMITZ, LEHMANN 1976). Die Monte-Carlo-Methode hat im Laufe ihrer Entwicklung in vielen wissenschaftlichen Fachgebieten ihre Anwendung gefunden, z. B. in zahlreichen Teilgebieten der praktischen Mathematik (KAHN 1950, HALTON 1970), in der Biologie (OSSWATITSCH, EIGEN 1982), der Unternehmensforschung (CHURCHMAN et al. 1966) und in den militärischen Wissenschaften.

Nicht zuletzt findet die MCM auch zunehmend Anwendung in der Meteorologie, z. B. in der Ausbreitungsrechnung (HALL 1974), (CURTISS 1967), in der dynamischen Vorhersage (EPSTEIN 1969), (LAMB 1979), (ALSMILLER et al. 1978) und bei der Lösung klimatologischer Probleme (CEHAK 1982).

2 Die Erzeugung von Zufallszahlen

Einrichtungen, die es gestatten, Zufallszahlen zu erzeugen, heißen Generatoren für Zufallszahlen. Grundsätzlich können sie als Ziffern oder Ziffernfolgen aus Zufallsexperimenten gewonnen werden.

2.1 Algorithmische Erzeugung von Zufallszahlen

Man erzeugt heute auf modernen elektronischen Rechnern mit Hilfe einfacher Algorithmen Folgen von quasigleichverteilten Pseudozufallszahlen im Intervall $[0,1)$.

Eine stetige Zufallsgröße X heißt im Intervall $[0,1)$ gleichverteilt, wenn ihre Dichtefunktion $f(x)$ der Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : 0 \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $F(x)$ der Gleichung

$$F(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x & : 0 \leq x < 1 \\ 1 & : x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

genügt.

Die mittels Algorithmus erzeugten quasigleichverteilten Zufallszahlen sind diskret verteilt, so daß die Gleichungen (1)

und (2) idealisierte Verteilungen darstellen, was für die Praxis jedoch ohne Bedeutung ist. Ein bewährtes Verfahren zur Erzeugung solcher Zufallszahlen ist das Verfahren der multiplikativen Kongruenz (HAMMERSLEY, HANDSCOMB 1964). Ein danach konstruierter Generator ist z. B. durch die Rekursionsformel für Zufallsziffern

$$y_{n+1} = 517 y_n - 2^{32} [(517 y_n) \text{ div } 2^{32}] \quad (3)$$

mit $y_0 = 377\,927$ und $n = 1, 2, 3, \dots$

und für $[0,1)$ gleichverteilte Zufallszahlen durch die Beziehung

$$x_n = \frac{y_{n+1}}{2^{32}} \quad (4)$$

gegeben.

Dabei wird die zahlentheoretische Operation

$$g \text{ div } m = \left[\frac{g}{m} \right] \quad (5)$$

als die größte ganze Zahl erklärt, die in dem Quotienten g/m enthalten ist, für natürliche Zahlen g und m .

Im Intervall $[0,1)$ -gleichverteilte Pseudozufallszahlen zeigen weitgehende Übereinstimmung mit den statistischen Kenngrößen einer echten $[0,1)$ -gleichverteilten Zufallsgröße X , insbesondere mit deren Mittelwert $E[X] = \frac{1}{2}$ und Varianz $E[(X -$

$E[X])^2] = \frac{1}{12}$. Man kann mit diesen deterministisch gewonnenen Größen genau so rechnen, als seien sie echte Zufallsgrößen. Das allein ist für die Praxis entscheidend. Die Folge so erzeugter Zufallszahlen hat eine endliche Anzahl von Gliedern, sie ist periodisch. Der Generator nach Gleichung (3) liefert Zufallszahlen mit der Periodenlänge $N = 2^{32} = 4,3 \cdot 10^9$.

Diese Zahl reicht selbst für aufwendige Simulationen in den meisten Fällen aus, sie wird auch aus ökonomischen Gründen fast immer schon ausreichen müssen.

Ein besonderer Vorteil des Determinismus ist die Möglichkeit, statistische Versuche mit den gleichen Zufallsgrößen in einer beliebigen Zahl von Modellierungsläufen zu wiederholen, was mit natürlichen zufälligen Größen nicht möglich ist.

2.2 Erzeugung von Zufallszahlen mit vorgegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung

Wohl nur in seltenen Fällen einer Monte-Carlo-Simulation wird die Zufallsvariable des zu simulierenden Prozesses $[0,1)$ - $[0,1)$ -gleichverteilt sein. Es ergibt sich daraus die Aufgabe, die gleichverteilten Zufallszahlen in Zufallszahlen zu transformieren, die einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegen. Diese Verteilung kann die einer diskreten oder stetigen Zufallsgröße sein, sie kann empirisch oder analytisch vorliegen. Wir geben hier das allgemeine Beispiel einer Transformation in eine stetige Zufallsvariable vorgegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Es sei X eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion $f_2(x)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion bekanntlich gegeben durch

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^x f_2(\xi) d\xi \quad (6)$$

Es sei

$$F_1(x) = y \quad (7)$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion gemäß Gleichung (2), dann ergibt sich eine nach der Funktion $F_2(x)$ verteilte beliebige Zufallszahl x_n vermöge der Beziehung

$$y_n = F_2(x_n) \quad (8)$$

mittels Umkehrformel

$$x_n = F_2^{-1}(y_n) \quad (9)$$

aus den $[0,1]$ -gleichverteilten Zufallszahlen y_n , ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Abbildung 1 veranschaulicht diesen Zusammenhang.

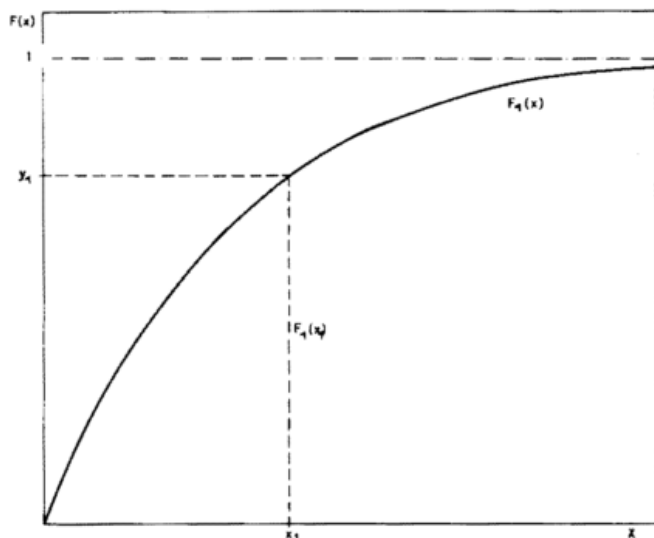


Abb. 1: Transformation von Zufallszahlen.

Bezüglich der Transformation $[0,1]$ -gleichverteilter Zufallszahlen in Realisationen diskret verteilter Zufallsgrößen sei auf die Literatur verwiesen (BUSLENKO, SCHREIDER 1964).

Es gibt auch eine Reihe guter Näherungsmethoden, mit denen die Aufgabe zu lösen ist. Wir erhalten z.B. auf der Basis des zentralen Grenzwertsatzes (FISZ 1970) einen Algorithmus zur Erzeugung standardnormalverteilter Zufallszahlen in der Formel

$$z_k = (-6 + \sum_{n=1}^{12} x_n)_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

wobei aus der Folge der $[0,1]$ -gleichverteilten Zufallszahlen x_n fortlaufend Teilfolgen des Index k mit jeweils zwölf Gliedern zu summieren sind.

Aus den Zufallszahlen z_k lassen sich dann mittels weiterer bekannter Transformationsformeln beliebig normalverteilte Zufallsgrößen simulieren.

2.3 Abschließende Bemerkungen

Die Programmbibliotheken elektronischer Großrechner verfügen im allgemeinen über ein Programm für eine Folge von Zufallszahlen. Die Periodenlänge des durch Gleichung (3) definierten Generators beträgt z.B. $2^{32} = 4.3 \cdot 10^9$ Zufallszahlen,

bei einer Erzeugungsgeschwindigkeit von ungefähr $1.4 \cdot 10^5$ Zufallszahlen pro Sekunde. Die Periodendauer liegt bei rund 8 Stunden.

Mit einem Generator dieser Eigenschaften lassen sich sehr umfangreiche Monte-Carlo-Simulationen bewältigen.

Für den Praktiker sei noch erwähnt, daß ein bekannter Hersteller für die von ihm vertriebenen, programmierbaren Taschenrechner einen einfachen Generator für $[0,1]$ -gleichverteilte Zufallszahlen angibt.

$$x_{n+1} = (x_n + \pi)^5 - [(x_n + \pi)^5] \quad (11)$$

mit $0 < x_0 < 1$.

x_{n+1} ist also der Kommateil der in runden Klammern stehenden Potenz.

Monte-Carlo-Simulationen nicht zu großen Umfangs lassen sich also u.U. auch auf einem Taschenrechner bewältigen.

Eine tabellarische Übersicht über die Transformationsalgorithmen für Zufallszahlen der gebräuchlichsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen geben HAHN und SHAPIRO (1967).

3 Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der MCM

Wir stellen hier kurz die Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammen, die die Grundlagen der Methode der statistischen Versuche bilden.

Es sei X eine zufällige Variable, die in N Versuchen ($N > 0$, ganzzahlig) die Werte $X_1, X_2, \dots, X_N$ annimmt. Die zufällige Variable

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \quad (12)$$

($n > 0$, ganzzahlig) ist dann angenähert normalverteilt mit dem Erwartungswert

$$E[\bar{X}] = E[X] \quad (13)$$

und der Varianz

$$E[(\bar{X} - E[\bar{X}])^2] = \frac{1}{N} E[(X - E[X])^2] \quad (14)$$

d.h. die Varianz der Zufallsgröße $\bar{X}$ ist gleich der Varianz der Zufallsgröße X dividiert durch die Zahl der durchgeführten Versuche. Die vorstehenden Formeln folgen aus dem zentralen Grenzwertsatz (FISZ 1970).

Mit der Varianz

$$\sigma^2 = E[(X - E[X])^2] \quad (15)$$

ist der absolute Fehler ϵ zwischen $\bar{X}$ und dem Erwartungswert $E[X]$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,8% nach der Drei-Sigma-Regel durch die Formel gegeben

$$\epsilon = |\bar{X} - E[X]| < 3 \cdot \frac{\sigma(X)}{\sqrt{N}} \quad (16)$$

Für die an sich unbekannte Standardabweichung $\sigma(X)$ kann die Schätzgröße

$$s(X) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_n - \bar{X})^2 \quad (17)$$

gesetzt werden.

Eine Abschätzung für die mittlere Anzahl $\bar{N}$ von Versuchen, auch Länge eines Laufes genannt, folgt aus Gleichung (16) bzw. Gleichung (17).

$$\bar{N} = \frac{9 \cdot s(X)}{\epsilon} \quad (18)$$

Diese Größe ist bis auf einen Proportionalitätsfaktor gleich der erforderlichen Rechenzeit.

Die in diesem Abschnitt behandelten Formeln bilden den mathematischen Kern der MCM.

4 Anwendungen

Wir wollen in diesem Abschnitt an Hand einiger typischer Beispiele zeigen, welche numerischen Aufgaben mittels Monte-Carlo-Methode gelöst werden können, wie genau die simulierten Ergebnisse sind und wie hoch der dazu benötigte Rechenaufwand ist.

4.1 Direkte Monte-Carlo-Simulation

Wir spielen ein Glücksspiel „Kümmelblatt“ genannt. Aus drei verschiedenen Spielkarten wird eine vom Bankhalter dem Spieler gezeigt. Nach guter Durchmischung hat der Spieler die bezeichnete Karte aus den mit der Rückseite nach oben ausgelegten Karten zu erraten. Errät er sie, ist die Spielserie beendet, errät er sie nicht, wird erneut gemischt und das Spiel wiederholt so oft, bis der Spieler einmal die Karte richtig bezeichnet. Damit endet die Spielserie. Für jedes Spiel zahlt der Spieler DM 1.—, für jede gewonnene (beendete) Spielserie erhält er DM 2.90 von der Bank als Spielgewinn. Ist das ein Gewinnspiel für den Spieler? Wir spielen das Spiel statt mit Karten (auch das wäre eine MCM) mit [0,1]-gleichverteilten Zufallszahlen y_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) auf einem Rechner. Immer dann, wenn $0 = y_k < 1/3$ gilt, gilt die zu ratende Karte als gezogen, sonst nicht.

Bei 3000 Einzelspielen ergab sich z.B. ein mittlerer Gewinn von -0.083 DM pro Einzelspiel, der Fehler beträgt gemäß Gleichung (16) $\epsilon = 0.044$ DM. Der exakte Erwartungswert nach unendlich vielen Spielerien läßt sich in diesem Spiel leicht berechnen, er beträgt $E[X] = -0.10$ DM. Der durch Simulation gewonnene Wert ist damit in relativ guter Übereinstimmung.

4.2 Indirekte Monte-Carlo-Simulation

Unter den deterministischen Problemen, die mittels MCM näherungsweise gelöst werden können, ist das bestimmte Integral einer Funktion ein typisches Beispiel. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung (FISZ 1976) wird folgendes gezeigt.

Es sei X eine stetige Zufallsgröße mit der Dichtefunktion $f(x)$ bzw. der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $F(x)$. Es sei $y = g(x)$ eine integrierbare Funktion, dann ist auch

$$Y = g(X) \quad (19)$$

eine Zufallsgröße mit der gleichen Verteilungsfunktion.

Der Parameter

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx \quad (20)$$

heißt verallgemeinerter Mittelwert, wobei wir die Existenz dieses Integrals voraussetzen. Für diesen gilt weiter

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(x_n), \quad (21)$$

(n ganzzahlig).

Auf der Basis dieses Satzes kann ein numerisches Integrationsverfahren mittels MCM konstruiert werden.

Vorgelegt ist das bestimmte Integral

$$J = \int_a^b G(x) dx \quad (22)$$

mit reellem, sonst beliebigem a und b . (Beide dürfen beliebig groß werden, wenn vermöge gewisser Eigenschaften der Funktion $G(x)$ die Existenz des Integrals gesichert ist.)

Wir konstruieren eine geeignete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < a \\ > 0 & : a \leq x < b \\ 0 & : b \leq x \end{cases} \quad (23)$$

mit der Eigenschaft

$$\int_a^x f(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & : x < a \\ F(x) & : a \leq x < b \\ 1 & : b \leq x \end{cases} \quad (24)$$

D.h. $F(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion. Das ist durch geeignete Normierung immer möglich. Dabei ist es wichtig, die Funktion $f(x)$ dem Integrationsproblem sinnvoll anzupassen. Wir bilden dann das Integral

$$J = \int_a^b \frac{G(x)}{f(x)} \cdot f(x) dx = \int_a^b H(x) \cdot f(x) dx \quad (25)$$

Aus der Formel (21) folgt dann sinngemäß die Näherungslösung für unser Integral

$$J \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H(x_n) \quad (26)$$

Als Schätzwert für die Varianz unserer Berechnung ergibt sich die Formel

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (H(x_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N H(x_n))^2 \quad (27)$$

Wir erzeugen nun [0,1]-gleichverteilte Zufallszahlen y_n , die wir in Zufallszahlen x_n transformieren, die nach der Funktion $F(x)$ gemäß Gleichung (24) verteilt sind und bilden diese Summen. Sie stellen angenähert das Integral bzw. den Fehler der Näherung dar. Der hier beschriebene Zusammenhang steht in einer engen Beziehung zum 1. Mittelwertsatz und zu seiner Verallgemeinerung. Betrachtungen ähnlicher Art gehen bis in die Anfänge der Analysis zurück und sind mit dem Namen einer Reihe berühmter Mathematiker verbunden (DÖRRIE 1940).

Beispiel:

Wir wollen durch Monte-Carlo-Simulation über das Integral

$$J = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

die Zahl π berechnen.

Als besonders geeignete Dichtefunktion $f(x)$ bietet sich hier

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ C \sin x & : 0 \leq x < \pi \\ 0 & : \pi \leq x \end{cases} \quad (29)$$

an. Die Normierungsgröße C bestimmen wir durch die Vorschrift

$$C \int_0^\pi \sin x \, dx = 1 \quad (30)$$

$$\text{Zu} \quad C = 1/2 \quad (31)$$

Die Verteilungsfunktion ist damit

$$F(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos x) \quad (32)$$

Wir erzeugen $[0,1]$ -gleichverteilte Zufallszahlen y_n ($n > 0$, ganzzahlig) und erhalten hieraus durch Transformation die Zufallszahlen

$$x_n = \arccos(1 - 2y_n) \quad (33)$$

Das betrachtete Integral läßt sich danach so schreiben

$$J = \int_0^\pi 2 \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \quad (34)$$

und wir erhalten mit den Größen x_n den Schätzwert für den Mittelwert

$$S_N = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \sin(\arccos(1 - 2y_n)) \quad (35)$$

und damit die Näherung

$$\frac{\pi}{2} \approx S_N \quad (36)$$

Als Schätzwert der Varianz ergibt sich

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\sin(\arccos(1 - 2y_n)) - S_N)^2 \quad (37)$$

Der absolute Fehler wird hiermit nach Gleichung (18) bestimmt.

Die folgende Tabelle zeigt einige Simulationsergebnisse für verschiedene Lauflängen N .

Tab. 1: Zur Simulation der Zahl π .

N	S_N	s^2	ϵ
10	3,4336	0,3340	0,3169
10^2	3,0882	0,2418	0,0725
10^3	3,1509	0,0841	0,0080
10^4	3,1451	0,0293	0,0009
10^5	3,1418	0,0278	0,0003

4.3 Violdimensionale Integrale

Die numerischen Verfahren der praktischen Analysis zur Berechnung von Integralen kleiner Dimensionszahlen sind bezüglich Zeitaufwand und Rechengenauigkeit den Simulationsverfahren der MCM weit überlegen. Überschreitet jedoch die Dimensionszahl n den Wert fünf, so ergibt sich für gewöhnliche Kubaturformeln ein höherer Rechenaufwand als bei Monte-Carlo-Simulation (BUSLENKO-SCHREIDER 1964). Die Zahl der zur Berechnung eines Integrals erforderlichen numerischen Operationen k ist in einer Kubaturformel bei m Stützstellen pro Dimension der Potenz m^n mit n als Dimensionszahl proportional, für die Integration mittels MCM je-

doch angenähert proportional der Zahl der durchzuführenden Versuche. So ergibt sich z.B. für $n = 6$ eine um eine Größenordnung und für $n = 10$ eine um fünf Größenordnungen kleinere Rechenzeit bei der Anwendung der MCM zur Lösung des betrachteten Problems. Werden keine hohen Genauigkeitsansprüche gestellt, so ist die MCM hier die einzig praktikable Lösungsmethode.

4.4 Meteorologische Anwendungen

4.4.1 Ein Beispiel aus der Klimatologie

In jüngster Zeit hat CEHAK (1982) ein stochastisches Modell der Winterstrengen im oberen Donauraum vorgestellt. Es handelt sich um eine Markoffsche Kette, die den zeitlichen Ablauf der Winterstrengen, die geeignet definiert werden, beschreibt. Eine Markoffsche Kette ist bekanntlich im wesentlichen definiert durch die Übergangsmatrix, deren Elemente die Wahrscheinlichkeiten des Übergangs von einem vorgegebenen Zustand in einen anderen Systemzustand angeben (vgl. hierzu FISZ (1970)). Diese werden aus Langzeitdaten mehrerer Beobachtungsstationen geschätzt.

Bei vorgegebenem Ausgangszustand wird dann eine Musterfunktion einer Markoffschen Kette einer diskreten Zufallsgröße simuliert, deren numerische Realisationen identisch sind mit den Klassifikationsindizes der Winterstrenge. Das Verfahren, das auch von DAHLEM (1977) beschrieben wurde, beruht darauf, daß die Elemente einer Zeile der Übergangsmatrix einer Markoffschen Kette einer Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer diskreten Zufallsgröße äquivalent sind. Somit kann jeder Übergang nach dem in Abschnitt 2.2 beschriebenen Transformationsverfahren mittels dieser Verteilungsfunktionen aus $[0,1]$ -gleichverteilten Zufallszahlen simuliert werden. Den Realisationen entsprechend ergibt sich dann die Folge der Zustände. Dieses Verfahren könnte man als verkettete Monte-Carlo-Methode bezeichnen.

CEHAK (1982) hat danach eine stochastische Prognose der Winterstrengen von einem bestimmten Zeitpunkt aus für eine Reihe von Jahren simuliert und mit empirischen Daten verglichen. Das Ergebnis ist in Tabelle 2 dargestellt.

Tab. 2: Vorhersage der Winterstrengen für den Zeitraum von 1968 bis 1977 und Vergleich mit Beobachtungen nach CEHAK (1982).

Jahr	Vorhersage	Beobachtung
1967	—	3
1968	3	3
1969	3	3
1970	3	3
1971	2	3
1972	3	2
1973	1	0
1974	2	0
1975	3	3
1976	0	2
1977	3	3

Stochastische Prognose und Beobachtung stimmen für die erste Hälfte des Vorhersagezeitraums recht gut überein.

4.4.2 Beispiel zur Strahlungsübertragung in der Atmosphäre

Die statistischen Gesetzmäßigkeiten der Wechselwirkung einzelner Elementarteilchen (Photonen, Neutronen, Mesonen) mit Materie sind bekannt. Es bietet sich somit an, die Monte-Carlo-Methode zur oft geforderten Berechnung makroskopischer Charakteristiken von Vorgängen heranzuziehen, an denen eine große Zahl solcher Teilchen beteiligt ist. Was die Strahlungsübertragung in der Atmosphäre angeht, so ist die Monte-Carlo-Methode insbesondere zur Lösung von Problemen im Zusammenhang mit horizontal inhomogen geschichteten Atmosphären geeignet (z. B. Atmosphäre mit durchbrochener Bewölkung, WENDLING 1977).

Als Beispiel für eine einfache Anwendung sei jedoch im folgenden der Fall der reinen Rayleigh-Streuung in der Atmosphäre betrachtet. Die Wechselwirkung von Photonen mit der Atmosphäre ist dann auf zwei Prozesse beschränkt: Zusammenstoß mit Molekülen und Streuung des Photons in eine andere Richtung. Das Prinzip der Anwendung der Monte-Carlo-Methode besteht dann in diesem Fall darin, die freie Weglänge eines Photons (Wegstrecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen) und die neue Richtung, in der sich das Photon nach einer Streuung bewegt, auszuwählen. Es läßt sich zeigen, daß die freie Weglänge L eines Photons beliebige Werte mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(L) = \sigma_{\text{STR}} \cdot e^{-\sigma_{\text{STR}} \cdot L} \quad (38)$$

annehmen kann (σ_{STR} = Streukoeffizient in L^{-1}).

Als Formel für die Transformation von Zufallszahlen ergibt sich hier nach (9):

$$L = -\frac{1}{\sigma_{\text{STR}}} \cdot \ln(1-y) \quad (39)$$

wobei y eine im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl ist. Für die Transformation des Streuwinkels Θ folgt im Fall der reinen Rayleigh-Streuung die Formel

$$\int_{-1}^{\cos \Theta} \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \Theta') d(\cos \Theta') = y. \quad (40)$$

Durch abwechselnde Transformation bezüglich freier Weglänge und Streuwinkel wird nun der Weg einer größeren Zahl von Photonen bis zum Verlassen der Atmosphäre verfolgt. Das Ergebnis einer solchen Simulation zeigt Abbildung 2. Zum Vergleich sind die mit einer anderen Methode berechneten Werte von COULSON et al. (1960) angegeben.

Die mit der Monte-Carlo-Methode erzielten Ergebnisse stellen den Mittelwert von 20 Simulationen der Strahlungsübertragung von jeweils 1000 Photonen dar. Als absoluten Fehler erhalten wir nach (16) für Beobachtungswinkel in Horizontalnähe ($\mu = 0$) $\epsilon = 0.05$ und für solche in Nadirnähe $\epsilon = 0.01$.

5 Weitere Anwendungsgebiete

Es gibt noch eine große Reihe von Aufgabengebieten, in denen Monte-Carlo-Simulation angewendet werden kann.

Besonders interessant ist die Lösung des Randwertproblems der partiellen, linearen Differentialgleichung vom elliptischen Typ. Hier wird das aus der Approximation der Differentialquotienten durch Differenzenquotienten entstehende Differenzschema in Beziehung gesetzt zu einer Irrfahrt auf einem

das Integrationsgebiet überdeckenden Gitter (AMANN 1965). Auf den Zusammenhang zwischen gewissen partiellen Differentialgleichungen und stochastischen Prozessen hat schon PERTOWSKY (1934) hingewiesen.

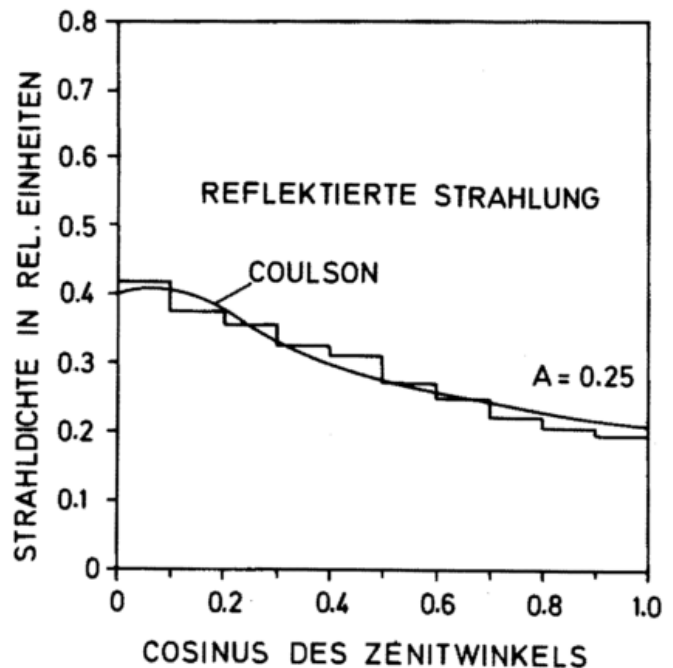


Abb. 2: Mit der Monte-Carlo-Methode simulierte, reflektierte Strahldichte für eine Atmosphäre mit Rayleigh-Streuung (optische Dichte 0.5) bei einer Bodenalbedo von $A = 0.25$ und einer Sonnenhöhe von 36.9° . Zum Vergleich sind die über den Azimut gemittelten Tabellenwerte von COULSON et al. (1960) angegeben.

Die Monte-Carlo-Methode findet auch Anwendung auf Probleme, die mit dem Durchgang von Partikeln durch Materie im Zusammenhang stehen, bei Warteschlangenproblemen und Bedienungsprozessen.

Die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenlösungen von Eigenwertproblemen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, die Lösung linearer Gleichungssysteme und die Inversion von Matrizen ist durch Monte-Carlo-Simulation möglich.

Mittels MCM ermittelte Werte können in herkömmlichen numerischen Methoden als einfach zu gewinnende Startwerte Verwendung finden. Das Anwendungsgebiet der Methode der statistischen Versuche ist hiermit keineswegs erschöpfend behandelt. Der interessierte Leser muß auf die leider recht heterogene Literatur verwiesen werden.

Um den Fehler einer Monte-Carlo-Simulation um eine Größenordnung zu verringern, ist die Länge eines Laufes N bzw. die erforderliche Rechenzeit um zwei Größenordnungen zu erhöhen. Das gilt für die MCM, die sich durch geringe Konvergenzgeschwindigkeit auszeichnet generell. Obige Abschätzung gilt nur im Sinne statistischer Konvergenz, d. h. mit einer gewissen, wenn auch sehr hohen, Wahrscheinlichkeit.

Literatur

- ALSMILLER, F. S.; ALSMILLER, R. G.; BERTINI, H. W.; BEGOWICH, C. L.: Monte Carlo Simulation of Turbulent Atmospheric Transport and Comparisons with Experimental Data. *J. Appl. Meteorol.* 18 (1978) S. 17—26.
- AMANN, H.: Monte-Carlo-Methoden und lineare Randwertprobleme. *ZAMM* 48 (1968) S. 109—116.
- BUSLENKO, N. P.; SCHREIDER, J. A.: Die Monte-Carlo-Methode und ihre Verwirklichung mit elektronischen Digitalrechnern. Leipzig: Teubner (1964).
- CEHAK, K.: A Markov-Chain Model for winterstrength in the Upper Danube Region. *Climatic Change* 4 (1982) S. 297 bis 311.
- CHOI, S. C.: Introductory applied statistics in science. Englewood Cliffs: Prentice Hall (1978).
- COULSON, K. L.; DAVE, J. V.; SEKERA, Z.: Tables related to radiation emerging from a planetary atmosphere with Rayleigh scattering. Los Angeles: University of California Press (1960).
- DAHLEM, Th.: Ein einfaches Verfahren zur Simulation homogener Markoffscher Ketten auf einem elektronischen Rechner. *DLR-FB* 77-66 (1977).
- DÖRRIE, H.: Triumph der Mathematik. Breslau: Hirt (1940).
- EPSTEIN, E. S.: Stochastic dynamic prediction. *Tellus* 21 (1969) S. 739—759.
- FISZ, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Dt. Verl. d. Wiss. (1970).
- HAHN, G. J.; SHAPIRO, S. S.: Statistical models in engineering New York: Wiley (1967).
- HALL, C. D.: The simulation of particle motion in the atmosphere by a numerical random-walk model. *Quart. J. R. Meteorol. Soc.* 101 (1975) S. 235—244.
- HALTON, J. H.: Sequential Monte Carlo. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 58 (1960) S. 57—78.
- HAMMERSLEY, J. M.; HANDSCOMB, D. C.: Monte Carlo Methods. London: Methuen (1965).
- KAHN, H.: Mehrfache Quadratur mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden, in *Mathematische Methoden für Digitalrechner*. Ed.: RALSTON, A.; WILF, H. S., München: Oldenbourg (1969).
- LAMB, R. G.: A Langrangian model of air pollutant transport, diffusion and removal processes. *Met. Assess. Div., ESRL U.S. Envir. Prot. Agency Research, Triangle Park, N.C.* 27711 (1979).
- PETROWSKY, J.: Über das Irrfahrtproblem. *Math. Ann.* 109 (1934) S. 425—444.
- SCHMITZ, N.; LEHMANN, F.: Monte Carlo-Methoden I. Meisenheim: Hain (1976).
- ULAM, S.; METROPOLIS, N. J.: The Monte Carlo Method. *J. Amer. Stat. Assoc.* 44 (1949) S. 335—341.
- WENDLING, P.: Albedo and reflected radiance of horizontally inhomogeneous clouds. *J. Atmos. Sci.* 34 (1977) S. 642—650.
- WINKLER-OSWATITSCH, R.; EIGEN, M.: Glasperlen-spiel mit dem Zufall. *Natur* 8 (1982) S. 91—99.

Aus der Weltorganisation für Meteorologie

Third WMO Statement on Modification of the ozone layer due to human activities and some possible geophysical consequences*

General

1. In recent years, there has been increasing concern as to the effects of the pollution of the stratosphere, and in particular the possibility of a reduction in the amount of ozone present at these levels due to photochemical reactions involving certain trace substances, the concentrations of which are being increased due to man's activities. This concern arises from the danger of increased solar ultra-violet radiation penetrating to the Earth's surface and from the possibility of climatic consequences.

2. With WMO acting as co-ordinating agency, station networks to measure both total

ozone and its vertical distribution have been expanded. During the past two to three decades, much work has been done in defining the structure and energetics of the stratosphere, in studying winter warmings and other special phenomena, in developing vertical profiles and global distributions of ozone. Over the past decade there have been significant improvements in satellite techniques, and in the measurement and understanding of trace species in the stratosphere.

3. Ozone is of major importance in the meteorology of the stratosphere. By virtue of its absorption of solar ultra-violet radiation and the resulting heating effect it largely determines the basic temperature structure and general circulation of this region. Moreover, since it behaves essentially as an inert tracer in the lower stratosphere, observations

of its distribution provide considerable information on transport mechanisms in this region and also on transfer between the stratosphere and troposphere.

4. Improved observations of the vertical distribution of ozone obtained during and after the International Geophysical Year and a better understanding of the photochemistry made it clear that pure oxygen photochemistry did not adequately explain the ozone formation and destruction processes, and the importance of stratospheric trace gases in controlling the ozone balance was realized. This led to the conclusion that ozone might be more sensitive to outside man-made influences.

* This third WMO statement issued 25 November 1981 supercedes the second statement issued 20 October 1978 and the first issued 26 November 1975.

The role of trace gases in the photochemistry of ozone

5. Ozone is formed at upper stratospheric levels as a result of photodissociation of molecular oxygen. According to present knowledge, photochemical balance at those levels is achieved by ozone destruction through catalytic reactions involving the oxides of hydrogen (HO_x), of nitrogen (NO_x) and of chlorine (ClO_x) and to a lesser extent through the classical recombination ($\text{O} + \text{O}_3$). At lower levels, especially below 25–30 km the catalytic processes involve complex interactions among the three trace gas families. The effectiveness of the individual catalytic cycles in removing ozone is determined by the abundances of the highly reactive trace species (e.g. NO , NO_2 , Cl , ClO , HO , HO_2) which is however modulated by the formation of "reservoir" species (e.g. ClONO_2 , HCl , HONO_2 , HO_2NO_2).

6. In the lower stratosphere, where reservoir species such as HCl and HNO_3 are not in local photochemical equilibrium, the interaction between photochemistry and transport (not only of ozone itself) becomes very important. The abundances of individual radical groups are then controlled to some extent by transport of their "reservoir" species and this in turn influences the efficiency of ozone destruction/production processes. Hence, modelling these is very sensitive to assumptions on transport processes and particularly, to changes in reaction rate constants. For example, ozone destruction by the ClO_x cycle is accelerated by increasing HO_x concentrations but retarded by the presence of NO_x and of methane, CH_4 . Similarly, an increase in a rate constant such as the faster $\text{HO} + \text{HNO}_3$ rate reduces the ClO_x effect and increases the importance of NO_x emissions. The inherent complexity of the above processes is the main reason for the continuing rather large uncertainty limits of predicted changes in the ozone layer despite improvements in photochemical specifications.

7. The main natural source of NO_x in the stratosphere is the oxidation of nitrous oxide, N_2O , by excited oxygen atoms which themselves are a product of the photodissociation of ozone. The strength of the natural N_2O biological source at the Earth's surface is not well established but there are indications that there are no large unidentified sinks in the troposphere. Other natural sources of stratospheric NO_x are cosmic rays and solar proton events. The main natural source of stratospheric ClO_x is methyl chloride, CH_3Cl , which arises from biological processes

at the Earth's surface. The flux of CH_3Cl through the troposphere is dependent on the main sink, reaction with hydroxyl, OH . HO_x originates partly from H_2O photodissociation but mainly from oxidation of H_2O and H_2 by the excited oxygen atoms.

8. Quantitative estimates of the theorized change in ozone due to human activities depend on many variables. Laboratory measurements of chemical reaction rate coefficients are an important set of such variables. In recent years, although the basic theory of stratospheric chemistry has not changed much, advances in laboratory techniques have provided many new rate coefficient data. Since the last WMO statement on ozone, new rate coefficients, involving several intermediate chemical reservoirs and their reactions to HO_x and ClO_x have led to changes in model predictions. Some of the new rate coefficients still require independent corroboration. Consequently, in the following sections, wherever appropriate, ranges of estimated ozone changes are given instead of single values.

Effects due to human activities

NO_x changes due to aircraft flying in the stratosphere and the upper troposphere

9. There is considerable continuing research into the direct injection of NO_x into the stratosphere by fleets of supersonic and other aircraft flying there and the consequent effect on the ozone layer. The recent improvements in reaction rate specifications involving HO have modified the effects of NO_x increases giving more emphasis to the stratospheric ozone destruction and less to production in the lower stratosphere and troposphere. Although continuing uncertainties in both measurements and theory require ongoing active research, the updated chemistry now defines the role of NO_x sufficiently well to state with some confidence that:

— Large fleets of aircraft, whether supersonic or subsonic, operating in or above the lower stratosphere (15 km or higher in middle and polar latitudes) would significantly deplete the ozone layer, according to current calculations. The same calculations also show that fleets operating at lower altitudes would cause some ozone increase. Thus the ozone changes, attributable solely to existing or planned aircraft fleets, would depend on the fleet sizes and their operating altitudes and may not necessarily be insignificant.

NO_x increase due to increased production of nitrous oxide at the surface

10. It has been theorized that increased use of agricultural fertilizers and/or of nitrogen-fixing vegetation might affect the nitrogen cycle and result in an increase in the amounts of nitrous oxide (N_2O) released from the surface into the atmosphere. This would then lead to an increase of NO_x in the stratosphere and hence to a change in the ozone distribution. Recent analyses of historical collections of N_2O data suggests that a fraction of the observed 0.2% (0.5 ppb) per year increase of the N_2O concentration could be explained by fossil fuel combustion. However, the relative importance of this source and of the increase in the biological sources is still uncertain.

11. Because of the extreme complexity of this problem, involving as it does the whole global nitrogen cycle, uncertainties regarding the consequences on the ozone layer are still very great. Several studies of possible anthropogenic causes of tropospheric ozone changes are in progress. Such causes include NO_x injected from airplanes near the tropopause and release of NO_x and other pollutants at ground level. Changes of chemical composition of the troposphere (e.g. CO , NO_x) may affect the distribution of the hydroxyl (OH) radicals and thereby the fluxes of long-lived trace species like CH_4 , CH_3Cl , CH_3CCl_3 and others to the stratosphere. Large uncertainties are however connected with the estimates of tropospheric ozone changes due to the inhomogeneities of tropospheric gaseous composition and the insufficient data base for tropospheric ozone itself. Present understanding of this problem indicates that:

— There is little likelihood of a significant change in the ozone layer in this century as a result of changing agricultural practices, but the matter deserves continued study because of possible longer-term effects.

Chlorofluoromethanes

12. The continued release into the atmosphere of chlorofluoromethanes, especially CFCl_3 (Fluorocarbon 11) and CF_2Cl_2 (Fluorocarbon 12) is predicted to result in an increasing amount of ClO_x in the stratosphere. Since the removal rate of ClO_x is slow, it is to be expected that the stratospheric ClO_x concentration will continue to increase for many years even after all emissions of chlorofluoromethanes into the atmosphere cease. Thereafter, the recovery rate from any

potential perturbations would be rather slow.

13. Several model estimates have been made of the time-history of the influence of increased ClO_x from man-made chemicals on the average total amount of ozone. The calculations involve concentrations of the important atmospheric constituents taken or derived from the available observations, and the best current estimates of chemical reaction rates.

14. On an average world-wide basis these calculations indicate that the present ozone depletion contribution due solely to CFCl_3 and CF_2Cl_2 already added to the stratosphere is about 0.5 to 0.9 per cent and for further additions predict that:

— Without regard to other modifying factors, the long-term steady-state effect of a continued release at the 1977 world rate of release would be about 5 to 10 per cent average ozone depletion, and the full range of overall uncertainty could be larger. This is on the assumption that there are no other major sinks for the chlorofluoromethanes.

15. Thus, whilst a fuller understanding of the chemistry involving chlorine in the stratosphere will require further measurements and calculations, the present evidence still supports the view that an undiminished rate of release of chlorofluoromethanes into the atmosphere will eventually lead to a significant reduction in upper stratospheric ozone.

Other causes of modifications to the ozone layer

16. All gaseous compounds which can release chlorine to the stratosphere are potential agents for the destruction of ozone. Among these are naturally-produced methyl chloride (CH_3Cl) and other chlorocarbons such as CH_3CCl_3 , CCl_4 , CHCl_2F and $\text{CCl}_2\text{FCClF}_2$. Such compounds have been detected in significant amounts and appear to show increasing trends in the atmosphere. Another potential factor is the expected carbon dioxide increase due to human activities, whereby the warming of the troposphere and cooling of the stratosphere would result in a modest increase in the total ozone. The variability of solar fluxes may also have influence on the predicted model calculations. It is not at all certain that scientists have identified all potential modifiers of the stratospheric ozone layer, or gathered sufficient data to carry out definitive analyses of these phenomena.

Possible consequences of ozone depletion

17. Those possible consequences of changes in the ozone layer which have been suggested and estimated on the basis of the limited data available may be divided into the biological influences on man, animals and crops of increased ultraviolet radiation in the wavelength band 280–320 nm (UV-B) and climatic consequences.

Biological effects

18. A reduction in the ozone column would result in an increase of UV-B radiation received at the ground, and theoretical calculations using both absorption and scattering by ozone and other atmospheric constituents have indicated an approximate magnification factor of about two between percentage changes in the ozone column and percentage changes in UV-B radiation in clear sky conditions, a factor which is latitude dependent. In other words a reduction of 5 to 10 percent in ozone would be likely to result in an average increase of about 10 to 20 percent in UV-B (or "erythema") radiation.

Climatic consequences

19. Because solar ultra-violet radiation is very strongly absorbed by ozone, the temperature of the stratosphere is largely maintained by a balance between absorption of solar radiation by ozone and emission of atmospheric infrared radiation by ozone, carbon dioxide and water vapour. Current models estimate that, corresponding to the cited steady-state reduction of 5 to 10 per cent in the total ozone column, there may be local decreases of ozone by as much as 35 per cent at levels of about 40 km. This local ozone depletion would result in a local temperature decrease of about 10°C , but would have a negligible (a fraction of a degree) effect on the earth's surface temperature. However, it has been suggested that small changes in tropospheric ozone concentrations could cause a direct increase in the surface temperature somewhat comparable to the CO_2 effect.

20. The chlorofluoromethanes and some other halogen compounds have strong absorption bands in the part of the infrared spectrum where the other trace gases are quite transparent, and therefore an increase in the amount of these compounds in the troposphere would cause a warming by their additional "Greenhouse" effect. It has been estimated that a continued release of chlorofluoromethanes at the 1977 rate, taken in isolation of other factors, could in this way pro-

duce an average temperature rise at the surface of 0.5°C in the next century. Such a change in the mean global temperature may well be of significance.

21. Studies with atmospheric dynamic models have suggested that large stratospheric temperature changes could result in a structural change in the tropospheric planetary scale waves and hence result in changes in regional climate. Because of the complexity of the stratosphere-troposphere interactions, it is not possible at this time to infer with any reliability what the full consequences of these changes would be on earth's climate, and more intensive studies are necessary.

Ozone trends

22. The ozone data for the ten-year period 1970–1979, provide no evidence of a significant *deterministic* trend in total ozone. There is some evidence for an increasing trend in tropospheric ozone as measured by ozone-sondes and some evidence for a decreasing trend in ozone near 40 km from BUUV and SBUV satellite observations. However, from the statistical view point, the latter of these trends is not significantly different from zero. In general, it is not appropriate to test individual scenarios for ozone change, such as the chlorofluoromethane depletion scenario against the observations for trends. In addition to natural variability and observational deficiencies, the possible decrease may be masked by a variety of possible alternative effects, for example, tropospheric ozone increases due to aircraft emissions and other combustion products; stratospheric ozone increases due to stratospheric (CO_2 induced) cooling and possible variations in solar ultraviolet emissions during the 11-year, 22-year or other solar perturbations. Although this list is not exhaustive, it could be stated that:

— at the present time, there is no statistical basis to reject the hypothesis that theoretical model predictions of ozone trends and the observational evidence are consistent.

The need for more observations and research

23. On the basis of the current evidence, the threat of a considerable distortion of the ozone layer in the future is widely recognized. The foregoing review of present knowledge has shown clearly that there is a lack of understanding in a number of important aspects. Whilst this lack of understanding results in a considerable divergence of opinion as regards the details of the problem, the

prudent course of action at present seems to be to continue and step-up efforts so as to reduce the scientific uncertainties as rapidly as possible.

24. Although knowledge of the distribution of ozone is much greater than of the other trace constituents involved in stratospheric photochemistry, an intensive observational effort is needed as a matter of urgency to establish the basis for continued long-term monitoring of ozone and to obtain the necessary detailed knowledge of the vertical distribution needed for improved understanding. Also urgently needed are simultaneous *in situ* measurements of the important trace gases to test and evaluate chemical reaction schemes employed in theoretical models. Parent substances of the ozone-destroying radicals should be monitored to establish trends. Measurements of the extra-terrestrial solar flux as a function of wavelength between 180 and 350 nm and its variations in time are also of fundamental impor-

tance. To complement biological studies on the effects of solar UV-B radiation, monitoring of radiation in this spectral range is needed.

25. In order to guarantee the high standard of the observational programme, and to obtain a maximum return on the efforts invested therein, a research programme should be interwoven so as to improve understanding of the various aspects concerning atmospheric ozone. In addition to the various specific problems which can be tackled by fairly small groups, the research programme should facilitate broad-scale projects of a strongly inter-disciplinary character to study:

- (a) The chemical inter-relationships of the cycles of chlorine, hydrogen, nitrogen and other compounds, in the atmosphere and their possible changes due to human activities;
- (b) The coupling between the stratospheric chemical composition, heating rates and

circulation in conjunction with the transport of relevant gases and tropospheric/stratospheric exchange processes;

- (c) The influence on climate of changes in stratospheric composition involving quantitative treatment of the associated feed-back systems;
- (d) Biological consequences of changes in solar UV-B radiation on the global ecosystem.

26. There is therefore a continuing and pressing need for a co-ordinated international programme under the leadership of WMO to monitor and study all aspects of the stratospheric environment relevant to ozone. The continued collaboration of Members and international bodies such as UNEP and ICSU is essential to the success of this programme.

(The third WMO statement was prepared by an international group of experts on the stratosphere including leading ozone specialists.)

Aus dem Deutschen Wetterdienst

Das operationelle Wettersatellitenprogramm METEOSAT

In einer Regierungskonferenz am 21.—23. März 1983 in Paris wurde von 17 westeuropäischen Staaten die Fortführung des Wettersatellitensystems METEOSAT bis 1995 als operationelles Programm beschlossen.

In der daraufhin einberufenen Konferenz der Bevollmächtigten der teilnehmenden Staaten wurden am 24.5.1983 in Genf die für die Schaffung des operationellen METEOSAT-Programms erforderlichen Regierungsabkommen unterzeichnet. Das operationelle METEOSAT-Programm ist somit am 24.5.1983 in Kraft getreten.

Das Programm sieht die folgenden Leistungen vor:

1. Nachbau des METEOSAT-Satelliten in drei Exemplaren, einschließlich der Bauteile für den Bau eines vierten Satelliten für den Fall eines Fehlstarts. Die Satelliten sind für eine Lebensdauer von je 5 Jahren ausgelegt.
2. Start der drei Satelliten mit der europäischen Trägerrakete Ariane. Der erste Start ist für 1987 vorgesehen.

3. Betrieb der Satelliten einschließlich des bereits bestehenden Bodensystems der ESA beim ESOC Darmstadt.

Den Wetterdiensten Europas, Afrikas und des Nahen Ostens werden damit die gleichen Leistungen geboten wie schon im prä-operationellen Programm:

- Bilddaten jede halbe Stunde, Verbreitung über den Satelliten.
- Gewinnung von Meßdaten automatisch sendender Wetterstationen aus fernmeldetechnisch schlecht zugänglichen Gebieten, Verbreitung über das GTS (Global Telecommunication System; DCP-Mission, DCP = Data Collection Platform).
- Meteorologische Parameter, die aus den Bilddaten abgeleitet wurden und über das GTS verbreitet werden (z.B. Windvektoren aus Wolkenzugmessungen in den Tropen, Temperaturen der Meeresoberflächen etc.).

Außerdem können über diese Satelliten meteorologische Daten zusätzlich zum bestehenden GTS übertragen werden; diese Möglichkeit soll besonders den afrikanischen Staaten dazu verhelfen, Schwachstellen im bestehenden GTS zu überbrücken.

Die METEOSAT-Satelliten sind für eine geostationäre Umlaufbahn in 35 800 km Höhe über dem Äquator konzipiert. Sie sollen auf der Position 0°N, 0°E fixiert werden, also über dem Golf von Guinea. Sie erfassen von dort aus sowohl fernmeldetechnisch als auch bei der Erzeugung von Bilddaten ungefähr ein Drittel der Erdoberfläche, nämlich Europa, den Atlantik und Afrika. Der von METEOSAT aus sichtbare Horizont ist ein Kreis, der am Äquator die Längengrade 82°E und 82°W sowie auf dem Greenwich-Meridian die Breitenkreise 82°N und 82°S schneidet.

Die Kosten des Programms werden auf 400 europäische Rechnungseinheiten veranschlagt, das entspricht ca. 950 Mio DM. Die auf die Teilnehmerstaaten entfallenden Beitragssätze summieren sich insgesamt auf ca. 85% der veranschlagten Kosten. Das verbleibende Defizit muß durch Einsparungen und durch Erhebung von Nutzungsgebühren von den nicht teilnehmenden Staaten gedeckt werden. Der deutsche Beitragsanteil beläuft sich auf 21%, größter Beitragszahler ist Frankreich mit 22%.

Als Träger des Programms soll per Staatsvertrag eine neue internationale Organisation EUMETSAT gegründet werden. Während der Übergangsphase bis zum Inkrafttre-

ten dieses Staatsvertrages (voraussichtlich bis 1985) wird die ESA als Träger des Programms auftreten.

EUMETSAT soll die folgenden Aufgaben wahrnehmen:

- Überwachung und Leitung des Programms.
- Vertretung des Programms gegenüber Nichtmitgliedstaaten, der WMO, anderen Betreibern von Wettersatellitensystemen sowie gegenüber einzelnen Nutzern.
- Abwicklung des Zahlungsverkehrs mit den Teilnehmerstaaten sowie den Auftragnehmern (vorwiegend der ESA).

Der Sitz von EUMETSAT ist noch Gegenstand von Verhandlungen. Angebote liegen zur Zeit von der Bundesrepublik für Offenbach/Main und von Frankreich für Paris vor. EUMETSAT soll 10 Mitarbeiter umfassen. Im EUMETSAT-Rat sollen die Wetterdienste bzw. die zuständigen Ministerien der Teilnehmerstaaten vertreten sein.

Das operationelle Programm hat am 24.5.1983 mit der Unterzeichnung der Regierungsabkommen für die Übergangsphase bis 1985 begonnen. Als erste Maßnahme werden der Nachbau von drei Satelliten und deren

Starts in Auftrag gegeben. Der erste der drei Satelliten wird erst 4 Jahre nach Auftragerteilung startbereit sein, also 1987.

Im Vergleich zu anderen Satellitenprogrammen ist diese Wartezeit kurz. Sie wird dadurch erreicht, daß auf größere, teure und technisch riskante Änderungen an der Konstruktion der Satelliten verzichtet wird. Als (relativer) Nachteil wird in Kauf genommen, daß das METEOSAT-System bis 1995 mit Satelliten betrieben wird, die technisch auf dem Stand von 1971, dem Jahr der Konstruktion von METEOSAT 1, stehengeblieben sind.

Für den Betrieb des Systems bis 1987 stehen die beiden in der Umlaufbahn befindlichen Satelliten METEOSAT 1 und 2 zur Verfügung sowie der noch am Erdboden befindliche Prototyp METEOSAT P2. Die Lebensdauer dieser Satelliten ist durch Alterung der Sonnenzellen in der Umlaufbahn und durch Verbrauch von mitgeführtem Treibstoff für regelmäßig notwendige Bahnkorrekturen auf nominell 3 Jahre begrenzt, für die drei nachgebauten Satelliten wird sie bei ca. 5 Jahren liegen.

Da deshalb ein Betrieb von METEOSAT 1 (Start am 23.11.1977) und METEOSAT 2

(Start am 19.6.1981) bis zum Jahre 1987 nicht durchgehalten werden kann, wird zur Überbrückung der Prototyp P2 im Jahr 1985 gestartet. Unter Berücksichtigung versteckter Lebensdauer-Reserven dieser Satelliten besteht somit die Aussicht, daß der Betrieb des METEOSAT-Systems bis zum Start des ersten nachgebauten Satelliten im Jahr 1987 aufrechterhalten werden kann. Lediglich bei der DCP-Mission ist ein Ausfall vor 1985 wahrscheinlich, da diese aufgrund eines technischen Fehlers von METEOSAT 2 nicht unterstützt werden kann; sie wird zur Zeit nur von METEOSAT 1 durchgeführt.

Für die Zeit nach 1995 muß ein Nachfolgesatellit entwickelt werden. Für diese Entwicklung ist satzungsgemäß nicht EUMETSAT, sondern die ESA zuständig. Vorstudien sind von der ESA bereits begonnen worden, jedoch besteht noch keine feste Rechts- bzw. Finanzierungsgrundlage für die eigentlichen Entwicklungsarbeiten. Diese Grundlagen müssen in den nächsten zwei Jahren geschaffen werden, um den Anschluß ab 1995 sicherzustellen, denn die Vorlaufzeit für solche Entwicklungen liegt erfahrungsgemäß in der Größenordnung von 10 Jahren.

H. WOICK, Offenbach

Aus dem Geophysikalischen Beratungsdienst der Bundeswehr

Die Ostalpen, von einem umlaufenden Wettersatelliten in verschiedenen Spektralbereichen gesehen

Der Herbst 1982 war im Raume der Ostalpen durch länger anhaltende Hochdrucklagen gekennzeichnet, in denen es nur zu geringer Wolkenbildung gekommen war. Deshalb konnte die Eignung der verschiedenen Sensoren des in etwa 700 km über der Erdoberfläche umlaufenden US-Wettersatelliten NOAA 7 für die Erderkundung getestet werden. Dabei wurde am 14.09.1982 zwischen 1216 und 1220 GMT das als Abbildung wiedergegebene Ergebnis erzielt. Der Satellit flog um diese Zeit über Osteuropa. Da die Sonne südwestlich von den Ostalpen stand, konnte für Abtastungen der Erdoberfläche im sichtbaren Bereich durch Schattenwurf der Berge in den Alpen mit größeren Bildkontrasten gerechnet werden.

Der Sensor des Kanals 1 überdeckt vor allem den blauen und grünen Teil des optischen Spektrums. In diesem Bereich ist mit erhebli-

cher Beeinflussung durch Dunst über der Erdoberfläche zu rechnen. Deswegen zeigt dieses Bild weder die Küstenkonturen der Adria noch geographische Einzelheiten (wie Flußläufe) in den Ostalpen. Einige weiße Punkte im Gebiet des Kamms der Ostalpen sind Schönwetterwolken.

Der Spektralbereich des Kanals 2 liegt im roten und im benachbarten infraroten Spektralbereich. Er wird so gut wie nicht durch Dunst beeinflusst. Infolgedessen sieht man die Küstenkonturen der Adria klar. Auch in den Alpen heben sich die ostwest streichenden Flußtäler (z. B. Inn, Enns) als Folge der Schattenwirkung der Berge gut heraus. Dagegen sind die nordsüdlich streichenden Täler (z. B. die Etsch) so gut wie nicht zu erkennen. Da die Alpen in diesem Bereich in ihrer Grauschattierung wesentlich kontrastreicher als bei Kanal 1 erscheinen, bestehen Schwierigkeiten, die Schönwetterwolken hier zu erkennen.

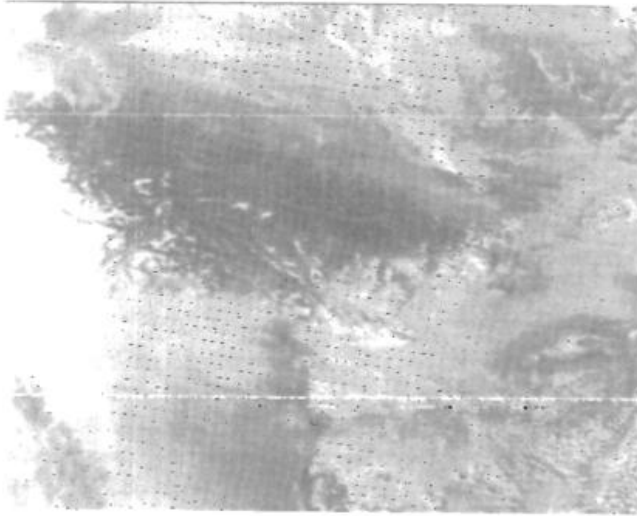
Kanal 4 liegt im infraroten Bereich. Der Sensor empfängt hier ein sogenanntes „Misch-

signal“. Es besteht z.T. aus reflektierter Sonnenenergie, z.T. aus der Temperaturstrahlung nach dem Planckschen Strahlungsgesetz, das besagt, daß ein Körper umso weniger Energie rückstrahlt je kälter er ist. Die Bildwiedergabe in diesem Spektralbereich ist so geeicht, daß die Darstellung umso dunkler wird, je mehr Energie empfangen wird. Im Kanal 4 sind die großen ostwestlich verlaufenden Alpentäler und die Küstenlinie der Adria noch besser zu erkennen als im Kanal 2. Am westlichen Bildrand in der Poebene sind einige schwarze Flächen auszumachen. Bei genauerem Hinsehen erkennt man ähnliche, aber kleinere schwarze Flächen am Südrand der Ostalpen und über dem Bayerischen Wald. Die Rückstrahlung des Wassers ist hier so stark, daß der Sensor große Energie empfängt. Nach hier vorliegenden Erfahrungen handelt es sich um Nebel- oder Hochnebfelder. Sie verhindern in diesem Fall den Durchblick auf die Erdoberfläche.

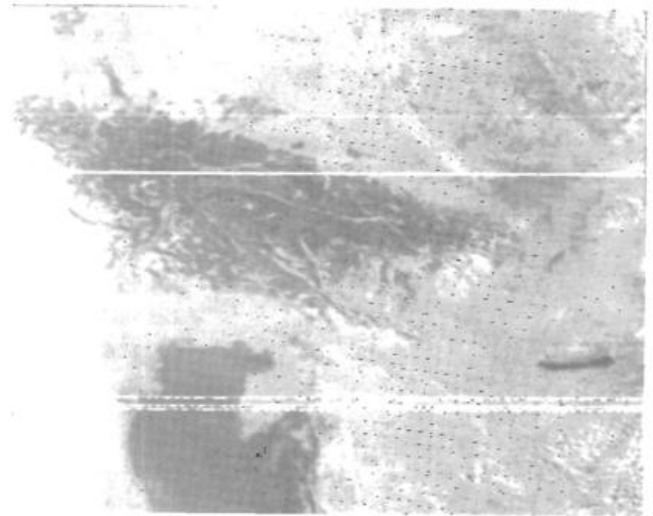
Im Kanal 3 wird eine reine Wärmestrahlung nach dem Planckschen Strahlungsgesetz

NOAA 7

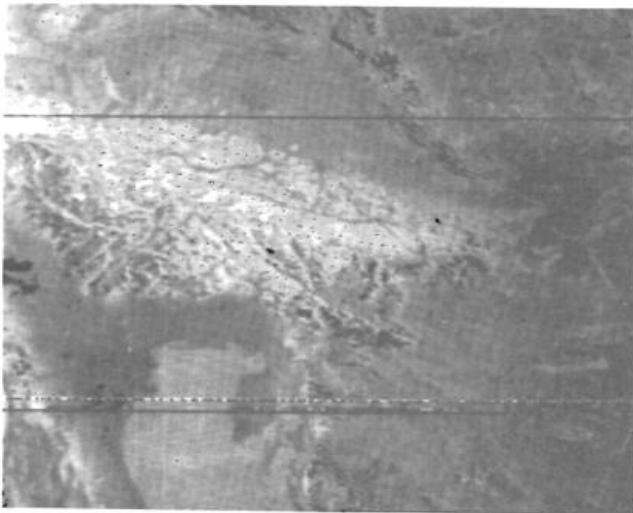
14.09.1982 1216 — 1220 GMT



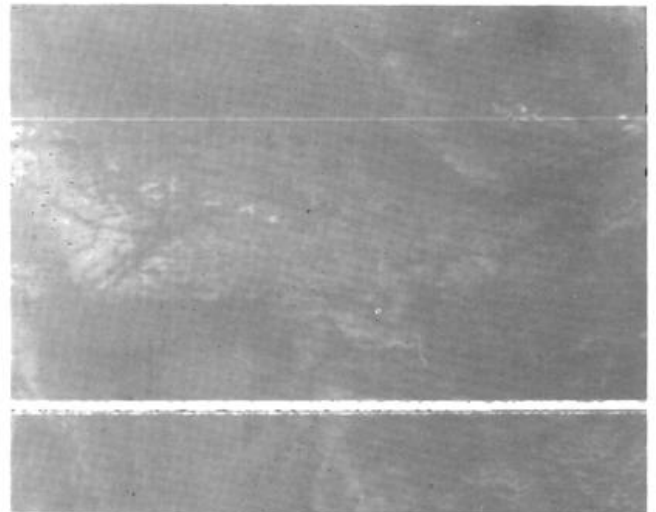
Kanal 1
0,58 - 0,68 μm



Kanal 2
0,725 - 1,10 μm



Kanal 4
3,55 - 3,93 μm



Kanal 3
10,3 - 11,3 μm

empfangen bei AWGeophys, Traben-Trarbach

empfangen. Je kälter die strahlende Fläche ist, desto heller erscheint sie in der Wiedergabe. Da die Empfangsanlage auf einen Temperaturintervall von $+20^\circ$ bis -50°C geeicht ist, sind die Temperaturunterschiede an der Erdoberfläche an einem warmen Sommertag wie dem 14.09.1982 für eine Auflösung in Graustufen beinahe zu gering. Man erkennt in der Wiedergabe nur andeutungsweise den Temperaturunterschied zwischen den heller grau erscheinenden Bergen der

Ostalpen und den dunkler erscheinenden Tiefebene des Pos und des Alpenvorlandes. Die Küstenlinie der Adria ist nicht zu erkennen, da der Temperaturunterschied zwischen Wasser und Festland nicht allzu hoch gewesen ist. Dagegen erkennt man als weiße Punkte die Schönwetterwolken auf der Kammlinie der Alpen.

NOAA 7 hat noch einen fünften Kanal im Spektralbereich $11,5-12,5 \mu\text{m}$. Auch hier wird nur die Wärmestrahlung nach dem

Planckschen Gesetz gemessen. Der Unterschied zwischen der Abtastung im Kanal 4 und Kanal 5 ist so gering, daß eine Wiedergabe sich nicht lohnt.

R. F. PAULUS, Traben-Trarbach

Habilitationen, Promotionen und Diplom-Hauptprüfungen an den Universitäten der Bundesrepublik Deutschland und West Berlins im Jahre 1982

Freie Universität Berlin

Diplom-Hauptprüfungen

BRÜGGEMANN, K.: Ein problemorientiertes Prüfverfahren für die Niederschlagsprognose in Berlin.

DÖRING, R.: Der Einfluß der städtischen Verbauung auf den Helligkeitsverlauf während der Dämmerung.

JOSSNER, U.: Die Beziehung der Trübung zum Aerosol und anderen meteorologischen Größen.

KIETZIG, E.: Statistische Untersuchungen und Spektralanalyse des Geopotentials in 500 mb entlang 50° Nord und Süd.

MOYZES, R.: Gruppierungsversuch meteorologischer Parameter und Zuordnung von Großwetterlagen.

SCHULZ, D.: Lokalklimatologische Untersuchung über die Feuchteverteilung im Stadtgebiet von Berlin (West).

SWACZINA, H.: Medizinmeteorologische Auswertung von Sterbefällen infolge von Krankheiten des Kreislaufsystems in Berlin (West).

TIERSCH, G.: Die Bestimmung der aktuellen Evapotranspiration eines Beta-Rübenbestandes mit Hilfe mikrometeorologischer Ansätze.

WILCKE, F.: Die Lokalwindzirkulation im Raum Frankfurt/Main und der Versuch ihrer numerischen Simulation.

Universität Bonn

Diplom-Hauptprüfungen

BECKER, C.: Über die Zusammenhänge zwischen den Niederschlägen in Tropisch-Amerika und großräumigen Zirkulationen.

BECKER, G.: Elektromagnetische Strahlung von beliebig orientierten Blitzkanälen.

GLOWIENKA, R.: Parametrisierungen der CO₂-Transmission und ihre Verwendbarkeit für die Strahlungsflußberechnung in Klimamodellen.

HAASE, S.: Vergleich verschiedener Datenkorrekturmethoden bei der Berechnung des turbulenten Vertikalflusses von Energie in der freien Atmosphäre.

HALBSGUTH, G.: Bestimmung von turbulenten Energieflußdichten in einem Alpental unter besonderer Berücksichtigung der Strahlungsbilanz.

HOMMES, A.: Eine Wasserbilanz des Swistbaches oberhalb des Pegels Mornhoven.

KAMMER, A.: Quantitative Messung der Feinstrukturen von Gebietsniederschlägen mit Radar.

MEYER, W.: Vergleich handelsüblicher Feuchtemeßinstrumente.

RECKTENWALD, K.: Untersuchung des Einflusses von Aufbau und Funktionsweise auf die Meßergebnisse des elektrostatischen Regenanalyseators und des elektrodynamischen Tropfenspektrographen RD 69.

SCHAIRDEL, B.: Verteilung und Variabilität der Mitteltemperatur der Schicht 500/1000 mb über der Arktis (1949—1978).

SCHRÖDER, U.: Einfluß des Waldes auf das Abflußverhalten, untersucht an kleinen Einzugsgebieten im Oberharz.

Technische Universität Braunschweig

Promotionen

DENSKAT, K. U.: Untersuchung von Alfvénischen Fluktuationen im Sonnenwind zwischen 0,29 AE und 1,0 AE.

BRADEN, H.: Simulationsmodell für den Wasser-, Energie- und Stoffhaushalt in Pflanzenbeständen.

Technische Hochschule Darmstadt

Promotionen

BRÜCHER, L.: Numerische Simulation einer Abgasfahne in Quellnähe und Schadstofftransport im regionalen und interregionalen Bereich.

WALLBAUM, F.: Numerische Simulation atmosphärischer Strömungen im Mesoscale Gamma.

Diplom-Hauptprüfungen

BISCHOFF-GAUSS, I.: Zur Verwendung der Gleichung für die Turbulenzenergie bei der Schließung des Gleichungssystems für die atmosphärische Grenzschicht.

KOCH, W.: Die Berücksichtigung der Bildung von Wolken- und Regentropfen in einem Grenzschichtmodell.

KRAUS, C.: Versuch einer numerischen Simulation der Ausbildung nächtlicher Kaltluftabflüsse an Hängen und der Entstehung von Kaltluftseen.

LÖCHER, Th.: Das Klima von Darmstadt — eine Untersuchung für den Zeitraum 1940—1979.

MÖLLMANN, M.: Teiluntersuchungen zur Entwicklung eines einparametrischen Zirkulationsmodells.

MUSTAFA, A.: Statistische Untersuchungen zur Nutzung der Sonnenenergie.

PFLÜGER, U.: Versuch der numerischen Simulation einer Land-See-Wind-Zirkulation mit einem nichthydrostatischen Modell.

RÖCKLE, R.: Statistische Untersuchungen zur Schauer- und Gewittervorhersage.

SCHMIDT, H.: Plötzliche Stratosphärenwärmungen — ein Literaturüberblick.

WILHELM, M.: Ein Verfahren zur Bestimmung von Ausbreitungsparametern aus synoptischen Größen und Standortparametern.

WORTMANN, B.: Trajektorienvermessung mit optischem Doppelausschnitt.

Universität Frankfurt am Main

Promotion

PERSEKE, C.: Die trockene und feuchte Deposition säurebildender atmosphärischer Spurenstoffe.

Diplom-Hauptprüfungen

- BRANDTNER, M.: Erprobung und Anwendungsmöglichkeiten des Korrelationspektrometers (COSPEC II) zur Fernerkundung von Schadgasen.
- GERMANN, D.: Formulierung und Durchführung numerischer Modellrechnungen zur stationären Scherwärmung.
- GROSCH, St.: Bleianreicherung in Nadeln von *Taxus Baccata* L. in Frankfurt/Main und seiner Umgebung unter Berücksichtigung meteorologischer Einflußgrößen.
- JOACHIMI, H.: Untersuchung der Schwereanomalie des Rheinischen Schildes.
- KINS, L.: Differentialanalysen der chemischen Zusammensetzung von Einzelniederschlägen.
- OCKELMANN, G.: Untersuchung der Verteilung des atmosphärischen Schwefeldioxids über dem Atlantik und der Arktis.
- REXROTH, W.: Spektrale Verfahren am Beispiel einer Schwereanomalie.
- SCHMITT, G.: Messung von polyzyklischen aromatischen Kohlenwasserstoffen im Niederschlag mit Hochdruckflüssigkeitschromatographie.
- SEIDL, W.: Mischungen oberflächenaktiver Substanzen auf Regentropfen und Aerosolteilchen: Experimentelle Bestimmung, Auswertemethoden, Interpretationsversuche und meteorologische Auswertungen.
- THIERBACH, E.: Das seismische Risiko in der Bundesrepublik Deutschland und ihren Randgebieten.
- WABRA, Th.: Auswertung von Schweremessungen im nordwestlichen Vorland des Ruhrgebietes.
- WALLNER, H.: Numerische Modelle zur Dynamik einer Lithosphärenplatte unter dem Aspekt der kontinentalen Kollision.
- ZEPF, B.: Elementanalyse von natürlichen Niederschlägen mit protonen-induzierter Röntgenspektrometrie (PIXE).

Universität Göttingen

Habilitation

- FABIAN, P.: Über die numerische Simulation dynamischer und photoche-

mischer Prozesse in der Stratosphäre, dargestellt am Beispiel eines zweidimensionalen Spurenstoffmodells.

Universität Hamburg

Promotion

- BAKAN, St.: Strahlungsgetriebene Zellularkonvektion in Schichtwolken.

Diplom-Hauptprüfungen

- BRÜNING, C.: Vergleich von numerischen Vorhersagen von Sturmflutwetterlagen im Bereich der Nordsee sowie Entwicklung und Test eines statistischen Korrekturverfahrens.
- CHLOND, A.: Bestimmung des spektralen Transfers von turbulenter kinetischer Energie und von Temperaturvarianz im zweidimensionalen Wellenzahlraum.
- COULMANN, S.: Solare Strahlungsübertragung in Wolkenfeldern.
- DIBBERN, J.: Eine Methode zur Bestimmung von Niederschlagsparametern mit einem bistatischen Dual-Polarisationsradar unter besonderer Berücksichtigung der Streueigenschaften rotationselliptischer Tropfen.
- EGGERS, H. M.: Darstellung der meridionalen und zeitlichen Variationen des Windes und der Temperatur in der höheren Atmosphäre über dem tropischen Atlantik mit Hilfe von Messungen, die während FGGE '79 an Bord des FS „Meteor“ gewonnen wurden.
- LATIF, M.: Die Untersuchung der Einflüsse höhenabhängiger und anisotroper turbulenter Diffusionskoeffizienten der Vertikalgeschwindigkeit und Vorticity des großräumigen Feldes auf eine dynamisch instabile Grenzschichtströmung anhand einer Fallstudie des Kontur-Experiments.
- LIERMANN, D.: Parametrisierungen des Bodenwindes — ein Vergleich verschiedener Methoden für Sturmflutwetterlagen im Nordseebereich.
- LUDWIG, G.: Betrachtungen des räumlichen und zeitlichen Verhaltens des Vertikalwindes in Aufwindschläuchen.

- MESCHKAT, G.: Untersuchung und experimentelle Bestimmung des lateralen Diffusionskoeffizienten in der Prandtlschicht.

MÜLLER, B.: Über die Verwendbarkeit eines quasigeostrophischen Modells für kurzfristige Wettervorhersagen — Ein Vergleich mit den Ergebnissen des Regionalmodells.

- WERHAHN, J.: Untersuchung der meridionalen und zeitlichen Variationen von Temperatur, Feuchte und Wind in der unteren Troposphäre über dem tropischen Atlantik anhand der Messungen des FS „Meteor“ während FGGE 1979.

Universität Hannover

Diplom-Hauptprüfungen

- FRANKE, W.: Untersuchung konvektiver Niederschlagsereignisse im Einzugsgebiet des Kocher.
- GERBIG, R.: Bodenheizung im Freiland, Literaturanalyse unter meteorologischen Aspekten und Abschätzung des Einflusses auf den Wärmehaushalt der Bodenoberfläche.
- HAGEMANN, N.: Böen und maximale Windgeschwindigkeiten in Norddeutschland.
- HIZDEN VON LUPASKO, A.: Energieumsätze eines ausgewählten Fichtenbestandes im Solling 1972.
- HOFF, A.: Messung des Windangebots innerhalb der Rotorfläche einer kleinen Windkraftanlage.
- KLÖS, K.-D.: Betrachtungen zu Windmessungen mit Pilotballonen im Einfach- und Doppelanschnitt und der Vergleich mit Turmmessungen in der Höhenschicht von 50 bis 300 m über Grund.
- LAUDE, H.: Extrapolation von in Norddeutschland gemessenen Windgeschwindigkeiten.
- PENGEL, K.: Simulation einer stationären und horizontal homogenen Strömung in der atmosphärischen Grenzschicht mit einem Zwei-Schichten-Modell.
- PIETZNER, B.: Einsatz eines monostatischen Sodar-Gerätes zur Erfassung der atmosphärischen Grenzschicht in Norddeutschland.
- STUCKENBERG, H.-U.: Der Windkanal des Instituts für Meteorologie und Klimatologie und seine Anwendung bei der Bestimmung der dynamischen Eigenschaften eines Schalenkreuzanemometers.

WITTICH, K.-P.: Die nächtliche stabile Grenzschicht in einer Fallstudie.

WITTLER, P.: Berührungslose Bestimmung von Blattoberflächentemperaturen — Modellrechnung und Experiment an Begonienblättern im Gewächshaus.

Universität (TH) Karlsruhe

Promotionen

TANGERMANN-DLUGI, G.: Numerische Simulationen atmosphärischer Grenzschichtströmungen über langgestreckten mesoskaligen Hügelketten bei neutraler thermischer Schichtung.

WITTE, N.: Ein numerisches Modell des Wärmehaushalts fließender Gewässer unter Berücksichtigung thermischer Eingriffe.

Diplom-Hauptprüfungen

CORSMEIER, U.: Strukturinformationen über die atmosphärische Turbulenz innerhalb der maritimen Grenzschicht, ermittelt aus Messungen mit dem Forschungsflugzeug FALCON.

KOST, W.-J.: Experimentelle Untersuchung zur Ausbreitung von Luftverunreinigungen in einem Talsystem.

WILDERMUTH, H.: Verfahren zur Anpassung der Vertikalprofile atmosphärischer Zustandsgrößen bis 1500 m Höhe aus Mastmessungen und synoptischen Daten.

Universität Kiel

Diplom-Hauptprüfungen

ALCK, S.: Zur Bestimmung der Wärmebilanz der Kieler Bucht mit Daten des Meßprojektes „Kieler Bucht 1977“.

FRANKRONE, M.: Mesoskalige Prozesse der Wechselwirkung Ozean-Atmosphäre.

GORRISEN, G.: Nutzung der harmonischen Analyse der Topographie des Geopotentials im 500 mb-Niveau für die Vorhersage.

KÜHL, M.: Die kinetische Energie des Windes im 'spectral gap'.

MÜLLER, R.: Die Zeitkonstante der Temperaturumstellung in der wasser-nahen Luftschicht.

PEPIN, B.: Zur Modellierung des Einflusses eines Rauigkeitsprunges auf

die Strömung in der bodennahen Luftschicht.

SCHMITZ-PFEIFFER, A.: Die ageostrophische Methode zur Bestimmung der Schubspannung und des verallgemeinerten reibungsfreien Windes in der planetarischen Grenzschicht.

SCHULZ, G.: Parametrisierung der Dampfdruckdifferenz 'Wasser-Luft' aus den Temperaturen von Wasser und Luft.

SINN, M.: Messung von diffuser Himmelsstrahlung mit geneigten Empfangsflächen.

WEBER, H.: Anwendbarkeit von Ausbreitungskriterien für die Ausbreitung von Luftbeimengungen über See.

Universität Köln

Promotionen

GUBE, M.: Berechnung der Strahlungsbilanz der Erde aus spektralen Strahlungsdichtemessungen des Satelliten METEOSAT.

HENSE, A.: Wolkenparametrisierung in Zirkulationsmodellen.

HÖLLER, H.: Detaillierte und parametrisierte Modellierung der Wolken-Mikrophysik in einem stationären Wolkenmodell.

METZIG, G.: Planktonmessungen vom Satelliten aus.

PROSCH, T.: Optische Polarimetrie von Wasseroberflächen mit einem abbildenden Polarimeter.

Diplom-Hauptprüfungen

KÖNIG, W.: Anwendung der Parametrisierung der Kumuluskonvektion von Arakawa und Schubert zur Bestimmung der Wolkenmassenausflüsse.

MEYER, R.: Merkmale blockierender Wetterlagen im atlantisch-europäischen Raum.

STUHLMANN, R.: Zur Berechnung von Strahlungsdivergenzen der Troposphäre aus Satellitendaten.

Universität Mainz

Promotion

SCHRODIN, R.: Die Beeinflussung der mesoskaligen Zustandsgrößen durch die von Konvektionsprozessen hervorgerufenen Flüsse.

Diplom-Hauptprüfungen

BOTT, A.: Strahlungstransporttheorie in der Atmosphäre — speziell deren Anwendung auf Wolken im solaren Spektralbereich.

BRÜHL, C.: Eine approximative Methode zur Berechnung von solaren Betrachungsstärken auf geneigten Flächen mit Berücksichtigung von Abschattungseffekten.

EICHHORN, J.: Die Parametrisierung turbulenter Flüsse in numerischen Modellen der atmosphärischen Grenzschicht.

FLOSSMANN, A.: Die Parametrisierung der Niederschlagsbildung in warmen und kalten Wolken.

FRISCHHOLZ-STRÖDTER, C.: Test und Eichung eines kommerziellen Gerätes zur Herstellung monodisperser Tröpfchen.

HEIN, J.: Der Einfluß des Windes auf den Abbau von Kohlenmonoxyd und Wasserstoff im Boden.

HELMES, L.: Bestimmung der atmosphärischen Trübung aus den Aufzeichnungen des Sonnenscheinschreibers Campbell-Stokes.

RABOLD, M. F.: Messung horizontaler Strahlungsströme im Grenzbe-reich Stadt—Umland.

REICHENAUER, H.: Vergleich verschiedener Zweistrommodelle mit einem exakten Modell zur Bestimmung von Photolysefrequenzen in der Atmosphäre.

RITTER, B.: Der Einfluß der atmosphärischen Streustrahlung an Tröpfchen im langwelligen Spektralbereich.

STINGL, J.: Untersuchungen von Größenverteilungen im Aitkenteilchenbereich mit einem doppelt differenzierenden elektrischen Beweglichkeitsanalysator und mit einem Diffusionsanalysator.

WEISEL, E. L.: Die Entwicklung der atmosphärischen Grenzschicht mit Entrainment während der Tageszeit — Vergleich von Modellsimulationen.

Universität München Meteorologisches Institut

Diplom-Hauptprüfungen

KÖHLER, U.: Gebirgswindexperiment DISKUS — Methode zur Abschät-

zung der Energiebilanz des Dischma-
tales.

STROHMAYER, G.: Mittlerer Dreh-
impuls und Gebirgseffekt in einem
barotropen, reibungsfreien Modell
mit den primitiven Gleichungen.

TRENKLE, R.: Die Albedo eines In-
nenhofes.

ZWICKL, L.: Die 200jährige Windreihe
des Hohenpeißenberges. Versuch ei-
ner Homogenisierung.

**Universität München
Lehrstuhl für Bioklimatologie
und Angewandte Meteorologie**

Diplom-Hauptprüfungen

GUTTENBERGER, J.: Die Anwend-
barkeit des Evapoklimatonomiekon-
zepts nach Lettau bei der Berechnung
des Wasserhaushalts bayerischer Ein-
zugsgebiete.

SCHUH, A.: Menschliche Wärmebi-
lanz und Empfindung von Patienten
auf Kurübungswegen im Gebirge.

TEICHMANN, U.: Die Ermittlung des
Gebietsniederschlags zur Lösung hy-
drologischer Bilanzen — dargestellt
am Beispiel des Einzugsgebietes Gro-
ße Ohe im Nationalpark Bayerischer
Wald.

Neuerscheinungen

LAMB, H. H.

Climate, history and the modern world.
London & New York: Methuen 1982.
XIX, 387 S. (UP 770). ISBN 0416334407.

BARRETT, E. C.; CURTIS, L. F.

Introduction to environmental remote
sensing. (2. ed.) London, New York:
Chapman and Hall 1982. XIII, 352 S.
ISBN 0412230909.

BALZER, K.

Weitere Aussichten: wechselhaft. Ein
Buch vom Wetter. Berlin: Verl. Neues Le-
ben 1982. 280 S. Best.Nr. 6432351.

WMO

Long-range transport of sulphur in the at-
mosphere and acid rain. Lectures present-
ed at the thirty-third session of the WMO
Executive Committee. Geneva: WMO
1983 (= WMO-No. 603).

WMO

The results of the Global Weather Experi-
ment. Lectures presented at the thirty-
fourth session of the WMO Executive
Committee. Geneva: WMO 1983 (WMO-
No. 610).

EAGLEMAN, J. R.

Severe and unusual weather. New York,
Cincinnati, Toronto (usw.): Van Nostrand
Reinhold Co. 1983. XI, 372 S.
ISBN 0-442-26195-0.

SPIEGEL, H. J.; GRUBER, A.

From weather vanes to satellites. An intro-
duction to meteorology. New York,
Chichester, Brisbane (usw.): John Wiley
1983. XI, 241 S. ISBN 0-471-86401-3.

GOSSARD, E. E.; STRAUCH, R. G.

Radar observation of clear air and clouds.
Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier
1983. XII, 280 S.
(= Developments in Atmospheric Scien-
ce. 14.) ISBN 0-444-42182-3.

PEDLOSKY, J.

Geophysical fluid dynamics. Study ed.
New York, Heidelberg, Berlin: Springer
1982. XII, 624 S. ISBN 0-387-90745-9.

PRÜGEL, H.

Wetterführer. Wegweiser zum Verständ-
nis des Wetters und der Wettervorhersage.
5., voll. neu bearb. Aufl. Hamburg: See-
Selbstverl. Wilhelm Koch 1982. 320 S.
ISBN 3-9800161-8-8.

BROWNING, K. A. (Ed.)

Nowcasting. London, New York, Paris u.
a.: Academic Pr. 1982. XIV, 256 S. ISBN
0-12-137760-1.

GEORGII, H. W.; JAESCHKE, W. L. (Ed.)

Chemistry of the unpolluted and polluted
troposphere. Proceedings of the NATO
Advanced Study Institute held on the Is-
land of Corfu, Greece, September 28 - Oc-
tober 10, 1981. Dordrecht, Boston, Lon-
don: D. Reidel Publ. Comp. 1982. VIII,
509 S. ISBN 90-277-1487-8.

SALTZMAN, B. (Ed.)

Theory of climate. Proceedings of a Sym-
posium commemorating the 200. Anniver-
sary of the Academy of sciences of Lis-
bon, October 12-14, 1981, Lisbon, Portu-
gal. New York, London, Paris u. a.: Aca-
demic Pr. 1983. XII, 505 S. (= Advances
in Geophys. 25.) ISBN 0-12-018825-2.

KÖRBER, H.-G.

Alfred Wegener. 2., erw. Aufl. Leipzig:
BSB B. G. Teubner Verl.-Gesell. 1982.
100 S. (= Biographien hervorragender
Naturwissenschaftler, Techniker u. Medi-
ziner. Bd. 46.)

MELARAGNO, M.

Wind in architectural and environmental
design. New York, Cincinnati, Toronto
usw.: Van Nostrand Reinhold Co. 1982.
XIX, 684 S. ISBN 0-442-25130-0.

WENZEL, H. G.; PIEKARSKI, C.

Klima und Arbeit. 2. Aufl. München:
Bayer. Staatsministerium f. Arbeit u. So-
zialordnung 1982. 200 S. Reg. Nr.
10/79/15.

BENARIE, M. M. (Ed.)

Atmospheric Pollution 1982. Proceedings
of the 15. International Colloquium,
UNESCO Building, Paris, France, May 4-
7, 1982. Amsterdam, Oxford, New York:
Elsevier 1982. XI, 404 S. (= Studies in en-
vironmental science. 20.) ISBN 0-444-
42083-5 (Vol. 20).

AHRENS, C. D.

Meteorology today. An introd. to weat-
her, climate, and the environment. St.
Paul/MN u. a.: West Publ. Co. 1982.
XIV, 514 S., 8 S. Farbt. ISBN 0-314-
63147-X.

Verein Deutscher Ingenieure

Meteorologische Messungen für Fragen
der Luftreinhaltung: Messen des Nieder-
schlags. Düsseldorf: VDI-Verl.; Berlin u.
Köln: Beuth Verl. Juni 1983. (= VDI-
Handbuch Reinhaltung d. Luft. Bd. 1,
VDI 3786 Bl. 7 Entwurf.).

Tagungen

Deutsche Meteorologen-Tagung 1983

Aus Anlaß des 100jährigen Bestehens der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft e.V. (DMG) fand vom 16.—19. Mai 1983 in Bad Kissingen die Deutsche Meteorologen-Tagung statt. An ihr nahmen über 400 Meteorologen teil, darunter auch Kollegen aus Belgien, Dänemark, Griechenland, Österreich, der Schweiz und Ungarn. Sie wurde vom Vorsitzenden der DMG, Dipl.-Met. Dr. S. UHLIG, eröffnet, der in seiner Begrüßungsansprache auch die Geschichte der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft streifte, deren Entwicklung von 1883 bis heute von CAPPEL im Heft 1'83 der DMG-Mitteilungen ausführlich dargestellt wurde (1).

Die Tagung wurde vom Zweigverein Frankfurt der DMG ausgerichtet und fand — wie frühere Tagungen dieser Art — die großzügige Unterstützung von Seiten des Deutschen Wetterdienstes. Professor Dr. LAUSCHER (Wien) überbrachte die Grüße der Österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, mit der von jeher enge Verbindungen bestanden (2), die ihren Niederschlag auch in der gemeinsamen Herausgabe der „Meteorologischen Zeitschrift“ ab 3. Jahrgang (1886), zugleich XXI. Band der Zeitschrift der Österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, fanden. Die Grüße der Ungarischen Meteorologischen Gesellschaft überbrachte Prof. Dr. Szász (Debrecan).

Vor dem Beginn der Fachvorträge überreichte der Vorsitzende der DMG Herrn Professor Dr. FLOHN (Bonn) die von der DMG gestiftete Alfred-Wegener-Medaille für seine großen Verdienste um die Meteorologie. Der Förderungspreis der DMG wurde Herrn Dr. WERGEN (z. Zt. beim Europäischen Zentrum für Mittelfristige Wettervorhersage, Reading) für eine bedeutsame Arbeit auf dem Gebiet der Numerischen Wettervorhersage verliehen (5).

Das umfangreiche Tagungsprogramm enthielt insgesamt 101 Vorträge und Poster. Vorträge und Poster lagen bereits zum Tagungsbeginn in gedruckter Form als erweiterte Zusammenfassung vor (3), was von den Tagungsteilnehmern, wie auch bei der vom Deutschen Wetterdienst veranstalteten XVII. Internationalen Tagung für Alpine Meteorologie (4), dankbar anerkannt wurde.

Den Festvortrag hielt Professor WIPPERMANN (Darmstadt) über das Thema „Das Entstehen von Strukturen — Synergetische Probleme in der Meteorologie“, der in einem der nächsten Promet-Hefte vollständig veröffentlicht werden wird. Die Fachvorträge gruppierten sich um die Themenkreise:

- Regionale und lokale Klimatologie
- Biometeorologie
- Regionale und lokale Wetteranalyse und -vorhersage.

Auf eine Wiedergabe einzelner Ergebnisse wird hier verzichtet, da sie in (3) jedermann zugänglich sind. Ein Teil der Vorträge und Poster wird in vollständiger Form in den Publikationsorganen der DMG, den „Beiträgen zur Physik der Atmosphäre (Contributions to Atmospheric Physics)“ und der „Meteorologischen Rundschau“ veröffentlicht werden.

Die Tagung hat eindrucksvoll gezeigt, wie besonders im mesoskaligen Bereich durch Experimente und deren theoretisch-modellmäßige Unterbauung weitere Fortschritte im Verständnis regionaler und lokaler Prozesse erzielt worden sind, die sowohl für die angewandte Klimatologie als auch für die Wettervorhersage Bedeutung haben. Im Nachfolgenden werden die Titel aller Vorträge und Poster (gekennzeichnet mit einem *) wiedergegeben:

Festvortrag

Wippermann, F.: Die Entstehung von Strukturen — Synergetische Probleme in der Meteorologie

Regional- und Lokalklimatologie

Kraus, H.: Meso- und mikro-skalige Klimasysteme (Einführungsvortrag)

Egger, J.: Kanalisierung des Windes in breiten Tälern

Freytag, C.: Ausbildung thermischer Windsysteme im Innthal während Merkur

Schaller, E.: Mesoskalige turbulente Flüsse: Eine Fallstudie für das Küstenexperiment Pukk

Erling, D.; Detering, H.: Parametrisierung turbulenter Flüsse in numerischen Modellen zur Überströmung von Topographien

Kottmeier, Chr.; Lege, D.; Roth, R.: Ein Beitrag zur Klimatologie und der Synoptik der Grenzschichtstrahlströme über der norddeutschen Tiefebene

Kerschgens, M. J.: An energetic view of urban atmosphere

Böhm, R.: Die aktuelle Entwicklung der urbanen Wärmeinsel in Wien: Zeichnet sich eine Trendwende ab?

Mayer, H.: Stadtklima Bayern — ein anwendungsorientiertes Forschungsvorhaben

Vent-Schmidt, V.: Klimaschutz. Anforderungen und Realisierbarkeit in der Regionalplanung

Neumann-Hauf, G.: Lokale und regionale Unterschiede in der Klimatologie der Ausbreitungsverhältnisse

Groll, A.; Aufm Kampe, W.: Ausbreitung luftfremder Beimengungen über Land und See

Groll, A.; Aufm Kampe, W.: Zur Ausbreitung luftfremder Beimengungen: Ergebnisse Mesoklip und Merkur

Schönwiese, Chr.-D.: Die Nicht-Stationarität klimatologischer Daten

Gossmann, H.: Liefern Satelliten-Thermal-aufnahmen einen Beitrag zur Klimaformung im Mesoscale?

Kost, W.-J.: Experimentelle Untersuchung zur Ausbreitung von Luftbeimengungen in einem Talsystem*

Schmidt, H.; Hennemuth, B.: Das thermische Windsystem in einem kleinen Alpental*

Tetzlaff, G.; Schmidt, R.; Trapp, R.; Hoff, A.: Untersuchung zur Beschreibung des Windfeldes an Hügeln*

Wittich, K.-P.; Roth, R.: Ein Beitrag zur Bestimmung der turbulenten Flüsse von Impuls und Wärme innerhalb der stabilen planetaren Grenzschicht*

Czeplak, G.: Darstellung der Turbulenzenergie durch die mittleren Felder von Wind und Temperatur und der Strahlungsbilanz*

Kasten, F.: Parametrisierung der Globalstrahlung durch Bedeckungsgrad und Trübungsfaktor*

Vogel, B.: Ein objektives Analyseverfahren für die Mesoklip-Vertikalschnitte*

Katzschner, L.: Wirkung der Baustruktur auf das kleinräumige Klima einer Stadt*

Stock, P.; Beckröge, W.: Synthetische Klimafunktionskarten für das Ruhrgebiet*

Groß, G.: Die Beeinflussung einer städtischen Wärmeinsel durch nächtliche Kaltluftabflüsse — ein numerisches Simulationsexperiment*

Heimann, D.; Wilcke, F.: Numerische Simulation regionaler Wind- und Immissionsfelder in der Region Untermain*

Kramm, G.: In situ-Messungen mit einer Fesselballon-Sonde über dem Stadtgebiet von Köln*

Bründl, W.; Noack, E.-M.: Stadtklima Bayern — die Wirkung stadtnaher Wälder bei einer spätsommerlichen Hochdruckwetterlage auf das Klima in München*

Wilmers, F.: Geländekartierung als Grundlage für mikrometeorologische Standortsbewertungen — gezeigt an stadtklimatologischen Problemen*

Otte, U.: Regionalklimatologische Untersuchung im Regierungsbezirk Düsseldorf als Grundlage der Gebietsentwicklung*

Scharer, H.: Die Praxis meteorologischer Gutachten in der Raumplanung*

Lux, G.; Leykauf, H.: Arbeitsweise und Einsatzmöglichkeiten der Wetter-Meßzüge aufgezeigt an klimatologischen Untersuchungen am Unfallschwerpunkt Ostheimer Senke — BAB A7 (Kassel-Hattenbach)*

Gutsche, A.: Die Andauer von Inversionen an den aerologischen Stationen der Bundesrepublik Deutschland*

Krames, K.: Flugzeugsondierungen der horizontalen und vertikalen Dunstausbreitung über Mitteleuropa*

Rudolf, B.: Modellrechnungen zur regionalen und zeitlichen Verteilung der Kühlturmschwadenausbreitung auf der Basis von aerologischen Daten des Deutschen Wetterdienstes*

Strobel, B.: Statisch gestütztes Bewertungsverfahren von Trajektorien*

Neuber, E.; Schönwiese, Chr.-D.: Statische Charakteristik lokaler Niederschlagsschwankungen in Mitteleuropa seit 1735*

Neuwirth, F.: Die Charakterisierung des Klimas in ausgewählten Orten Österreichs nach Tornthwaite*

Behr, H. D.: Analyse des außergewöhnlichen Witterungsverlaufs des Jahres 1982 unter dem Gesichtspunkt der Strahlungsenergie*

Maheras, P.; Balafoutis, Chr.: Factorial analysis of the aridity index in Greece — climatograms*

Beyer, R.: Die Anwendung der Weibull-Verteilung zur Abschätzung des Windenergieangebotes verschiedener Standorte in Norddeutschland*

Küsters, E. R.: Zur Witterungsabhängigkeit der organischen Wassertrübung in der Deutschen Bucht*

Bergholter, U.: Meise — ein automatisches Meßwerterfassungssystem*

Fimpel, H. P.: Messungen von Temperatur- und Feuchteprofilen mit dem meteorologischen Forschungsflugzeug Falcon 20 der DFVLR*

Hauf, Th.; Jochum, M.: Messung der Konzentration und des Spektrums von Wolkentropfen mit einer Heißfilmsonde*

Biometeorologie

Baumgartner, A.: Biometeorologie (Übersichtsvortrag)

Höppe, P.: Die menschliche Energiebilanz unter verschiedenen Klimabedingungen

Jendritzky, G.: Die thermische Komponente im Bioklima einer Stadt

Balafoutis, Chr.; Maheras, P.: The bioclimatic conditions over Greece by using air enthalpy

Dehne, K.: Neue Berechnungen zur Klimatologie der erythemwirksamen UV-Globalstrahlung

Winkler, P.: Saurer Niederschlag — eine Trendanalyse

Schrödter, H.: Agrarmeteorologie als integraler Bestandteil einer biophysikalisch orientierten Ökosystemforschung (Übersichtsvortrag)

Braden, H.: Ergebnisse eines biophysikalischen Modells des Systems Boden-Pflanze-Atmosphäre

Friesland, H.: Ein biometeorologischer Modellansatz zur Simulation und Vorhersage von Schädlingsbefallsverläufen in Winterweizen

Hild, J.: Neue Anwendungsgebiete der Tier- und Pflanzenphänologie

Szasz, G.: Klimapotentiale und landwirtschaftliche Pflanzenproduktion in Ungarn

Löpmeier, F.-J.: Methodik und Problematik agrarmeteorologischer Vorhersagen witterungsabhängiger Tierkrankheiten

Vaitl, W.: Meteorologische Untersuchungen im Forschungsprojekt „Agrotherm Grundremmungen“

Bucher, K.; Sönning, W.: Zur Neufassung des medizin-meteorologischen Informationsdienstes im Deutschen Wetterdienst*

Machalek, A.: Bioklimatische Forschung in Österreich am Beispiel der Meteoropathologie der Wiener Bevölkerungsstruktur*

Staudinger, M.: Die Beziehung zwischen aktueller und potentieller Verdunstung an zwei Hochgebirgslagen während der Sommermonate*

Rehwal, W.; Ambach, W.: Messung des jahreszeitlichen Verlaufs der erythemwirksamen Dosis der solaren UV-B-Strahlung*

Puls, K. E.: Pollenflug-Vorhersage in Nordrhein-Westfalen — ein Feldversuch*

Amtmann, R.; Mayer, H.: Windinduzierte Baumschwingungen im Hinblick auf die Sturmgefährdung der Wälder*

Brechtel, H.-M.; Rapp, H.-J.; Scheele, G.: Der Einfluß des Waldes und der Landnutzung auf die Schneean Sammlung und Schneeschmelze in den hessischen Mittelgebirgen, Ergebnisse eines forstlichen Schneemeßdienstes*

Riedinger, F. P.; Ehrhardt, O.: Der Einfluß eines Buchenhochwaldes auf die Global- und die photosynthetisch aktive (PAR) Strahlung*

Kaminski, U.; Winkler, P.: Saure Aerosolpartikeln und Nebel und ihre Wirkung auf die Biosphäre*

Brumme, B.; Eggers, H.: Evapotranspiration im Gewächshaus*

Raden, H. van: EDV-gestützte Vogelschlagrisiko-Vorhersage*

Regionale und lokale Wetteranalyse und -vorhersage

Malberg, H.: Ansätze zur lokalen Wettervorhersage auf physikalisch-statistischer Basis (Übersichtsvortrag)

Kirchhofer, W.: Entwicklung statistischer Prognoseverfahren auf der Basis großräumiger Höhendruckfelder

Pander, R. v.: Eine Untersuchung zur Anwendung der Regressionstechnik auf die statistisch-numerische Modellinterpretation

Pistorius, H.-J.: Lokale Temperaturvorhersage auf statistisch-numerischer Basis

Strüning, J.-O.: Wahrscheinlichkeitsvorhersage für das Auftreten von Gewittern mit einem statistischen Regressionsverfahren

Paulus, R. F.: Wetterberatung bei interaktiver Zusammenarbeit zwischen Meteorologen und Datenverarbeitung

Engels, M.; Gemein, H. P.; Schiessl, D.; Skade, H.: Ein operationelles Interaktives Graphisches System (IGS)

Weingärtner, H.: Verifikation lokaler Vorhersagen im Hinblick auf deren zeitabhängigen Informationsgehalt

Dreißigacker, R.; Fleer, H.: Verifikation und Verbesserung der BKF-Niederschlagsvorhersagen für die Anwendung in einem Flußgebietsmodell

Kurz, M.: Zur Wetterwirksamkeit von Fronten und Frontalzonen

Born, B.: Sturmwarnung am Balaton

Reimer, E.: Diagnose einer Genua-Zyklone: objektive Analyse

Frenzen, G.; Speth, P.: Diagnose einer Genua-Zyklone: Energie- und Vorticity-Haushalt

Queck, H.; Reinhardt, M. E.; Pelechaty, J.: Vergleichende Windbestimmung von Rapid-Scan-Daten Meteosat und Radiosonden bzw. Flugzeugmessungen während des AlpeX-Feldexperimentes

Tetzlaff, G.; Laude, H.; Hagemann, N.; Adams, L. J.: Windgeschwindigkeitsmaxima in der nächtlichen Grenzschicht während Pukk

Baumüller, J.; Hoffmann, U.; Reuter, U.: Analyse der Smogsituation in Stuttgart im Januar 1982

Fischer, G.: Regionalmodelle für Wettervorhersagen. (Übersichtsvortrag)

Behr, H.; Roeckner, E.: Numerische Vorhersagen von Sturmflutwetterlagen mit Hilfe regionaler Modelle

Edelmann, W.: Bemerkungen über numerische Niederschlagsvorhersagen

Becker, H. G.: Vorhersagen für Mitteleuropa mit Hilfe eines mesoskaligen Vorhersagemodells

Müller, E.: Parametrisierte Niederschlagsprozesse in einem regionalen Wettervorhersagemodell

Jacobsen, I.: Verwendung von regionalen Wettervorhersagemodellen in der Ausbreitungsrechnung

Geb, M.: Troposphärische Fronten; ideale Strukturen — reale Prozesse?*

Bauer, E. L.: Eine Fallstudie zu orographischen Einflüssen auf das Wetter im Alpenraum*

Emeis, S.; Hantel, M.: Diagnose einer Genua-Zyklogese: subsynoptische Vertikalflüsse*

Emeis, S.: Das Gewitter vom 5. 6. 1982 — ein „mesoscale convective complex“ über Europa*

Skade, H.; Gemein, H. P.: Das IGS als modernes Hilfsmittel bei der Wetterüberwachung; Nutzen eines IGS bei der manuellen Konstruktion von Wetterkarten*

Cappel, A.; Lux, G.: Beitrag des Deutschen Wetterdienstes zum Smog-Warndienst*

Klapheck, K.; Winkler, P.; Kaminski, U.: Luftbeimengungen und Lidarbeobachtungen während winterlicher Inversionen*

Pietzner, B.; Roth, R.; Wittich, K.-P.: Die Horizontalsicht zwischen 2 und 300 Meter Höhe über der norddeutschen Tiefebene in Abhängigkeit von Tagesgang und Wetterlage*

Schwirner, J.-U.; Müller, E.; Link, A.; Majewski, D.: Physikalisch-numerische Struktur des Europa-Modells*

Literatur

- (1) CAPPEL, A.: Entwicklung der DMG von 1883 bis 1983. Mitt. DMG 1'83, S. 4—8.
- (2) LAUSCHER, F.: Hundert Jahre Zusammenarbeit ÖMG-DMG. Mitt. DMG 1'83, S. 13—16.
- (3) Deutsche Meteorologen-Tagung 1983 vom 16. bis 19. Mai 1983 in Bad Kissingen. Ann. d. Meteorol. N. F. Nr. 20 (1983).
- (4) XVII. Internationale Tagung für Alpine Meteorologie, Berchtesgaden 21. bis 25. September 1982. Ann. d. Meteorol. N. F. Nr. 19 (1982).
- (5) WERGEN, W.: Nonlinear normal mode initialization of a multi-level fine-mesh model with steep orography. Beitr. Phys. Atm. 54 (1981) S. 389—402.

	Seite
Aus der Weltorganisation für Meteorologie Third WMO statement on modification of the ozone layer due to human activities and some possible geophysical conse- quences	53
Aus dem Deutschen Wetterdienst Das operationelle Wettersatelliten- programm METEOSAT (H. WOICK)	56
Aus dem Geophysikalischen Beratungsdienst der Bundeswehr Die Ostalpen, von einem umlaufenden Wettersatelliten in verschiedenen Spektralbereichen gesehen (H. PAULUS)	57
Habilitationen, Promotionen und Diplom- Hauptprüfungen an den Universitäten der Bundesrepublik Deutschland und West Berlins im Jahre 1982	59
Neuerscheinungen	62
Tagungen Deutsche Meteorologen-Tagung 1983	63

**WMO TECHNICAL CONFERENCE ON
OBSERVATION AND MEASUREMENT
OF ATMOSPHERIC CONTAMINANTS
(TECOMAC), Vienna, 17 to 21 October 1983**

Purpose and Programme

A major objective of TECOMAC is to establish the state of today's knowledge and understanding of those man-induced and natural chemical and physical atmospheric parameters, which can influence climate and environmental qualities and their expected future development. Special attention will be given to the development of observation and measurement procedures. Papers will be presented on the following topics:

- chemical climatology and its evolution
- significance of air chemistry observations for understanding and predicting the state of the environment and climate variations
- observation and measurement of long-lived and reactive gases, aerosols, turbidity, dry deposition, chemical constituents in precipitation and organic contaminants
- instruments, analytical techniques (also including isotope and nuclear techniques), standardization, quality assurance, data evaluation techniques
- interaction of atmospheric constituents with adjacent environmental media

The Conference will be cosponsored by UNEP, IAEA and the Austrian Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik. Conference language will be English only. Date of deadline for short abstracts: 31 March 1983. The WMO Secretariat may still be approached for special information.

Anschriften der Autoren (Thema dieses Heftes)

Prof. Dr. C.-D. SCHÖNWIESE
Institut für Meteorologie und Geophysik der
Universität Frankfurt
Feldbergstraße 47
6000 Frankfurt am Main 1

Dipl.-Met. M. PAESLER
Deutscher Wetterdienst
Wetteramt München
Bavariaring 10
8000 München 2

Dr. G. BERZ
Münchener Rückversicherungs-
Gesellschaft
Postfach 401320
8000 München 40

Prof. Dr. H. FLEER
Institut für Meteorologie der TH Darmstadt
Hochschulstraße 1
6100 Darmstadt

Dr. L. HOFFMANN
Deutscher Wetterdienst
Seewetteramt
Bernhard-Nocht-Straße 76
2000 Hamburg 4

Dr. H. FECHNER
Institut für Meereskunde der Universität
Kiel, Abt. Maritime Meteorologie
Düsternbrooker Weg 20
2300 Kiel

Dipl.-Phys. T. DAHLEM
Dr. P. WENDLING
Institut für Physik der Atmosphäre
der DFVLR Oberpfaffenhofen
8031 Wessling/Obb.

Manuskriptsendungen werden erbeten an:

Deutscher Wetterdienst
Hauptschriftleitung „promet“
Frankfurter Straße 135
6050 Offenbach am Main